Modulo 7

Teoria classica delle opzioni

Definizioni generali

- Un **derivato** è un prodotto finanziario il cui valore dipende dal valore di un altro prodotto (chiamato **sottostante**). Esamineremo il caso di **opzioni** su azioni (ossia il sottostante è costituito da titoli azionari rischiosi).
- Definiamo un'opzione di tipo **call** (**put**) come un contratto finanziario che consente, dietro pagamento di un **premio** C, di acquistare (vendere) un titolo azionario predefinito (il nostro sottostante) a un prezzo predeterminato K (**strike price** o **prezzo d'esercizio**) a una **scadenza** T prefissata.
- Il sottostante, il prezzo d'esercizio e la scadenza fanno parte del contratto stesso.

Il pay-off

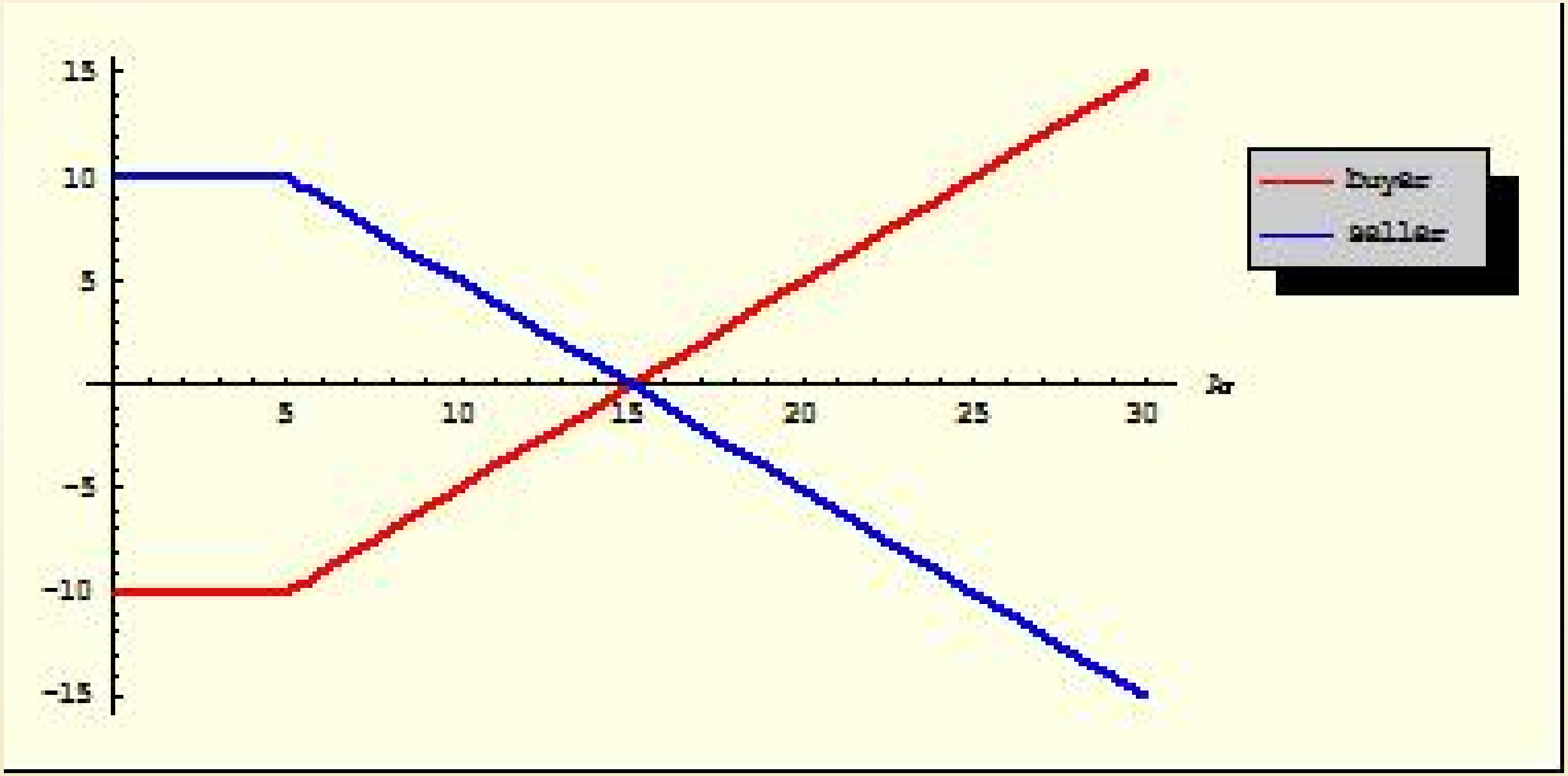
- Opzione di tipo **europeo** se il diritto può essere esercitato solo alla scadenza *T*, oppure di tipo **americano** se il diritto può essere esercitato anche entro la scadenza *T*.
- L'acquirente della call eserciterà il suo diritto solo se il valore a scadenza dell'azione A_T sarà maggiore rispetto allo strike price *K* (**rialzista**). In caso di esercizio, il profitto lordo a scadenza (**pay-off**) sarà uguale alla differenza positiva $A_T - K$, diversamente questa differenza vale zero.
- Si ha:

$$C_T = \text{Max}(A_T - K; 0)$$

- Il compratore della call ("**buyer**") ha potenzialità di guadagno molto elevato, la perdita è limitata.

Il pay-off

- Profitto netto: $C_T - C$. Esempio con $C = 10$ e $K = 5$.



Il pay-off

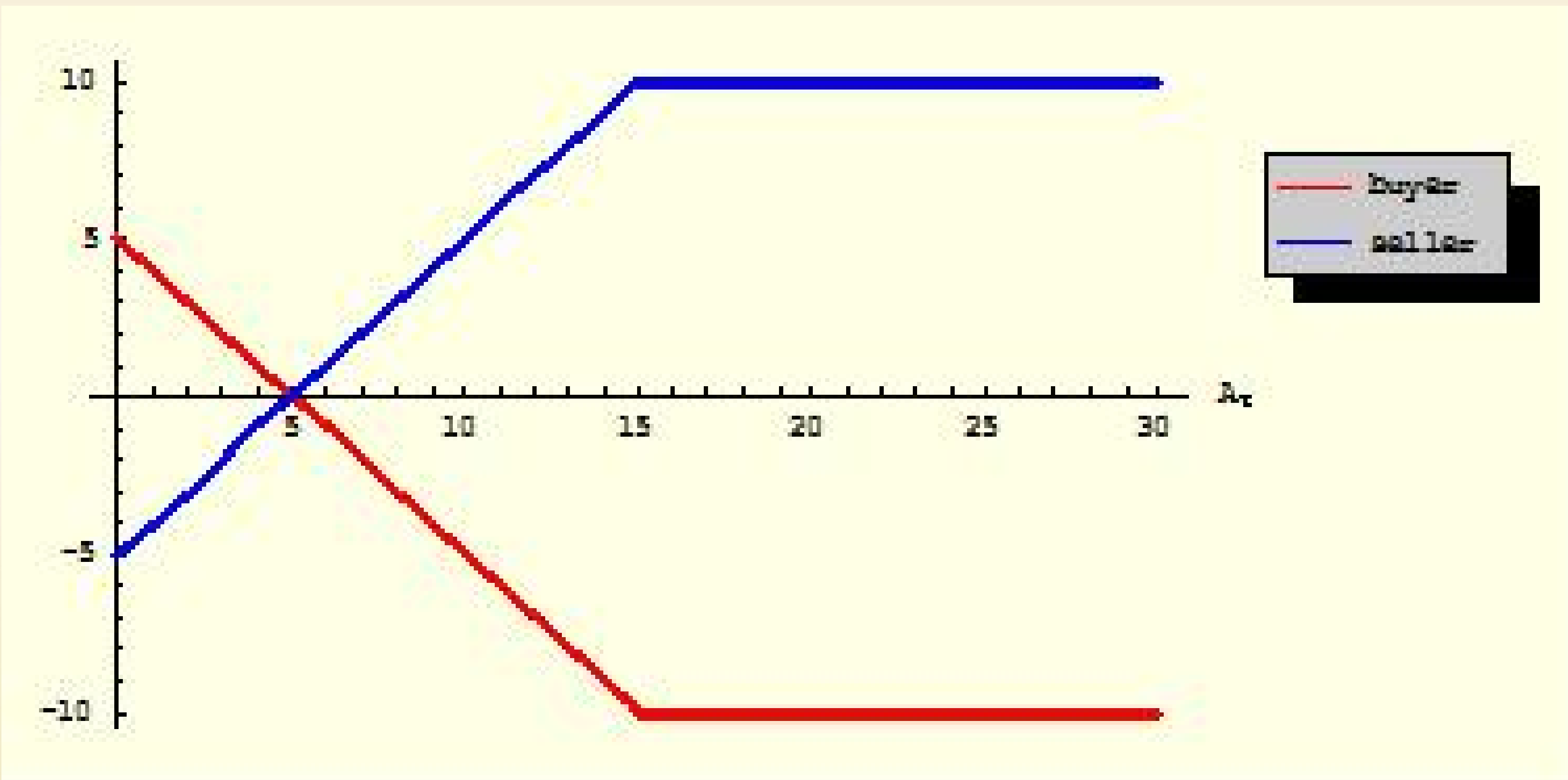
- L'acquirente della put eserciterà il suo diritto solo se il valore a scadenza dell'azione A_T sarà minore rispetto allo strike price *K* (**ribassista**). In caso di esercizio, il profitto lordo a scadenza (**pay-off**) sarà uguale alla differenza positiva $K - A_T$, diversamente questa differenza vale zero.
- Si ha:

