Modulo 5

Obbligazioni, struttura dei tassi, arbitraggio

Argomenti

- Obiettivi.
- Introduzione.
- Titoli obbligazionari.
- Titoli obbligazionari a cedola nulla: zero coupon bond.
- Titoli obbligazionari a cedola fissa.
- Le ipotesi caratteristiche del mercato: non frizionalità, competitività, assenza di arbitraggi.
- Contratti a pronti, contratti a termine (forward).
- Tassi d'interesse a pronti.
- Struttura a termine dei tassi e relazione di coerenza.
- Prezzo di mercato.
- Struttura dei tassi piatta.
- Violazione della relazione di coerenza; arbitraggio.
- Appendice: approfondimenti sui contratti a termine (forward).

Obiettivi

Gli *obiettivi* di questo modulo sono:

- conoscere le caratteristiche dei titoli obbligazionari, in particolare i titoli a cedola fissa e i titoli a cedola nulla;
- conoscere la definizione di contratto a pronti e a termine e la relazione di coerenza;
- desumere la struttura dei tassi d'interesse a pronti e a termine;
- saper congegnare una strategia d'arbitraggio.

Introduzione

Il tasso di valutazione che un operatore razionale dovrebbe utilizzare per stimare una operazione finanziaria corrisponde a quello in base al quale egli impiega normalmente le sue disponibilità.

Ciò accade in un preciso istante e, soprattutto, sulla base di un orizzonte temporale ben preciso a scelta dell'operatore.

Però se cambiamo la durata dell'investimento, o del finanziamento, notiamo che nel mercato dei capitali il tasso d'interesse varia sensibilmente; il "**tasso di mercato**" non è unico, ma dipende dalla durata presa in considerazione.

Inoltre, presupponendo che i tassi d'interesse non sono costanti col passare del tempo, è rilevante sapere se l'operazione finanziaria inizia subito (ed allora si avrà un tasso detto "**a pronti**") oppure se l'operazione inizia in un istante successivo a quello di pattuizione (tasso "**a termine**").

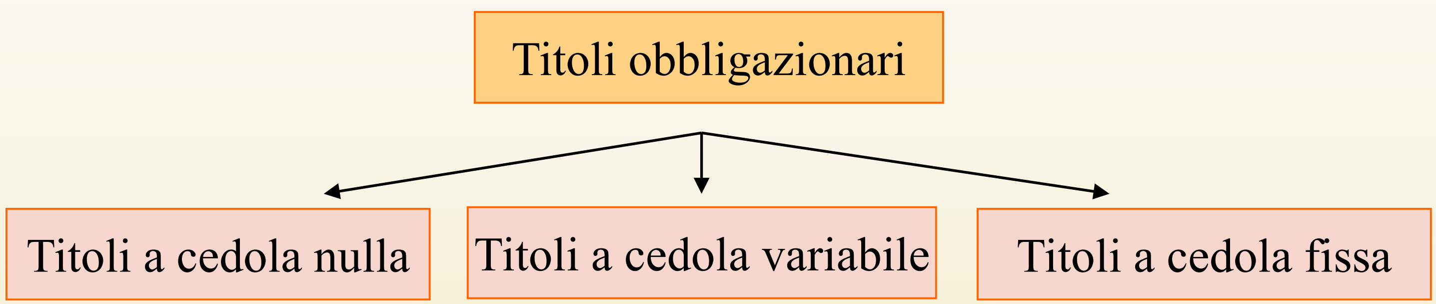
In questo modulo affronteremo le grandezze finanziarie sia in un contratto a pronti che in un contratto a termine, e ne troveremo le relazioni fondamentali.

Titoli obbligazionari

Nell’ambito dei **prestiti divisi** figurano i cosiddetti **prestiti obbligazionari**, mediante i quali enti pubblici o privati accedono ad ingenti finanziamenti collocando quote del prestito emesso a soggetti investitori, che divengono titolari dei diritti connessi alle quote detenute.
Un titolo obbligazionario può essere acquistato dal proponente in fase di emissione (mercato primario) oppure successivamente da altri investitori (mercato secondario); in entrambi i casi si paga un prezzo d’acquisto P che garantisce contrattualmente un flusso di incassi futuro.

