

CORSO DI TEORIA DELLE STRUTTURE

A.A. 2020-2021

Prova scritta del 12.01.2021

1 Risolvere con il metodo della linea elastica, scritta come equazione differenziale del IV ordine, una trave non deformabile al taglio di lunghezza L , incastrata nell'estremo di sinistra e incernierata in quello di destra. La trave è sottoposta a un carico distribuito $\mathcal{P}(x) = p_0 \sin(\alpha x)$. Si consideri il valore di α tale che il carico risulti:

(A) nullo in entrambi gli estremi.

(B) nullo nell'estremo di sinistra e massimo in quello di destra.

Richieste:

- i. Disegnare la trave descritta, mostrando la forma del carico e introducendo un opportuno sistema di riferimento.
- ii. Determinare le condizioni al contorno.
- iii. Determinare e disegnare qualitativamente la deformata.
- iv. Determinare e disegnare qualitativamente le espressioni di momento e taglio e calcolarne il valore negli estremi.

2 Si consideri una piastra circolare di raggio R , con bordo *appoggiato*. Indicare le condizioni al contorno da applicare e determinare la soluzione sotto carico uniformemente distribuito p_0 . È noto che l'integrale generale è dato in questo caso da

$$w(r) = A_1 r^2 \ln r + A_2 r^2 + A_3 \ln r + A_4 + \frac{p_0}{64D} r^4$$

dove D è la rigidezza flessione della piastra e r la coordinata radiale.

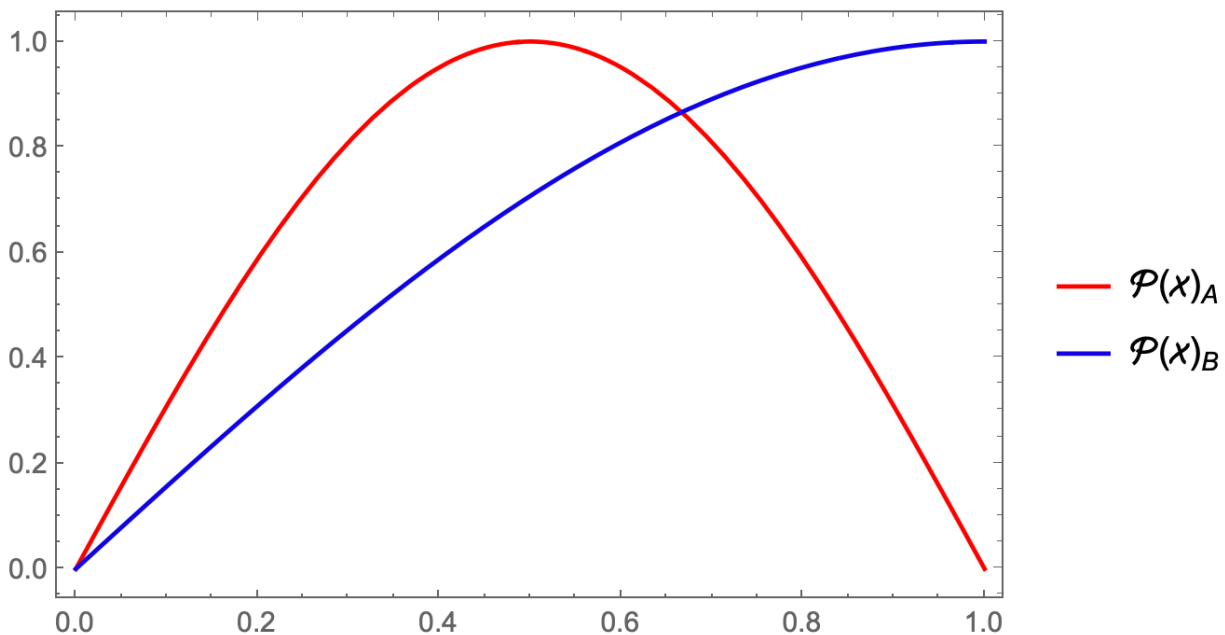
Soluzione

1 Come premessa consideriamo che il carico distribuito è nullo nell'estremo di sinistra qualsiasi sia il valore di α , mentre nell'estremo di destra può variare ed è (A) nullo se il suo argomento vale $k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$), (B) massimo se il suo argomento vale $(4k + 1)\pi/2$ (con $k \in \mathbb{Z}$). Facendo variare k si ottengono valori del carico con più o meno massimi (e minimi). Ovviamente si richiedeva il più semplice valore di α . Quindi si otteneva che:

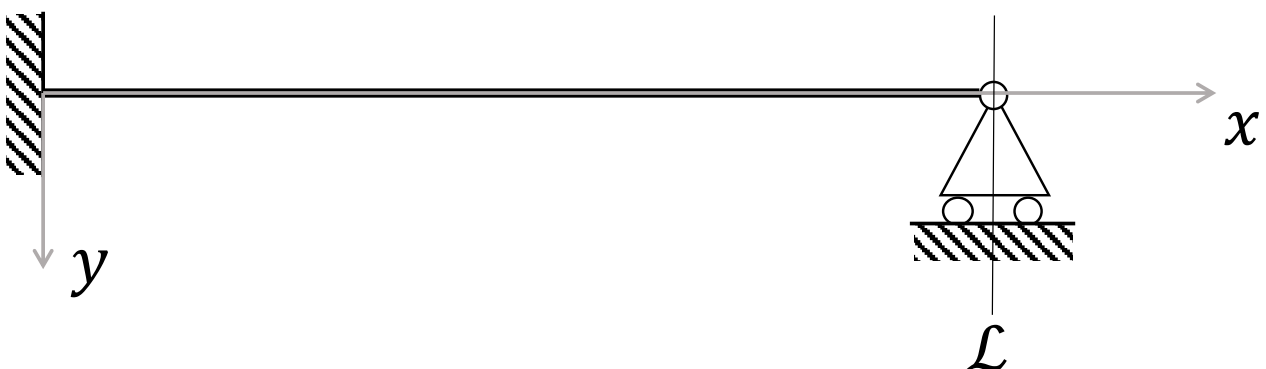
$$(A) \alpha = \pi/L ;$$

$$(B) \alpha = \pi/(2L) .$$

Il grafico del carico risulta essere (per semplicità poniamo in tutti i plot che seguono $p_0 = 1$; $L = 1$; $EJ = 1$)



Il disegno della trave del problema è invece



Le condizioni al bordo da porre sono quelle dell'incastro in $x = 0$ e di una cerniera in $x = L$, per cui

- i. $v(x = 0) = 0$;
- ii. $v'(x = 0) = 0$;
- iii. $v(x = L) = 0$;
- iv. $M(x = L) = 0$.

Integrando l'equazione della linea elastica si trova l'espressione per la deformata

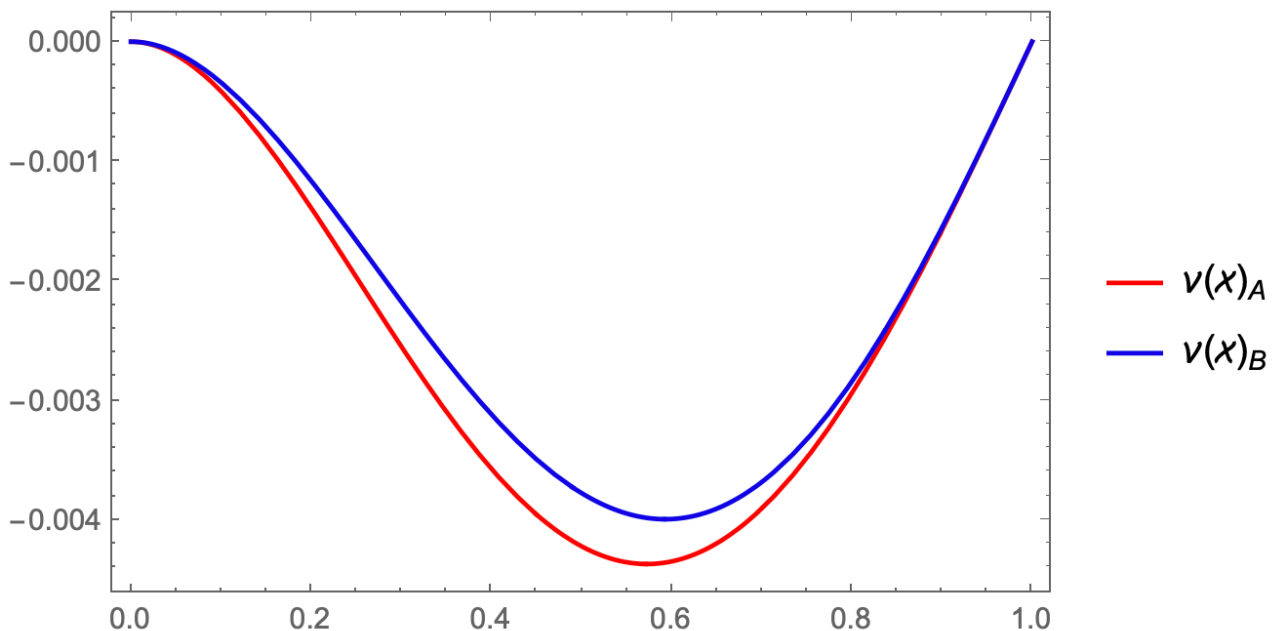
$$v(x) = \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3x + C_4 + \frac{p_0}{EJ\alpha^4} \sin(\alpha x)$$