$$P_T = \mathrm{Max}(K - A_T; 0)$$

- Il seller guadagna al massimo il prezzo pagato dal compratore. Per quanto riguarda il buyer, la perdita massima è il prezzo pagato ma ci sono notevoli possibilità di guadagno.

Il pay-off

- Profitto netto: $P_T - P$. Esempio con $P = 10$ e $K = 15$.



Esempio

- Sia un'opzione call a tre mesi sul titolo *alpha* con $A_0 = 4{,}9$ euro e $K = 5$ euro. Se il valore a scadenza dell'azione è $A_T = 6$, il pay-off vale

  $C_T = \mathrm{Max}(6 - 5; 0) = 1.$

  In questo caso l'esercizio dell'opzione conviene. Se il valore a scadenza dell'azione è $A_T = 4{,}5$ il pay-off vale $C_T = \mathrm{Max}(4{,}5 - 5; 0) = 0.$
  In questo caso l'esercizio dell'opzione non conviene.

Esempio

- Sia un'opzione put a un mese sul titolo *beta* con $A_0 = 3$ euro e $K = 3{,}5$ euro. Se il valore a scadenza dell'azione è $A_T = 2$, il pay-off vale

  $P_T = \text{Max}(3{,}5 - 2; 0) = 1{,}5.$

  In questo caso l'esercizio dell'opzione conviene. Se il valore a scadenza dell'azione è $A_T = 4$ il pay-off vale $P_T = \text{Max}(3{,}5 - 4; 0) = 0.$
  In questo caso l'esercizio dell'opzione non conviene.

Portfolio insurance

- Sia un portafoglio costituito da un’azione e un'opzione put che ha per sottostante quell'azione. Valore a scadenza:

$$V_T = A_T + \mathrm{Max}(K - A_T; 0)$$

- Esaminiamo le seguenti possibilità:

$$A_T \geq K \Rightarrow V_T = A_T + 0 = A_T$$
$$A_T < K \Rightarrow V_T = A_T + K - A_T = K$$

→ il valore a scadenza del nostro portafoglio non scende mai al di sotto dello strike price *K*. Abbiamo costruito in questo modo uno strumento di copertura del rischio chiamato **portfolio insurance**.

Relazione di parità

- Sia un portafoglio costituito da un’azione, un'opzione put e un’opzione call (con quota -1) che hanno per sottostante quell'azione. Valore a scadenza:

$$V_T = A_T + \mathrm{Max}(K - A_T; 0) - \mathrm{Max}(A_T - K; 0)$$

- Esaminiamo le seguenti possibilità:

$$A_T \geq K \Rightarrow V_T = A_T + 0 - A_T + K = K$$
$$A_T < K \Rightarrow V_T = A_T + K - A_T - 0 = K$$

→ Il valore a scadenza è sempre *K* (portafoglio non rischioso). Per evitare opportunità di arbitraggio, il valore attuale del portafoglio dovrà essere uguale al valore attuale di *K* al tasso risk free.

Relazione di parità

- Avremo perciò:

$$A + P - C = \frac{K}{r_f}$$

→ **relazione di parità call-put**.

- Possiamo dedurre il prezzo della put *P* da quello della call *C* (e viceversa).

Pricing

- Obiettivo della teoria delle opzioni: determinare il prezzo del contratto.
- Per questo, dovremo stabilire la dinamica del prezzo del sottostante.
- Vedremo a tal proposito due modelli di valutazione delle opzioni:

- modello discreto (**Cox-Ross-Rubinstein**)
- modello continuo (**Black&Scholes**)

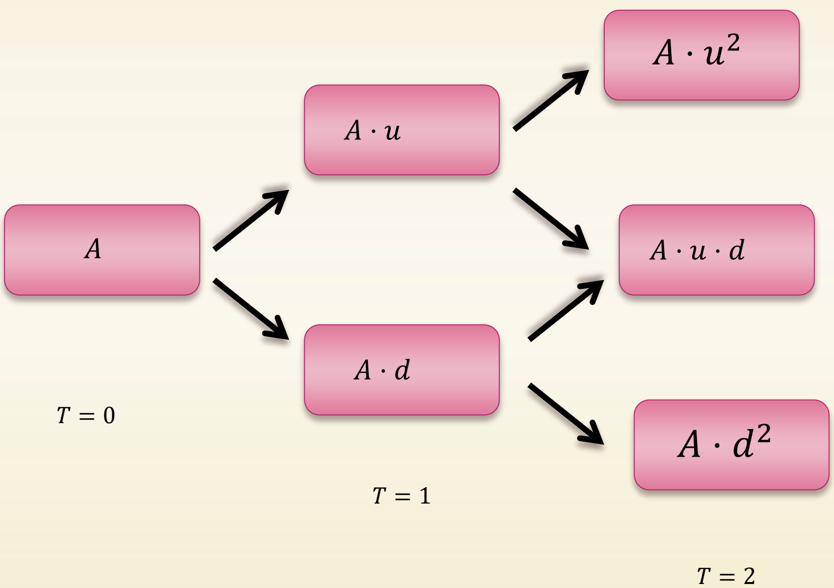
Valutazione delle opzioni: modello Cox-Ross-Rubinstein

Ipotesi del modello

- Il modello di pricing più semplice, chiamato **modello binomiale** di **Cox-Ross-Rubinstein** (modello "*CRR*", 1979) ipotizza che in un singolo periodo il corso azionario con prezzo iniziale *A* possa avere solamente due movimenti: a rialzo ($A_T = A \cdot u$ con il fattore di rialzo $u > 1$), o a ribasso ($A_T = A \cdot d$ con il fattore di ribasso $d < 1$).
- Dopo due periodi potremo avere due rialzi, due ribassi oppure un rialzo e un ribasso (o viceversa).
- Dopo *n* periodi potremo avere *n+1* possibili valori a scadenza per il sottostante.

Albero binomiale

- Evoluzione del sottostante:



Pay-off

- A ogni possibile valore del sottostante potremo associare un pay-off.
- Per l'opzione call avremo dopo un periodo:

$$C_u = \text{Max}(A \cdot u - K; 0)$$
$$C_d = \text{Max}(A \cdot d - K; 0)$$

- Dopo due periodi avremo tre possibili payoff:

$$C_{uu} = \text{Max}\left(A \cdot u^2 - K; 0\right)$$
$$C_{dd} = \text{Max}\left(A \cdot d^2 - K; 0\right)$$
$$C_{ud} = \text{Max}(A \cdot u \cdot d - K; 0).$$

- Dopo *n* periodi avremo *n+1* pay-off.

Portafoglio replicante

- Sia un titolo risk free che rende il tasso *i*, con scadenzario $(1; 1+i)/(0; T)$

- Costruiamo un portafoglio Π costituito da una quota *a* di titoli azionari e da una quota *b* di titoli risk free.

→ Imponiamo che il valore del portafoglio alla scadenza *T* abbia lo stesso valore di un'opzione call (scritta sullo stesso titolo azionario) in caso di rialzo e ribasso:

$$\begin{cases} a \cdot A \cdot u + b \cdot (1+i) = C_u \\ a \cdot A \cdot d + b \cdot (1+i) = C_d \end{cases}$$

- Un portafoglio con questa proprietà è chiamato **portafoglio replicante**.