Titoli obbligazionari

Nei paragrafi successivi tratteremo due tipi di obbligazioni: quelle senza cedola e quelle con cedola costante.



Titoli obbligazionari a cedola nulla: zero coupon bond

Uno “**zero coupon bond**” è un titolo senza cedole, a capitalizzazione integrale. A fronte del prezzo *P*, pagato dall’acquirente nell’istante corrente t_0, viene garantito in un istante successivo t_1 il rimborso di un importo fissato maggiore del prezzo pagato.

La scadenza t_1 viene detta “**maturity**” e rappresenta il momento in cui il prestito si esaurisce col rimborso del capitale $x_1=C$, noto come **valore facciale** o **valore nominale** (**VN**). L’acquisto di un titolo zero coupon bond (ZCB) può essere così formalizzato:

$$\mathbf{z} = \{-x_0, x_1\} / \{t_0, t_1\}$$

con $x_1 > x_0$ e $t_0 < t_1$.

Il valore attuale dello ZCB coincide col suo prezzo:

$$\boxed{A(t) = P}$$

Titoli obbligazionari a cedola nulla: zero coupon bond

Il guadagno per l'investitore corrisponde alla differenza tra x_1 e x_0, x_0 rappresenta il prezzo d'acquisto *P*.
Ad esempio consideriamo uno ZCB

z_1= {-97,50; 100} / {0; 0,5} con *t* in anni.

Calcoliamo il TIR :

$$97{,}5 = 100 \cdot (1+i)^{-\frac{1}{2}} \rightarrow i = \left(\frac{100}{97{,}5}\right)^2 - 1 = 5{,}1939\%$$

Esempio. Consideriamo un importante caso di ZCB: i BOT emessi dallo Stato italiano ogni 15 giorni circa, nelle durate di 3 mesi, 6 mesi e 12 mesi mediante asta indetta dal Ministero del Tesoro. Essi sono caratterizzati da un interesse implicito, rappresentato dalla differenza tra il costo di acquisto e il valore nominale del titolo, detto **scarto di emissione**.

Titoli obbligazionari a cedola nulla: zero coupon bond

Ci riferiamo ad un valore nominale (VN) pari a 100, anche se nella pratica si possono acquistare solo multipli del taglio minimo di mille euro. Secondo il nostro sistema fiscale agli interessi pagati dal titolo viene applicata un'imposta sostitutiva del *12,50%*, nel caso di un acquirente che non svolga attività di impresa. In sostanza l'imposta incide sul prezzo d'emissione innalzandolo di

$$\Delta P = 0{,}125 \cdot \Delta A = 0{,}125 \cdot (VN - P)$$

Prendendo alcuni dati dai quotidiani economici del settore si rileva che all'asta del 12 Ottobre 2004 il prezzo del BOT 3m è 99,501, la ritenuta è 0,062375 ed il prezzo netto di aggiudicazione è 99,563 con una vita residua di τ=92 giorni.

Possiamo allora calcolare le grandezze fondamentali:

$j(0,92)=(100 - 99{,}501)/99{,}501=0{,}005015=0{,}5015\%$ tasso "lordo"

$j'(0,92)=(100 - 99{,}563)/99{,}563=0{,}004385=0{,}4385\%$ tasso "netto"

Titoli obbligazionari a cedola fissa

Un titolo obbligazionario a cedola fissa garantisce al titolare l'incasso di importi periodici, le cedole, ed in concomitanza dell'ultimo periodo il rimborso del valore facciale o capitale. Il titolo è caratterizzato dalle seguenti grandezze :

P → prezzo d'acquisto
VN → valore nominale
VR → valore di rimborso
J(m) → tasso nominale
n → scadenza

Con *I* indichiamo la **cedola**, che si calcola sul valore nominale.