Imponendo le condizioni (i)-(iv), si ottengono i seguenti valori per le costanti di integrazione

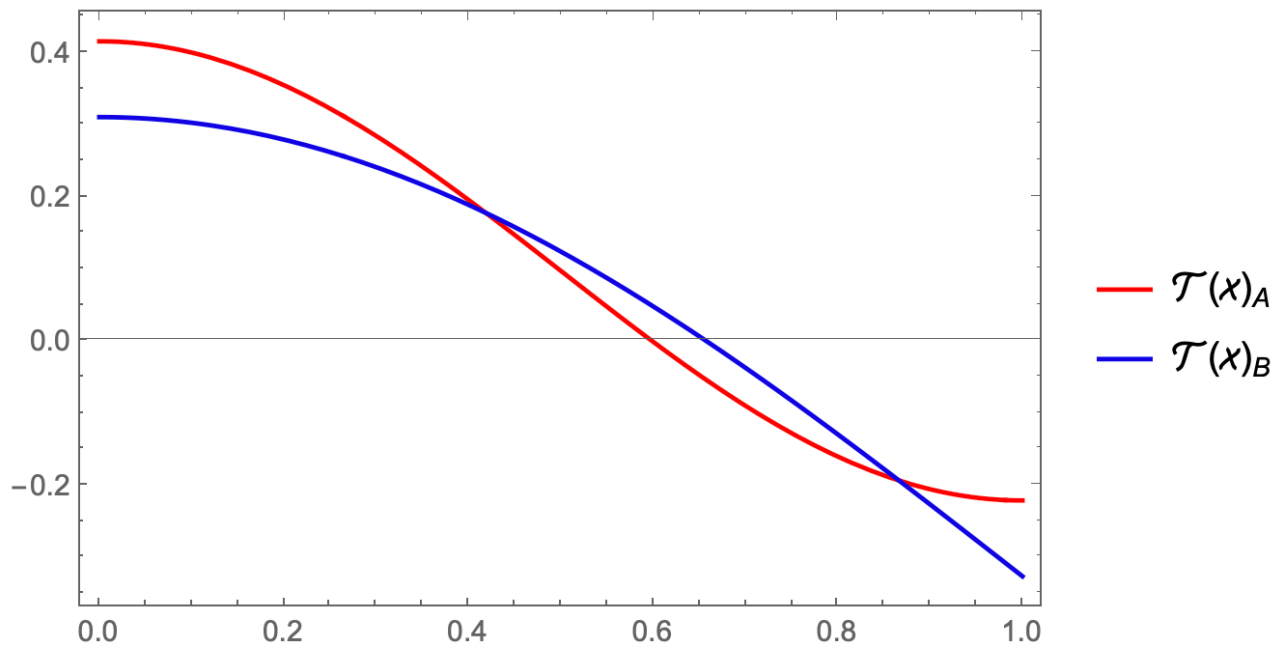
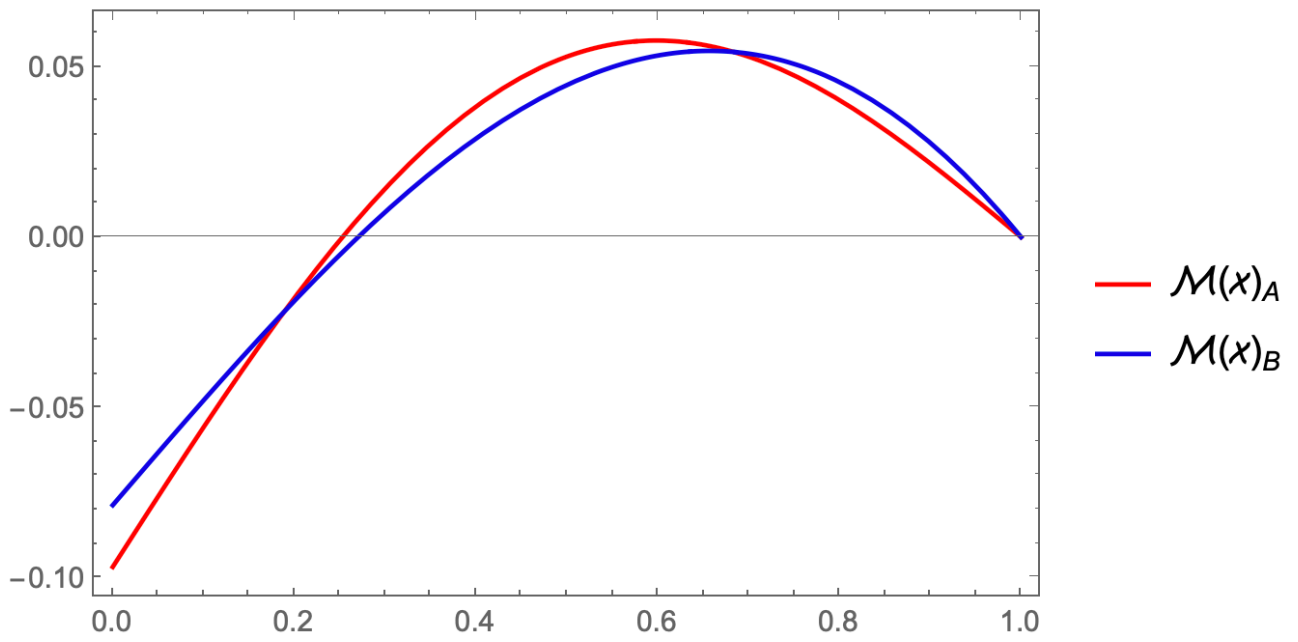
$$(A) C_1 = -\frac{3Lp_0}{EJ\pi^3}, C_2 = \frac{3L^2p_0}{EJ\pi^3}, C_3 = -\frac{L^3p_0}{EJ\pi^3}, C_4 = 0$$