Portafoglio replicante

- Le soluzioni del sistema sono:

$$a = \frac{C_u - C_d}{A \cdot (u - d)} \qquad b = \frac{u \cdot C_d - d \cdot C_u}{(1 + i) \cdot (u - d)}$$

- Per la legge dell’unico prezzo, il prezzo dell’opzione dovrà coincidere con quello del portafoglio:

$$C = a \cdot A + b \cdot 1 = \frac{C_u - C_d}{A \cdot (u - d)} \cdot A + \frac{u \cdot C_d - d \cdot C_u}{(1 + i) \cdot (u - d)} =$$

$$= \frac{(C_u - C_d) \cdot (1 + i) + u \cdot C_d - d \cdot C_u}{(1 + i) \cdot (u - d)}$$

Pricing

- Poniamo: $\pi = \dfrac{1+i-d}{u-d}$

- La formula precedente si può riscrivere:

$$C = \frac{\pi \cdot C_u + (1-\pi) \cdot C_d}{1+i}$$

→ il prezzo dell'opzione è la media ponderata dei pay-off, attualizzata al tasso risk free.

- Stesso procedimento per la put (adattando i pay-off).
- Il coefficiente π è compreso tra zero e uno, perciò lo possiamo interpretare come una probabilità.

Probabilità risk-neutral

- Dalla definizione di π si deduce:

$$u \cdot \pi + d \cdot (1 - \pi) = 1 + i$$

→ π è tale da rendere il valore atteso del rendimento azionario (il primo membro) pari al tasso risk free (il secondo membro).

Esempio

- Determinare il prezzo di un'opzione call nel caso uniperiodale con i dati seguenti: *A = 80*, *K = 79,5*, *i = 10%*, *u = 1,20* e *d = 0,90*.
- Determiniamo i pay-off:

$$C_u = \text{Max}(80 \cdot 1{,}20 - 79{,}5; 0) = 16{,}5$$
$$C_d = \text{Max}(80 \cdot 0{,}90 - 79{,}5; 0) = 0$$

→ l'esercizio dell'opzione è conveniente solo in caso di rialzo.

- Probabilità risk neutral:

$$\pi = \frac{1 + 0{,}10 - 0{,}90}{1{,}20 - 0{,}90} = 0{,}6667$$

Esempio

- Avremo perciò:

$$C = \frac{0{,}66 \cdot 16{,}5 + 0}{1{,}10} = 10$$

- Quote del portafoglio replicante:

$$a = \frac{C_u - C_d}{A \cdot (u - d)} = \frac{16{,}5 - 0}{80 \cdot 0{,}30} = 0{,}6875$$
$$b = \frac{u \cdot C_d - d \cdot C_u}{(1 + i) \cdot (u - d)} = \frac{0 - 0{,}90 \cdot 16{,}5}{1{,}10 \cdot 0{,}30} = -45$$

- Prezzo dell'opzione (formula equivalente):

$$C = 0{,}6875 \cdot 80 - 45 = 10$$

Caso multiperiodale

- Caso biperiodale: tre possibili valori a scadenza del corso azionario.
  - π^2 probabilità di un doppio rialzo;
  - $(1-\pi)^2$ probabilità di un doppio ribasso;
  - $2\pi \cdot (1-\pi)$ probabilità di rialzo/ribasso.
- Prezzo dell'opzione call:

$$C = \frac{\pi^2 \cdot C_{uu} + 2\pi \cdot (1-\pi) \cdot C_{ud} + (1-\pi)^2 \cdot C_{dd}}{(1+i)^2}$$

- Opzione call "**in the money**" se il corso azionario è superiore allo strike (possibilità di guadagnare); "**out of the money**" se il corso azionario è inferiore allo strike (non è conveniente); "**at the money**" se sono identici corso azionario e strike. Caso della put: le definizioni “in the money” e “out of the money” sono invertite.

Caso multiperiodale

- Dopo *n* periodi, il valore del sottostante è $A_n = A \cdot u^h \cdot d^{n-h}$ con *h* rialzi e *n-h* ribassi ($0 \leq h \leq n$).

- Possibili pay-off a scadenza:

$$C_h = \mathrm{Max}\left(A \cdot u^h \cdot d^{n-h} - K; 0\right)$$
$$P_h = \mathrm{Max}\left(K - A \cdot u^h \cdot d^{n-h}; 0\right)$$

- Possibili traiettorie che collegano il nodo di partenza con il generico nodo finale (con *h* rialzi e *n-h* ribassi) sono pari al numero di combinazioni di *h* oggetti in un insieme di *n*, ossia il **coefficiente binomiale**:

$$\binom{n}{h} = \frac{n!}{h!\,(n-h)!}$$

Caso multiperiodale

- Numero di traiettorie dopo 6 periodi:

1
1, 1
1, 2, 1
1, 3, 3, 1
1, 4, 6, 4, 1
1, 5, 10, 10, 5, 1
1, 6, 15, 20, 15, 6, 1

Caso multiperiodale

- Probabilità di ottenere *h* rialzi e *n-h* ribassi pari a

$$\pi^h \cdot (1-\pi)^{n-h}$$

- Valore dell'opzione dato dal valore atteso dei payoff, attualizzato per *n* periodi al tasso risk free (generalizzazione del caso biperiodale):

$$C = \frac{\sum_{h=0}^{n} \mathrm{Max}\left(A \cdot u^h \cdot d^{n-h} - K; 0\right) \cdot \binom{n}{h} \cdot \pi^h \cdot (1-\pi)^{n-h}}{(1+i)^n}$$

$$P = \frac{\sum_{h=0}^{n} \mathrm{Max}\left(K - A \cdot u^h \cdot d^{n-h}; 0\right) \cdot \binom{n}{h} \cdot \pi^h \cdot (1-\pi)^{n-h}}{(1+i)^n}$$

INTEREST RATE SWAP

Introduzione

Sono considerati "**derivati**" quei contratti che insistono su elementi di altri schemi negoziali (quali valute, tassi di interessi, tassi di cambio, indici di borsa) e il cui valore economico deriva dal valore del titolo sottostante o degli altri elementi di riferimento.

(Banca d'Italia Circolare 29 marzo 1988, n. 4; Circolare 21 aprile 1999, n. 299)

I derivati si possono suddividere in:

- *Financial derivatives*: derivati relativi ad entità finanziarie (valuta, tasso di interesse, indice finanziario);
- *Commodities derivatives:* derivati su merci o materie prime (metallo prezioso);
- *Credit derivatives:* derivati tradizionali che coprono il rischio di credito (Das 1998, 9).

Introduzione

Per "**strumenti finanziari**" si intendono:

- contratti *futures* su strumenti finanziari, tassi d'interesse, valute, mercati e relativi indici, anche quando l'esecuzione avvenga attraverso il pagamento di differenziali in contanti;
- contratti di scambio a pronti e a termine (*swaps*) su tassi di interesse, valute, merci, mercati e relativi indici, anche quando l'esecuzione avvenga attraverso il pagamento di differenziali in contanti;
- contratti a termine collegati a strumenti finanziari, tassi d'interesse, valute, merci e relativi indici … ;
- contratti di opzione per acquistare o vendere strumenti indicati sopra e relativi indici, nonché contratti di opzione su valute, tassi, merci e relativi indici;
- combinazioni di contratti o indici.

(Art. 1, 2° comma, *f)*, *g)*, *h)*, *i)*, *j)* TUF)

Introduzione

FUNZIONE: possibilità di negoziare i rischi connessi alle fluttuazioni delle variabili di mercato - c.d. rischi finanziari - (riducendoli o addirittura amplificandoli) separatamente dall'operazione che li ha originati.