Titoli obbligazionari a cedola fissa

Esempio:
P = 97; VN = 100; VR = 101; n = 3; J(2) = 0,06
È un'obbligazione che paga cedole semestrali.

$I = J(2) \cdot 100 = 0{,}06 \cdot 100 = 6$

3 al primo semestre
3 al secondo semestre

Schema dei flussi:

– 97	3	3	3	3	3	101+3
0	1/2	1	3/2	2	5/2	3

Titoli obbligazionari a cedola fissa

A differenza degli ZCB, i titoli a cedola fissa possono essere acquistati **alla pari**, **sotto la pari** e **sopra la pari**.

Casi possibili	
Alla pari	P = VN = 100 per convenzione
Sotto la pari	P < VN
Sopra la pari	P > VN

Nella pratica vengono utilizzate le seguenti definizioni:

$$i = \frac{I}{VN}$$

è il tasso cedolare. Può essere lordo oppure netto.

Titoli obbligazionari a cedola fissa

$$\frac{\text{somma cedole}}{VN}$$

è il tasso nominale (annuo).

La differenza VN – P, qualora sia positiva, è chiamata **scarto** o **premio d'emissione**.
Nella pratica la differenza VN – P viene denominata:

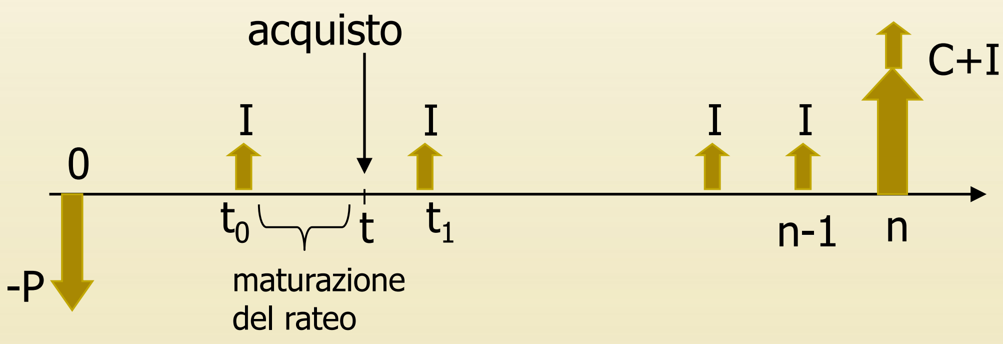
Aggio d'emissione
se VN>P

Disaggio d'emissione
se VN<P

Titoli obbligazionari a cedola fissa

Nella maggioranza dei casi il titolo obbligazionario viene acquistato in un istante successivo a quello di emissione, per cui il capitale *C* ha già maturato una quota della cedola che verrà pagata successivamente al tempo *t* (cedola in corso). Tale quota è nota come **rateo di interesse**, ed è così definita:

$$R = I \cdot \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} \qquad \text{con} \quad t_0 < t < t_1$$



Titoli obbligazionari a cedola fissa

Conseguenza di tale definizione è che il rateo non è altro che l'interesse semplice generato dal capitale *C* al tasso nominale annuo $I/\tau C$ nel periodo $(t-t_0)$:
Indicando con τ il periodo (costante) tra una cedola e quella successiva,

$$R = C \cdot \frac{I}{\tau \cdot C} (t - t_0) = I \cdot \frac{t - t_0}{t_1 - t_0}$$

Naturalmente $0 \leq R \leq I$, ed il valore di *R* dipende linearmente da *t*.

R = 0

se acquistiamo il titolo subito dopo lo stacco della cedola

R = I

se acquistiamo il titolo subito prima lo stacco della cedola

0 < R < I

se acquistiamo il titolo tra una cedola e la successiva

Titoli obbligazionari a cedola fissa

Il soggetto che acquista l'obbligazione paga al venditore la quota R di interessi maturati fino all'istante t; successivamente, all'incasso della cedola in corso, egli riceverà I. Però, nelle quotazioni ufficiali del mercato secondario delle obbligazioni, in genere è indicato il cosiddetto "corso secco" $Q=P-R$, al posto del corso "tel quel" effettivamente poi pagato. Ciò avviene per rendere confrontabili due titoli le cui scadenze non coincidono, in quanto la diversa cedola in corso potrebbe rendere difficile la valutazione dei titoli stessi.