$$(B) C_1 = \frac{24L(2 - \pi + \pi^4/4)p_0}{EJ\pi^4}, C_2 = -\frac{8L^2(6 - 3\pi + \pi^2/4)p_0}{EJ\pi^4}, C_3 = -\frac{8L^3p_0}{EJ\pi^3}, C_4 = 0$$

La deformata risulta, quindi, completamente determinata dalle costanti trovate e il suo plot è



Mentre i plot di momento e di taglio risultano essere



2 Per la piastra dell'esercizio si devono innanzitutto considerare le condizioni che permettono di avere deformata e momento non divergenti al centro (in $r = 0$). Tali condizioni possono essere formalizzate come segue

$$\lim_{r \rightarrow 0} w(r) = l, \quad \lim_{r \rightarrow 0} M_r(r) = l$$

dove l è un valore finito. Queste condizioni implicano che le costanti A_1 e A_3 siano nulle. Per determinare le altre due costanti, si impone la condizione di bordo appoggiato

- i. $w(r = R) = 0$;
- ii. $M_r(r = R) = 0$.

Si ottengono i seguenti valori per le costanti

$$A_2 = -\frac{3R^2 p_0 + R^2 \nu p_0}{32D(1 + \nu)}, \quad A_4 = -\frac{-5R^4 p_0 - R^4 \nu p_0}{64D(1 + \nu)}$$

Per mezzo delle quali si può scrivere l'equazione della superficie deformata.