- **Funzione di copertura** (*hedging*): copertura verso un evento futuro e incerto, quale la fluttuazione di valore di un bene. E' modello di tutela finanziaria che richiama quello assicurativo. (Es: Previsione di rialzo del titolo X (oggi 100) in 3 mesi: contratto *future, i.e.* acquisto di X al prezzo di 100 da eseguirsi a 3m)

- **Funzione speculativa** (*trading*): sulla base di previsioni circa l'andamento di variabili finanziarie rilevanti, si pone in essere un derivato con il solo scopo di ottenere profitti a breve. (Es: Se a 3m il titolo quota 120, l'operatore, che ha pagato 100, lo vende a pronti e lucra la differenza di 20)

Interest Rate Swap

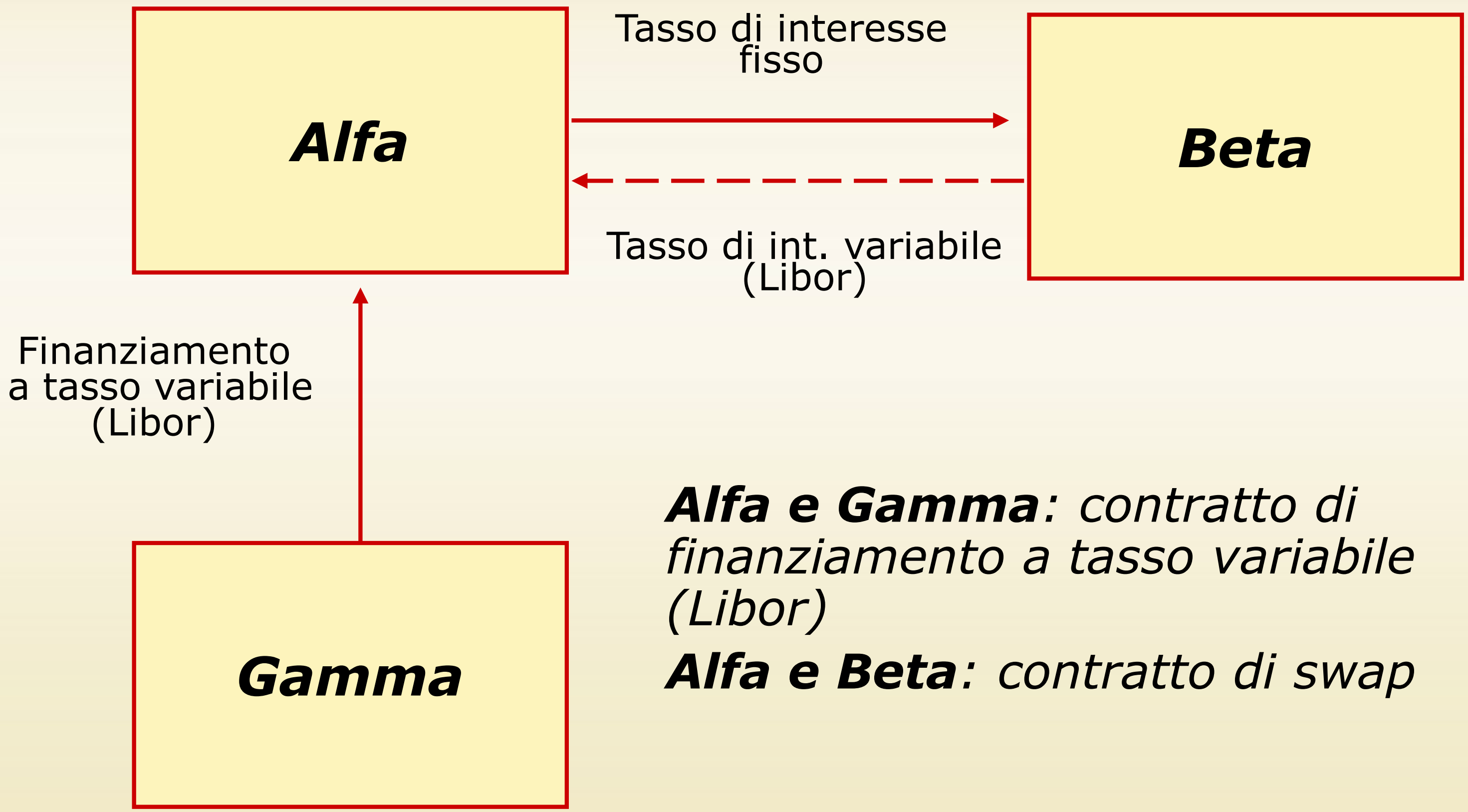
Definizione

L'IRS è un accordo contrattuale tra sue soggetti che si impegnano a scambiarsi un importo monetario avente natura di interesse per un certo numero di periodi. Tale importo è pari alla differenza esistente, alle date prestabilite, tra l'interesse prodotto da un tasso variabile e un tasso fisso concordato, entrambi riferiti ad un capitale nozionale o teorico.

Finalità

L'IRS può essere utilizzato per trasformare una passività a tasso variabile in una passività a tasso fisso. In questo modo l'impresa si copre dal rischio di un aumento dei tassi d'interesse. Perde tuttavia la possibilità di beneficiare di un'eventuale loro riduzione.

Interest Rate Swap



***Alfa e Gamma**: contratto di finanziamento a tasso variabile (Libor)*

***Alfa e Beta**: contratto di swap*

Interest Rate Swap

Gli elementi del contratto IRS sono:

- **tasso fisso** o **tasso IRS** rappresenta il prezzo dello swap;
- **capitale nozionale**: capitale teorico sul quale calcolare i flussi di interesse oggetto dello scambio;
- **tasso variabile** di riferimento;
- **fixing date**: data di rilevazione del tasso di riferimento;
- **periodicità** degli scambi di flussi di interessi;
- **maturity date**: data di scadenza del contratto;
- **importo da scambiare** detto **differenziale** è determinato da:

$$\Delta_s = (TV - TF) \cdot N \cdot \left(\frac{gg}{360}\right)$$

Interest Rate Swap

Tasso variabile di riferimento → Libor

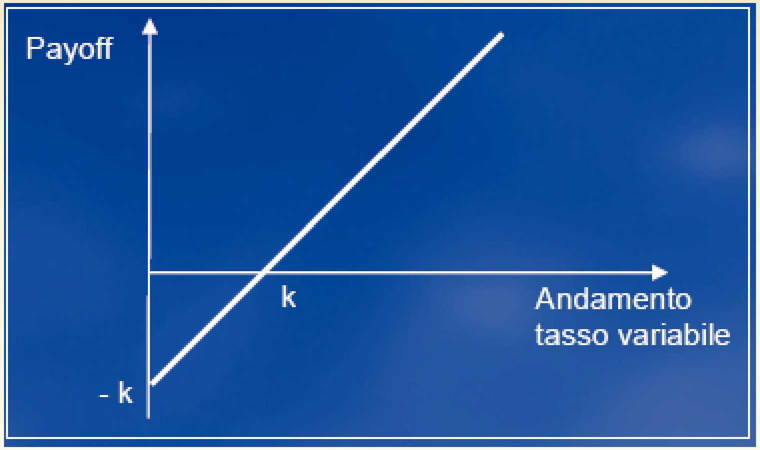
Libor: tasso di riferimento europeo al quale le banche si prestano denaro tra loro, spesso durante la notte (in batch notturno), dopo la chiusura dei mercati. Esso è maggiore del tasso di sconto che gli istituti di credito pagano per un prestito alla banca centrale.

Esistono tre tipi di Interest Rate Swap:

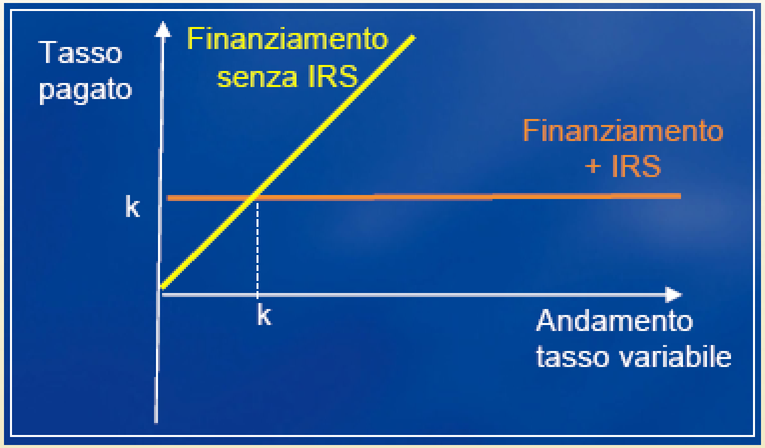
- ***Coupon swap***: contratto con il quale due parti si scambiano un flusso di interessi a tasso fisso ed uno a tasso variabile nella solita valuta (floating-to-fixed swap);
- ***Basis swap***: contratto con il quale due parti si scambiano flussi di interessi entrambi a tasso variabile nella solita valuta (floating-to-floating swap);
- ***Cross-currency interest rate swap***: contratto con il quale due parti si scambiano due flussi di interessi denominati in due diverse valute (fixed-to-fixed swap).