Corso secco

è il prezzo che non tiene conto del rateo maturato

Corso tel quel

è pari al corso secco più il rateo maturato

Titoli obbligazionari a cedola fissa

Sulle cedole è applicata un'imposta sostitutiva, nel caso di acquirente che non svolge attività di impresa, pari al *12,50%*; anche sulla differenza VN-P (premio di emissione o plusvalenza) è applicata l'imposta sostitutiva del *12,50%* alla scadenza. Nel calcolo del rateo si conteggiano i giorni sulla base dell'**anno commerciale**, compresi il primo e l'ultimo giorno del periodo di maturazione.

Poniamo ad esempio il BTP quinquennale emesso il 15.04.04 (**codice ISIN** IT0003652077) scadente il 15.04.09. Il tasso nominale è *3%* ed il prezzo di emissione 98,62. Alla data del 20.10.04 il titolo secco al **MTA** era 99,60 con vita residua di 4 anni e 174 giorni. Il tasso cedolare è pari all'*1,50%*, la cedola lorda 1,50 euro e la cedola netta $1{,}50 \cdot (1 - 0{,}125) = 1{,}3125$.

Qualora l'investitore porti il titolo fino alla scadenza, il valore di rimborso, oltre all'ultima cedola netta, sarà: $100 - 0{,}125 \cdot (100-99{,}60) =$
$100 - 0{,}05 = 99{,}95$

Il rateo al 20.10.04 è $R = I \cdot 6/180 = 1{,}3125 \cdot 0{,}03333 = 0{,}04375$ euro, per cui l'investitore ha pagato il prezzo $P = 99{,}64375$

Le ipotesi caratteristiche del mercato: non frizionalità, competitività, assenza di arbitraggi

I concetti fondamentali della matematica finanziaria saranno ora inseriti nel contesto di un mercato ideale.
L’emissione e lo scambio dei titoli (o contratti) finanziari avviene attraverso il cosiddetto **mercato dei capitali**, un termine dal significato molto ampio, che possiamo caratterizzare come l’insieme dei prodotti finanziari oggetto di emissione e di scambio ed il sistema degli “attori” che a diverso titolo agiscono nel mercato. In questa sede tralasciamo sia l’aspetto delle norme, consuetudini e disposizioni che regolano le emissioni e gli scambi dei titoli, che l’insieme delle strutture mediante le quali avvengono le negoziazioni dei prodotti finanziari, prediligendo come oggetto di studio i titoli obbligazionari.
Sono le ipotesi di funzionamento del mercato che determinano il prezzo di un titolo obbligazionario, anziché una legge di equivalenza finanziaria astratta.

Le ipotesi caratteristiche del mercato: non frizionalità, competitività, assenza di arbitraggi

Al fine di descrivere formalmente le leggi che governano il mercato obbligazionario poniamo alcune ipotesi fondamentali:

Ipotesi di non frizionalità

- Non ci sono costi di transazione né prelievi fiscali
- E' possibile detenere quote negative di titoli (**short sales** o **vendite allo scoperto**)
- Non esiste rischio di insolvenza (default risk), i contratti verranno sicuramente onorati.
- I titoli sono infinitamente divisibili (non esiste né il minimo né il massimo negoziabile)

Le ipotesi caratteristiche del mercato: non frizionalità, competitività, assenza di arbitraggi

Ipotesi di competitività

- Tutti gli operatori hanno opinioni conformi e perseguono la massimizzazione del profitto: nella scelta di due quantità monetarie preferiscono sempre, a parità di altre condizioni, il possesso della quantità maggiore
- Nessun operatore, con la sua attività di transazione, è in grado di influenzare il prezzo dei titoli (price taker). Vendendo (o comprando) grandi quantità dello stesso titolo, il prezzo di mercato non scende (o sale).

Assenza di arbitraggi

- E' preclusa la possibilità di realizzare profitti senza che ciò comporti alcuna assunzione di rischio

Contratti a pronti, contratti a termine (forward)

Ipotizziamo che nel mercato appena descritto esistano due tipologie di operazioni finanziarie: **operazioni a pronti** e **a termine**.

Operazione a pronti:

> **È un'operazione finanziaria conclusa in t_0 che prevede lo scambio di un importo x_0 in t_0 con un altro importo x_n in t_n.**

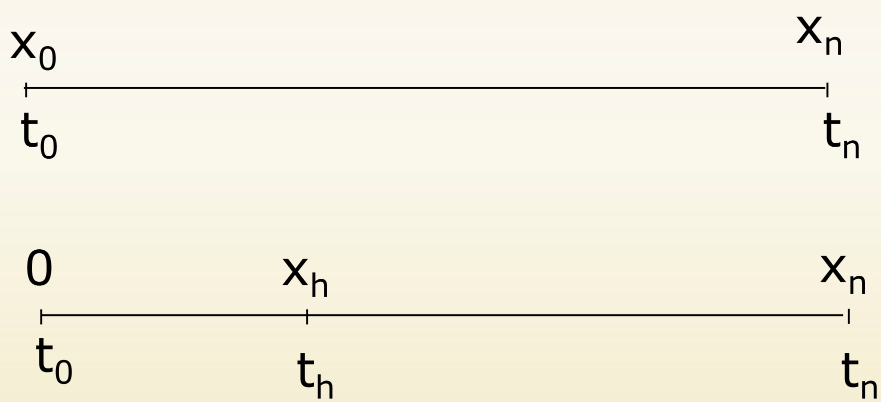
Operazione a termine:

> **È un'operazione finanziaria conclusa in t_0 che prevede lo scambio di un importo x_h in t_h con un altro importo x_n in t_n.**

Contratti a pronti, contratti a termine (forward)

Lo schema delle due operazioni finanziarie è il seguente.

Operazione a pronti $\longrightarrow$ $\mathbf{(x_0, x_n) \,/\, (t_0, t_n)}$
Operazione a termine $\longrightarrow$ $\mathbf{(0, x_h, x_n) \,/\, (t_0, t_h, t_n)}$



Nell'operazione finanziaria a termine all'epoca t_0 non c'è scambio di denaro, ma solo l'accordo.

N.B. Per indicare lo schema delle operazioni finanziarie si possono usare indifferentemente le parentesi tonde o graffe.

Tassi d'interesse a pronti

Sia disponibile nel mercato uno ZCB (x_0, x_n) / (t_0, t_n) , che paga x_n all'epoca t_n e costa oggi x_0, l'investitore potrà capitalizzare le sue risorse secondo il fattore di capitalizzazione:

$$m(t_0, t_n) = \frac{x_n}{x_0}$$

Per convenzione ci riferiamo al regime finanziario dell'interesse composto:

$$m(t_0, t_n) = [1 + i(t_0, t_n)]^{t_n - t_0}$$

Simmetricamente possiamo ricavare il valore attuale

$$v(t_0, t_n) = \frac{x_0}{x_n} = [1 + i(t_0, t_n)]^{-(t_n - t_0)}$$

Tassi d'interesse a pronti

Indicheremo **tasso d'interesse a pronti** o **tasso spot** il tasso espresso su base periodale: $i(t_0, t_n)$

$$i(t_0, t_n) = v(t_0, t_n)^{-\frac{1}{t_n - t_0}} - 1$$

Partendo dal valore attuale

$$i(t_0, t_n) = m(t_0, t_n)^{\frac{1}{t_n - t_0}} - 1$$

Partendo dal montante

Tasso istantaneo a pronti:

$$h(t_0, t_n) = \frac{1}{t_n - t_0} \log m\,(t_0, t_n) = -\frac{1}{t_n - t_0} \log v\,(t_0, t_n)$$

Tassi d'interesse a pronti

Esempio: dato il seguente ZCB determinare il tasso spot.

$$z_1 = (-99; 104)/(0; 1)$$

$$i(0,1) = \left(\frac{x_n}{x_0}\right)^{\frac{1}{t_n - t_0}} - 1 = \frac{104}{99} - 1 = 0{,}050505$$

Abbiamo trovato il tasso a pronti.
Tra l'epoca 0 e l'epoca 1 il tasso di riferimento è *i=5,0505%*.