Interest Rate Swap

Payoff derivante dall'acquisto di un IRS a tasso fisso (k). Il contratto prevede il pagamento di un tasso fisso in cambio di un tasso variabile. La sottoscrizione risulterà conveniente nell'ipotesi in cui il tasso variabile sia superiore al tasso fisso concordato



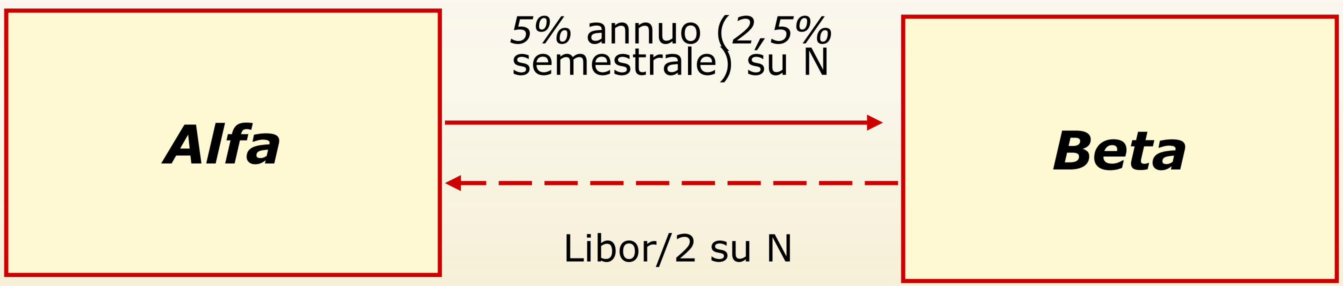
Effetto combinato dei flussi derivanti da un indebitamento a tasso variabile e dall'acquisto di un IRS a tasso fisso comparato al flusso derivante dal finanziamento a tasso variabile senza copertura



Interest Rate Swap

Esempio

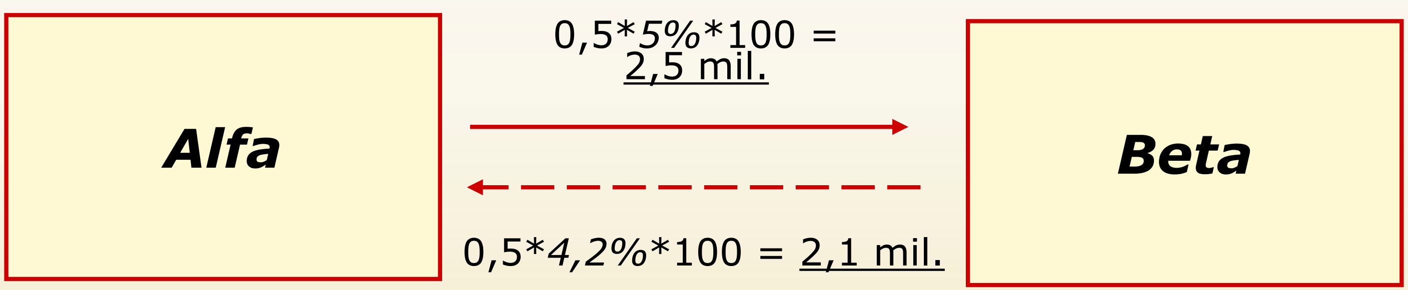
Si consideri uno swap a 3 anni stipulato il 1° marzo 2006 in cui la società Alfa si impegna a pagare alla società Beta un tasso fisso del *5%* annuo su un nozionale di 100 milioni di euro e in cambio la società Beta si impegna a pagare alla società Alfa il Libor a 6 mesi sullo stesso nozionale.



Interest Rate Swap

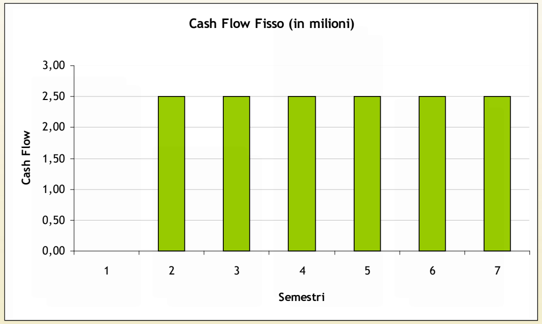
Il primo scambio avviene il 1° settembre 2006.

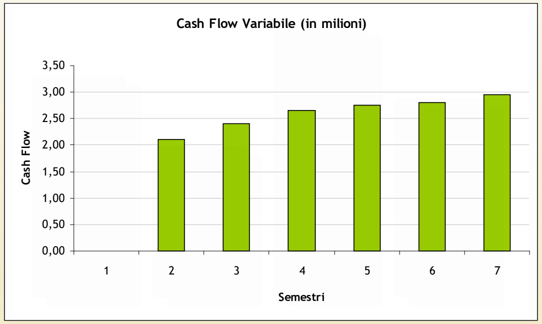
- Tasso fisso annuo *5%.*
- Libor a 6 mesi *4,2%* (osservato tra 1° marzo 2006 e 1° settembre 2006).

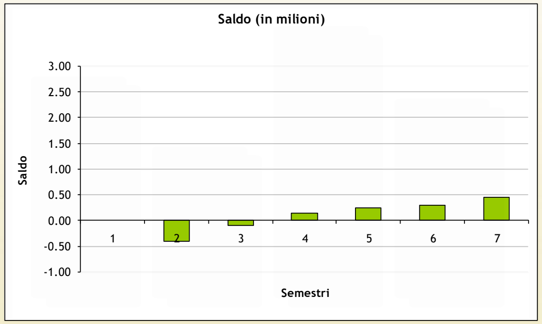


Interest Rate Swap

Data	Libor a 6 mesi	Tasso Fisso	Cash Flow Variabile (in milioni)	Cash Flow Fisso (in milioni)	Saldo (in milioni)
01/03/06	4,20%	5,00%	0,00	0,00	0,00
01/09/06	4,80%	5,00%	2,10	2,50	-0,40
01/03/07	5,30%	5,00%	2,40	2,50	-0,10
01/09/07	5,50%	5,00%	2,65	2,50	0,15
01/03/08	5,60%	5,00%	2,75	2,50	0,25
01/09/08	5,90%	5,00%	2,80	2,50	0,30
01/03/09	6,40%	5,00%	2,95	2,50	0,45







Interest Rate Swap

Conversione di una passività a tasso fisso in una a tasso variabile e viceversa.

Supponiamo che la società Beta si finanzia per 100 milioni di euro al Libor + 80 bp e stipula uno swap con Alfa per convertire la propria passività in un prestito a tasso fisso (*5%*). Dopo aver stipulato lo swap la società Beta ha tre insiemi di pagamenti per interessi:

- paga il Libor + 80 bp ai finanziatori esterni;
- riceve il Libor in base alle condizioni fissate dallo swap;
- paga il *5%* annuo in base alle condizioni fissate nello swap.