Tassi d'interesse a pronti

Vediamo un altro esempio:
dato il seguente ZCB determinare il tasso spot.

$$z_2 = (-99; 107)/(0; 2)$$

$$i(0{,}2) = \left(\frac{x_0}{x_n}\right)^{-\frac{1}{t_n - t_0}} - 1 = \left(\frac{99}{107}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1 = 0{,}03962$$

Dall'epoca 0 all'epoca 2 il tasso di riferimento
è *i=3,962%*.
Siamo in un'ottica in cui i tassi variano nel tempo.

Struttura a termine dei tassi e relazione di coerenza

La disponibilità di ZCB per le diverse scadenze, ci permette di calcolare i tassi spot per le diverse durate, una volta noti tali valori si può ricavare la curva continua che esprime la struttura dei tassi a termine.
Sotto l'ipotesi di assenza di opportunità di arbitraggio, in un contesto di mercato ideale, secondo cui intuitivamente è preclusa la possibilità di realizzare profitti senza che ciò comporti alcuna assunzione di rischio è possibile formulare la cosiddetta **relazione di coerenza** che possiamo formalizzare come segue:

$$\boxed{m(t_0,t_n) = m(t_0,t_h) \cdot m(t_0,t_h,t_n) \quad \text{con } t_0 < t_h < t_n}$$

oppure:

$$\boxed{v(t_0,t_n) = v(t_0,t_h) \cdot v(t_0,t_h,t_n) \quad \text{con } t_0 < t_h < t_n}$$

Struttura a termine dei tassi e relazione di coerenza

La grandezza $m(t_0, t_h, t_n)$ indica la somma che si riceve in t_n, pagando 1 all'epoca t_h, in base al contratto stipulato in t_0.
In base alla relazione vista possiamo affermare che il tasso valutato in t_0, relativo al periodo compreso fra t_h e t_n sarà:

$$i(t_0, t_h, t_n) = m(t_0, t_h, t_n)^{\frac{1}{t_n - t_h}} - 1 = v(t_0, t_h, t_n)^{-\frac{1}{t_n - t_h}} - 1$$

Tale tasso prende il nome di:

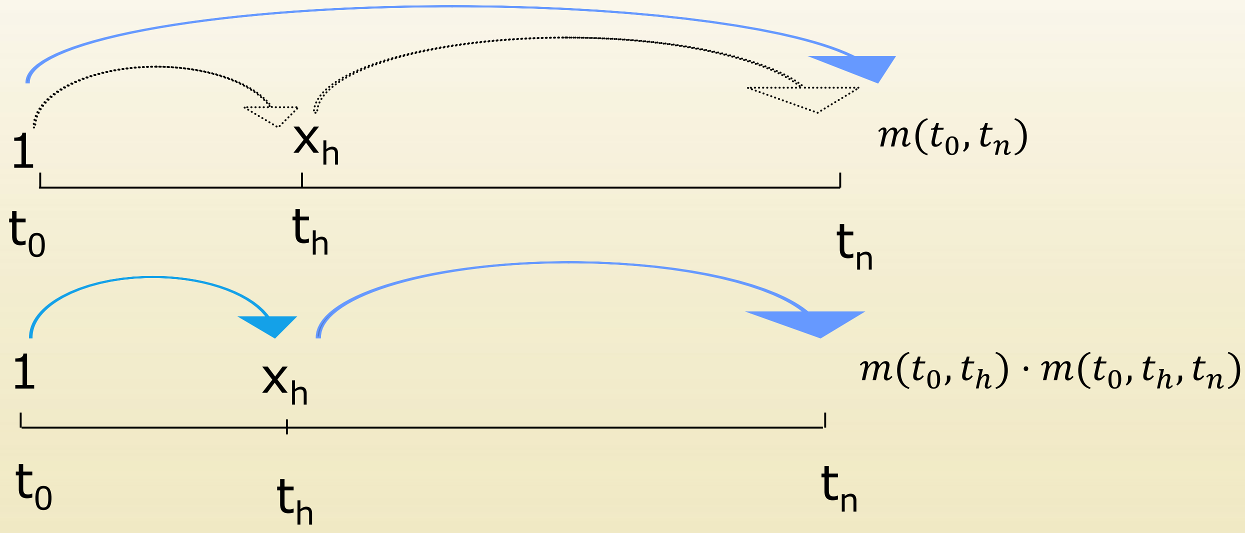
Tasso a termine o **tasso forward**

Struttura a termine dei tassi e relazione di coerenza

Da un punto di vista teorico la relazione di coerenza è la scindibilità traslata nel mercato dei capitali.

$$m(t_0, t_n) = m(t_0, t_h) \cdot m(t_0, t_h, t_n) \quad \text{con } t_0 < t_h < t_n$$

I due fattori di montante sono uguali, infatti siamo in concorrenza perfetta. Per la **legge dell'unico prezzo**, due prodotti finanziariamente equivalenti devono avere lo stesso prezzo.



Struttura a termine dei tassi e relazione di coerenza

Dalla relazione di coerenza deriviamo:

$$m(t_0, t_h, t_n) = \frac{m(t_0, t_n)}{m(t_0, t_h)}$$

Alcune relazioni notevoli:

$$m(t_0, t_h, t_n) = [1 + i(t_0, t_h, t_n)]^{(t_n - t_h)}$$

$$v(t_0, t_h, t_n) = \frac{1}{m(t_0, t_h, t_n)} = [1 + i(t_0, t_h, t_n)]^{-(t_n - t_h)}$$

Struttura a termine dei tassi e relazione di coerenza

I tassi forward saranno:

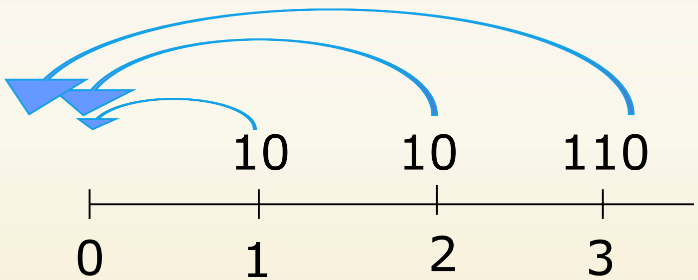
$$\boxed{i(t_0, t_h, t_n) = m(t_0, t_h, t_n)^{1/(t_n - t_h)} - 1}$$

Il tasso istantaneo a termine sarà:

$$\boxed{h(t_0, t_h, t_n) = \frac{1}{t_n - t_h} \log m\,(t_0, t_h, t_n) = -\frac{1}{t_n - t_h} \log v\,(t_0, t_h, t_n)}$$

Prezzo di mercato

Nell'ottica in cui stiamo lavorando, non parliamo più di valore attuale ma di prezzo delle operazioni finanziarie.
Consideriamo la seguente obbligazione:
B = (P, 10, 10, 110)/(0, 1, 2 ,3)
dove P è il prezzo incognito dell'obbligazione.



Il prezzo sarà dato da: $P = 10 \cdot v(0{,}1) + 10 \cdot v(0{,}2) + 110 \cdot v(0{,}3)$

Conoscendo:

$$v(0{,}1) = 0{,}9091$$
$$v(0{,}2) = 0{,}8403$$
$$v(0{,}3) = 0{,}8000$$

Prezzo di mercato

→ possiamo calcolare il prezzo dell'obbligazione.