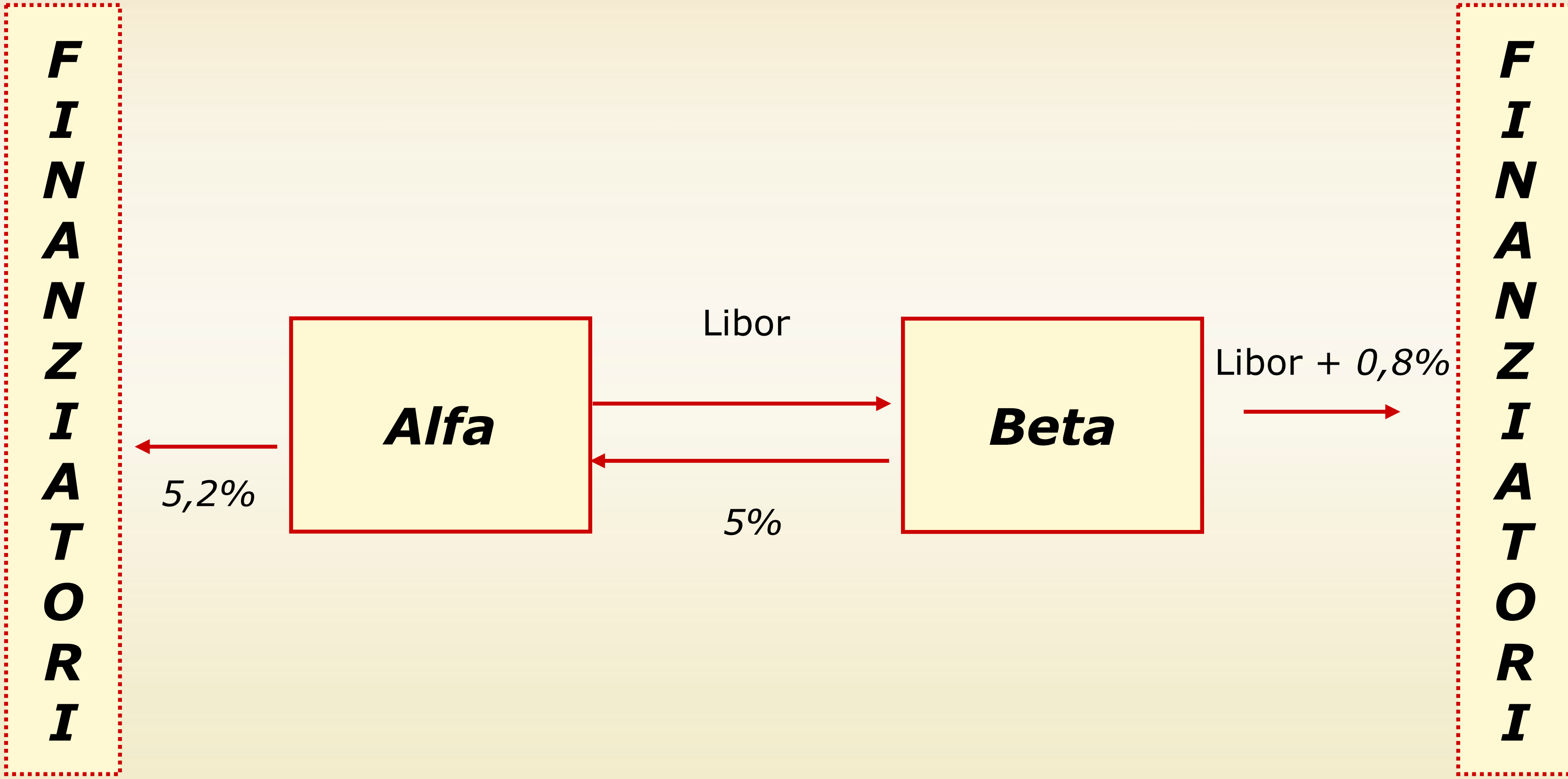
L’effetto finale è che la società Beta paga un tasso fisso del *5,8%* annuo.

Supponiamo che la società Alfa si finanzia per 100 milioni di euro ad un tasso fisso del *5,2%* e stipula uno swap con Beta per convertire la passività a tasso fisso in una a tasso variabile. Dopo aver stipulato lo swap la società Beta ha tre insiemi di pagamenti per interessi:

- paga il *5,2%* ai finanziatori esterni;
- paga il Libor in base alle condizioni fissate nello swap;
- riceve il *5%* annuo in base alle condizioni fissate nello swap.

L’effetto finale è che la società Alfa paga il Libor + *0,2%.*

Interest Rate Swap



Interest Rate Swap

Supponiamo che la società Beta abbia un portafoglio di obbligazioni a tre anni, con valore nominale pari a 100 milioni di euro e un tasso di rendimento pari al *4,7%* annuo. Dopo aver stipulato uno swap con la società Alfa la società Beta avrà tre insiemi di pagamenti per interessi:

- riceve il *4,7%* annuo sulle obbligazioni;
- riceve il Libor in base alle condizioni fissate dallo swap;
- paga il *5%* annuo in base alle condizioni fissate nello swap.

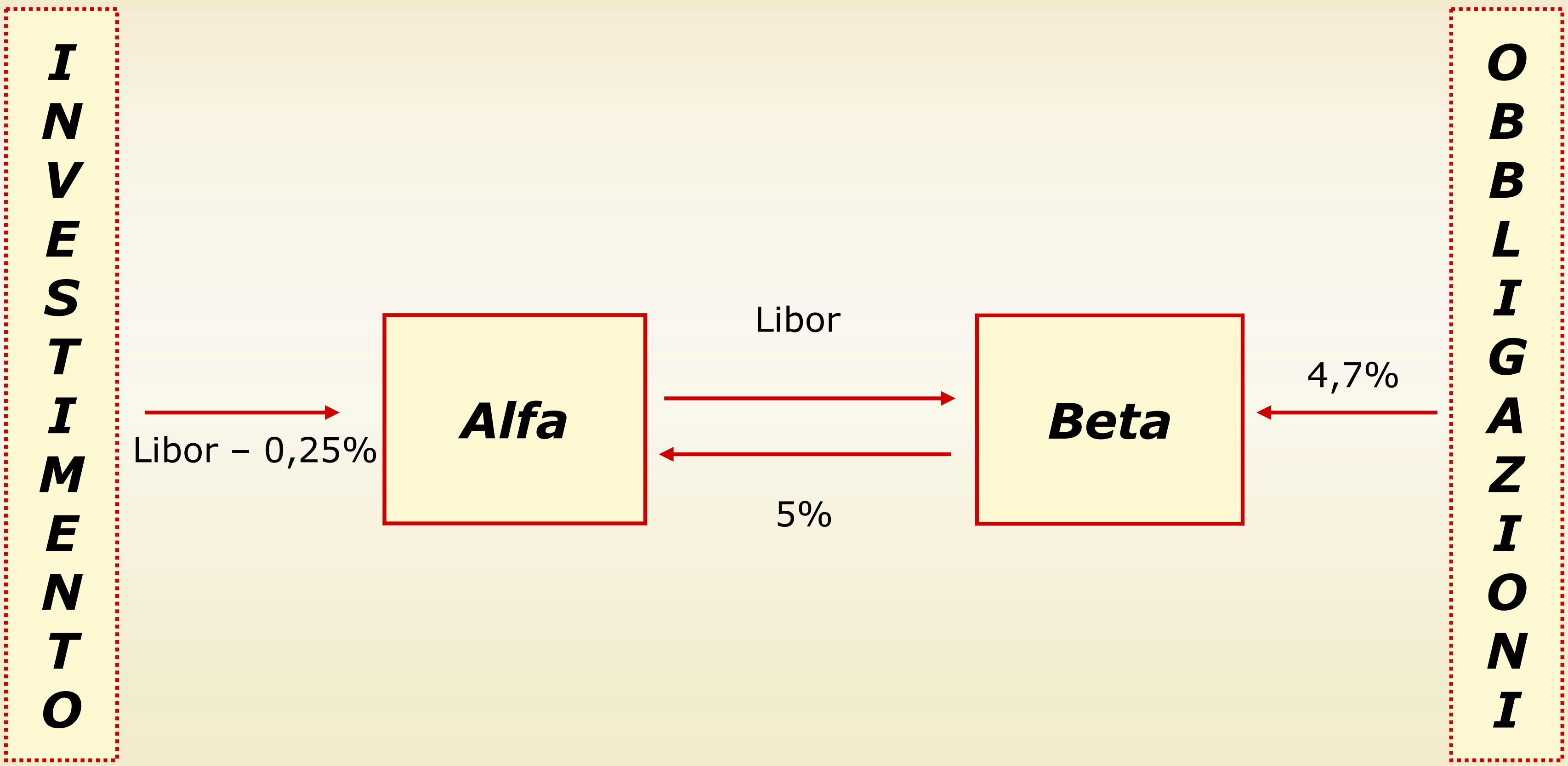
L'effetto finale è che la società Beta riceve il Libor – *0,3%*.

Supponiamo che la società Alfa abbia effettuato un investimento che rende il Libor – *0,25%* e che stipuli uno swap con Beta. Dopo aver stipulato lo swap la società Alfa avrà tre insiemi di pagamenti per interessi:

- riceve il Libor – *0,25%*;
- paga il Libor in base alle condizioni fissate nello swap;
- riceve il *5%* annuo in base alle condizioni fissate nello swap.

L'effetto finale è che la società Alfa riceve un tasso fisso del *4,75%*.

Interest Rate Swap



Interest Rate Swap

- Il ruolo dell’intermediario.

- Solitamente due società non finanziarie non entrano in contatto tra loro direttamente per stipulare uno swap, ma si avvalgono di un intermediario finanziario.

- Generalmente gli swap fisso per variabile su tassi di interesse sono strutturati in maniera tale che l’istituzione finanziaria guadagni circa 3 bp per ogni coppia di swap di segno opposto

Interest Rate Swap

Swap per trasformare passività con intermediario

Swap per trasformare attività con intermediario

ESERCIZI

Esercizio 1

- Valutare mediante il modello CRR una opzione put che scade tra un anno essendo l’evoluzione del prezzo del sottostante guidata da un processo binomiale moltiplicativo caratterizzato dai parametri $u = 1,2$ e $d = 0,9$ nell’ipotesi in cui il prezzo di esercizio è pari a 100, il corso azionario all’epoca iniziale è 101 ed il tasso risk free annuo è il 5,5%.
- Calcolare le quote di composizione del portafoglio replicante.

- I dati sono: *A=101*; *K=100*; *u=1,2*; *d=0,9*; *i=0,055*.
- Calcolo dei payoff:

$$P_u = Max(K - A \cdot u; 0) = Max(100 - 101 \cdot 1{,}2; 0) =$$
$$= Max(-21{,}2; 0) = 0$$
$$P_d = Max(K - A \cdot d; 0) = Max(100 - 101 \cdot 0{,}9; 0) =$$
$$= Max(9{,}1; 0) = 9{,}1$$

- Portafoglio "replicante" risk free (fornisce stesso risultato dell'opzione nei due casi di rialzo e ribasso) → portafoglio misto con quote di composizione *a* (quota azionaria) e *b* (quota ZCB).
- Le quote si ottengono dal sistema:

$$\begin{cases} A \cdot u \cdot a + (1+i) \cdot b = P_u \\ A \cdot d \cdot a + (1+i) \cdot b = P_d \end{cases}$$

- Le cui soluzioni sono:

$$a = \frac{P_u - P_d}{A \cdot (u - d)} = \frac{-9{,}1}{101 \cdot 0{,}3} = \boxed{-0{,}30033}$$

$$b = \frac{u \cdot P_d - d \cdot P_u}{(1 + i) \cdot (u - d)} = \frac{1{,}2 \cdot 9{,}1}{1{,}055 \cdot 0{,}3} = \boxed{34{,}50237}$$

- Prezzo del portafoglio:

$$P = a \cdot A + b = -0{,}30033 \cdot 101 + 34{,}50237 = \boxed{4{,}169036}$$

- Osservazione. Formula alternativa per trovare il prezzo:

$$P = \frac{\pi \cdot P_u + (1 - \pi) \cdot P_d}{1 + i}$$

dove

$$\pi = \frac{1 + i - d}{u - d}$$

Esercizio 2

Valutare, mediante il modello binomiale di CRR, una opzione call dotata delle seguenti caratteristiche:

- prezzo corrente del sottostante pari a 10;
- strike price pari a 9,5;
- tasso risk free pari a 0,05;
- fattore binomiale moltiplicativo *u* pari 1,1;
- fattore binomiale moltiplicativo *d* pari 0,9;
- durata uniperiodale.

Calcolare, inoltre, le quote di composizione *a* e *b* del portafoglio replicante.

$C_u = Max(A \cdot u - K; 0) = Max(10 \cdot 1,1 - 9,5; 0) =$
$= Max(-21,2; 0) = 0$
$C_d = Max(A \cdot d - K; 0) = Max(100 - 101 \cdot 0,9; 0) =$
$= Max(9,1; 0) = 9,1$

- I dati sono: *A=10*; *K=9,5*; *u=1,1*; *d=0,9*; *i=0,05*.
- Calcolo dei payoff:

$$C_u = Max(A \cdot u - K; 0) = Max(10 \cdot 1,1 - 9,5; 0) =$$
$$= Max(1,5; 0) = 1,5$$
$$C_d = Max(A \cdot d - K; 0) = Max(10 \cdot 0,9 - 9,5; 0) =$$
$$= Max(-0,5; 0) = 0$$

- Portafoglio “replicante” riskfree (fornisce stesso risultato dell’opzione nei due casi di rialzo e ribasso) → portafoglio misto con quote di composizione *a* (quota azionaria) e *b* (quota ZCB).
- Le quote si ottengono dal sistema:

$$\begin{cases} A \cdot u \cdot a + (1+i) \cdot b = C_u \\ A \cdot d \cdot a + (1+i) \cdot b = C_d \end{cases}$$

- Le cui soluzioni sono:

$$a = \frac{C_u - C_d}{A \cdot (u - d)} = \frac{1,5}{10 \cdot 0,2} = \boxed{0,75}$$

$$b = \frac{u \cdot C_d - d \cdot C_u}{(1 + i) \cdot (u - d)} = \frac{-0,9 \cdot 1,5}{1,05 \cdot 0,2} = \boxed{-6,42857}$$

- Prezzo del portafoglio:

$$P = a \cdot A + b = 0,75 \cdot 10 - 6,42857 = \boxed{1,07143}$$

- Osservazione. Formula alternativa per trovare il prezzo:

$$P = \frac{\pi \cdot C_u + (1 - \pi) \cdot C_d}{1 + i}$$

dove

$$\pi = \frac{1 + i - d}{u - d}$$

Esercizio 3

Valutare, mediante il modello binomiale di CRR, una opzione put dotata delle seguenti caratteristiche:

- prezzo corrente del sottostante pari a 5;
- strike price pari a 4,5;
- tasso risk free pari a 0,05
- fattore binomiale moltiplicativo *u* pari 1,25;
- fattore binomiale moltiplicativo *d* pari 0,9;
- durata biperiodale.

- Dati: $A = 5 \quad K = 4{,}5 \quad i = 0{,}05$
  $T = 2 \quad u = 1{,}25 \quad d = 0{,}9$

- Calcolo dei pay-off:

$$P_{uu} = Max\left(K - A \cdot u^2; 0\right) = Max\left(4{,}5 - 5 \cdot 1{,}25^2; 0\right) =$$
$$= Max(-3{,}3125; 0) = 0$$
$$P_{ud} = Max(K - A \cdot u \cdot d; 0) = Max(4{,}5 - 5 \cdot 1{,}25 \cdot 0{,}9; 0) =$$
$$= Max(-1{,}125; 0) = 0$$
$$P_{dd} = Max\left(K - A \cdot d^2; 0\right) = Max\left(4{,}5 - 5 \cdot 0{,}9^2; 0\right) =$$
$$= Max(0{,}45; 0) = 0{,}45$$

- Probabilità neutralizzate:

$$\pi = \frac{1+i-d}{u-d} = \frac{1{,}05-0{,}9}{1{,}25-0{,}9} = 0{,}4286$$

- Valore dell'opzione:

$$P = \frac{\pi^2 \cdot P_{uu} + 2\pi \cdot (1-\pi) \cdot P_{ud} + (1-\pi)^2 \cdot P_{dd}}{(1+i)^2}$$

→ *P=0,1333*

- Caso dell'opzione call:

$$C_{uu} = Max(A \cdot u^2 - K; 0) = Max(5 \cdot 1{,}25^2 - 4{,}5; 0) =$$
$$= Max(3{,}3125; 0) = 3{,}3125$$
$$C_{ud} = Max(A \cdot u \cdot d - K; 0) = Max(5 \cdot 1{,}25 \cdot 0{,}9 - 4{,}5; 0) =$$
$$= Max(1{,}125; 0) = 1{,}125$$
$$C_{dd} = Max(A \cdot d^2 - K; 0) = Max(5 \cdot 0{,}9^2 - 4{,}5; 0) =$$
$$= Max(-0{,}45; 0) = 0$$
$$\rightarrow C = 1{,}0516$$

Esercizio 4

- Un intermediario finanziario possiede 100 azioni della società A e 75 della società B il cui valore unitario è rispettivamente 10 e 15 Euro.
- Per coprirsi a due anni dal rischio di mercato compra un pari numero di put sulle due tipologie di azioni; le put in oggetto hanno strike price pari al 90% del valore corrente delle azioni. Le altre ipotesi del calcolo sono le seguenti: tasso risk free pari al 5%; rialzo e ribasso dell'azione A in un periodo pari a +/- 15%; rialzo e ribasso dell'azione B in un periodo pari a +/- 10%; le due azioni si muovono solo contemporaneamente al rialzo o contemporaneamente al ribasso.

- Calcolare:
  - i possibili tassi di rendimento in tutti i casi possibili (considerando il costo della copertura);
  - il tasso di rendimento atteso (utilizzando come probabilità quelle risk neutral);
  - il valore a scadenza del portafoglio assicurato (azioni + put) in tutti i casi possibili.

- Determiniamo il valore delle opzioni put per le due tipologie di azioni.
- Per quanto riguarda la società *A*, i dati sono:

$$A_0 = 10; \quad K_A = 10 \cdot 0{,}90 = 9; \quad i = 5\%; \quad u = 1{,}15; \quad d = 0{,}85$$

- I possibili valori a scadenza dell'azione della società *A* con i relativi payoff saranno (nell'ambito del modello binomiale biperiodale):

$$A_T = \begin{cases} A_{uu} = A_0 \cdot u^2 = 13{,}225 \\ A_{ud} = A_0 \cdot u \cdot d = 9{,}775 \\ A_{dd} = A_0 \cdot d^2 = 7{,}225 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} P_{uu}^A = \text{Max}(K_A - A_{uu}; 0) = 0 \\ P_{ud}^A = \text{Max}(K_A - A_{ud}; 0) = 0 \\ P_{dd}^A = \text{Max}(K_A - A_{dd}; 0) = 1{,}775 \end{array} \right.$$

- La probabilità risk neutral vale:

$$\pi_A = \frac{1+i-d}{u-d} = \frac{1{,}05-0{,}85}{0{,}30} = 0{,}6667$$

- Il valore della put con sottostante *A* vale perciò:

$$P^A = \frac{\pi_A^2 \cdot P_{uu}^A + 2\pi_A \cdot (1-\pi_A) \cdot P_{ud}^A + (1-\pi_A)^2 \cdot P_{dd}^A}{(1+i)^2} = 0{,}1789$$

- Per quanto riguarda la società *B*, i dati sono i seguenti:

$$B_0 = 15; \quad K_B = 15 \cdot 0{,}90 = 13{,}5; \quad i = 5\%; \quad u = 1{,}10; \quad d = 0{,}90$$

- I possibili valori a scadenza dell'azione della società *B* con i relativi payoff saranno:

$$B_T = \begin{cases} B_{uu} = B_0 \cdot u^2 = 18{,}15 \\ B_{ud} = B_0 \cdot u \cdot d = 14{,}85 \\ B_{dd} = B_0 \cdot d^2 = 12{,}15 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} P_{uu}^B = \mathrm{Max}(K_B - B_{uu}; 0) = 0 \\ P_{ud}^B = \mathrm{Max}(K_B - B_{ud}; 0) = 0 \\ P_{dd}^B = \mathrm{Max}(K_B - B_{dd}; 0) = 1{,}35 \end{array} \right.$$

- La probabilità risk neutral vale

$$\pi_B = \frac{1 + i - d}{u - d} = \frac{1{,}05 - 0{,}90}{0{,}20} = 0{,}75$$

- Il valore della put con sottostante *B* vale perciò:

$$P^B = \frac{\pi_B^2 \cdot P_{uu}^B + 2\pi_B \cdot (1-\pi_B) \cdot P_{ud}^B + (1-\pi_B)^2 \cdot P_{dd}^B}{(1+i)^2} = 0{,}0765$$

- Il costo della copertura tenendo conto delle quote vale:

$$C = \alpha \cdot P^A + \beta \cdot P^B = 23{,}63$$

- Il prezzo all'epoca zero del portafoglio (tenendo conto della copertura) è:

$$V_0 = 100 \cdot 10 + 75 \cdot 15 + 23{,}63 = 2.148{,}63$$

- Il valore a scadenza del portafoglio assicurato sarà dato dalla somma del valore a scadenza delle azioni con il valore a scadenza delle opzioni (ossia il loro pay-off).

- Di conseguenza:

$$V_T = \alpha \cdot A_T + \alpha \cdot \text{Max}(K_A - A_T; 0) + \beta \cdot B_T + \beta \cdot \text{Max}(K_B - B_T; 0)$$

- Esaminiamo tutti i casi possibili (tenendo conto che le due azioni si muovono solo contemporaneamente al rialzo o contemporaneamente al ribasso):

$$V_T(uu) = 100 \cdot (13{,}225 + 0) + 75 \cdot (18{,}15 + 0) = 2.683{,}75$$
$$V_T(ud) = 100 \cdot (9{,}775 + 0) + 75 \cdot (14{,}85 + 0) = 2.091{,}25$$
$$V_T(dd) = 100 \cdot (7{,}225 + 1{,}775) + 75 \cdot (12{,}15 + 1{,}35) = 1.912{,}50$$

- I rendimenti netti nei tre casi valgono:

$$R(uu) = \sqrt{\frac{V_T(uu)}{V_0}} - 1 = 11{,}76\%$$

$$R(ud) = \sqrt{\frac{V_T(ud)}{V_0}} - 1 = -1{,}34\%$$

$$R(dd) = \sqrt{\frac{V_T(dd)}{V_0}} - 1 = -5{,}65\%$$

Il valore atteso del portafoglio a scadenza è:

$$V_{att} = 100 \cdot \left[\pi_A^2 \cdot \left(A_{uu} + P_{uu}^A\right) + 2\pi_A \cdot (1 - \pi_A) \cdot \left(A_{ud} + P_{ud}^A\right) + (1 - \pi_A)^2 \cdot \left(A_{dd} + P_{dd}^A\right)\right] +$$
$$+75 \cdot \left[\pi_B^2 \cdot \left(B_{uu} + P_{uu}^B\right) + 2\pi_B \cdot (1 - \pi_B) \cdot \left(B_{ud} + P_{ud}^B\right) + (1 - \pi_B)^2 \cdot \left(B_{dd} + P_{dd}^B\right)\right] =$$
$$= 2.368{,}86$$

- Infine, il rendimento netto atteso è:

$$R(att) = \sqrt{\frac{V_{att}}{V_0}} - 1 = 5{,}00\%$$

Esercizio 5

- Il portafoglio di un investitore è composto di 520 azioni della società *A* e un pari numero di opzioni put sulle azioni *A*. Sapendo che l'azione quota oggi Euro 1,39, lo strike price della put è fissato a Euro 0,9, la scadenza è fissata a 3 anni, il tasso risk free è il *2%* e che *u=+10%* e *d=-20%*, calcolare:
  - il valore del portafoglio oggi;
  - i valori a scadenza del portafoglio in tutti i casi possibili;
  - il valore atteso di portafoglio.

- I fattori di rialzo e ribasso valgono rispettivamente *u=1,10* e *d=0,80*.
- Determiniamo i valori a scadenza (*T=3*) e i relativi payoff del sottostante:

$$\begin{cases} A_{uuu} = A \cdot u^3 = 1{,}8501 \\ A_{uud} = A \cdot u^2 \cdot d = 1{,}3455 \\ A_{udd} = A \cdot u \cdot d^2 = 0{,}9786 \\ A_{ddd} = A \cdot d^3 = 0{,}7117 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_{uuu} = \max(K - A_{uuu}; 0) = 0 \\ P_{uud} = \max(K - A_{uud}; 0) = 0 \\ P_{udd} = \max(K - A_{udd}; 0) = 0 \\ P_{ddd} = \max(K - A_{ddd}; 0) = 0{,}1883 \end{cases}$$

- La probabilità risk neutral vale:

$$\pi = \frac{1 + i - d}{u - d} = 0{,}7333 \rightarrow 73{,}33\%$$

- Il prezzo dell'opzione put:

$$P = \frac{\pi^3 \cdot P_{uuu} + 3\pi^2 \cdot (1-\pi) \cdot P_{uud} + 3\pi \cdot (1-\pi)^2 \cdot P_{udd} + (1-\pi)^3 \cdot P_{ddd}}{(1+i)^3} = 0{,}003365$$

- Il valore del portafoglio all'epoca *zero* si ottiene sommando al prezzo del sottostante il prezzo dell'opzione (per il numero di quote):

$$V_0 = 520 \cdot (A + P) = 724{,}55$$

- Il valore all'epoca *tre* del portafoglio si ottiene sommando al valore a scadenza del sottostante il valore dell'opzione (ossia il suo payoff), nei quattro percorsi aleatori possibili:

$$V_3(uuu) = 520 \cdot (A_{uuu} + P_{uuu}) = 962{,}05$$
$$V_3(uud) = 520 \cdot (A_{uud} + P_{uud}) = 699{,}67$$
$$V_3(udd) = 520 \cdot (A_{udd} + P_{udd}) = 508{,}85$$
$$V_3(ddd) = 520 \cdot (A_{ddd} + P_{ddd}) = 468{,}00$$

- Infine, il valore atteso del portafoglio è:

$$V_3(att) = \pi^3 \cdot V_3(uuu) + 3\pi^2 \cdot (1-\pi) \cdot V_3(uud) + 3\pi \cdot (1-\pi)^2 \cdot V_3(udd) + \\ +(1-\pi)^3 \cdot V_3(ddd) = 768{,}90$$

con rendimento atteso:

$$R(att) = \sqrt[3]{\frac{V_{att}}{V_0}} - 1 = 2\%$$