Il valore di mercato dell'obbligazione descritta, derivante dalle condizioni di mercato

$$P = 10 \cdot 0{,}9091 + 10 \cdot 0{,}8403 + 110 \cdot 0{,}8000 = 105{,}4940$$

Esempi

Esempio:
in un certo momento il mercato è formato da tre ZCB

$$z_1 = (100; 120)/(0; 1)$$
$$z_2 = (100; 130)/(0; 2)$$
$$z_3 = (100; 145)/(0; 3)$$

Ricavare, da queste informazioni, la struttura dei tassi esplicitando sia i tassi a pronti che i tassi a termine.

$$Z_1 \rightarrow m(0; 1) = \frac{120}{100} = 1{,}2$$

$$Z_2 \rightarrow m(0; 2) = \frac{130}{100} = 1{,}3$$

$$Z_3 \rightarrow m(0; 3) = \frac{145}{100} = 1{,}45$$

Dai tre ZCB abbiamo individuato i fattori di montante a pronti.

Esempi

Tassi a pronti

$i(0{,}1) = m(0;1) - 1 = 0{,}20$

$i(0{,}2) = [m(0;2)]^{1/2} - 1$
$= 0{,}14017$

$i(0{,}3) = [m(0;3)]^{1/3} - 1$
$= 0{,}13185$

Tassi a termine

$i(0;0;1) = i(0;1) = 0{,}2$

$$i(0;1;2) = \frac{m(0;2)}{m(0;1)} - 1 = \frac{1{,}3}{1{,}2} - 1 = 0{,}0833$$

$$i(0;2;3) = \frac{m(0;3)}{m(0;2)} - 1 = \frac{1{,}45}{1{,}3} - 1 = 0{,}11538$$

$$i(0;1;3) = \left(\frac{m(0;3)}{m(0;1)}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 = \left(\frac{1{,}45}{1{,}2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1$$
$= 0{,}09924$

Struttura dei tassi piatta

- Osserviamo che nell'ipotesi in cui i tassi spot fossero uguali, si avrebbero tassi forward costanti; in questo caso si parla di struttura piatta dei tassi di interesse, la curva dei tassi a pronti è una retta orizzontale.
- Questo caso, in cui il tasso di rendimento non dipende dalla durata dell'investimento, corrisponde alla situazione in cui vi sarebbe in ogni istante, un unico "tasso di mercato", qualunque sia la scadenza.

Esempio

- Siano i titoli descritti dagli scadenzari seguenti:

$$b_1: (0{,}828;\ 1)\ /\ (0;\ 3)$$
$$b_2: (0;\ 0{,}85;\ 1)\ /\ (0;\ 1;\ 3)$$
$$b_3: (0{,}96;\ 1)\ /\ (0;\ 1)$$

Violazione della relazione di coerenza; arbitraggio

Appurare se in base a queste operazioni è verificata la relazione di coerenza, qualora così non fosse, porre in essere una strategia d'arbitraggio.

$$v(0,1) = \frac{0,96}{1}; \qquad v(0,1,3) = \frac{0,85}{1}; \qquad v(0,3) = \frac{0,828}{1}$$

$$v(t_0, t_n) = v(t_0, t_h) \cdot v(t_0, t_h, t_n)$$

$$v(0,3) = v(0,1) \cdot v(0,1,3)$$

La relazione di coerenza non è verificata.

$$0,828 > 0,96 \cdot 0,85 = 0,816$$

È possibile congegnare una strategia di arbitraggio.

Violazione della relazione di coerenza; arbitraggio

Strategia: compro l'operazione finanziaria meno costosa e vendo quella più costosa.
Vendo $\mathbf{b_1}$ e compro quella composta da $\mathbf{b_2}$ e $\mathbf{b_3}$.
Vendo una unità di b_1 che costa 0,828 e paga 1 in 3: all'epoca 0 avrò quindi un introito: +0,828; all'epoca 3 un'uscita pari a – 1.
Acquisto una unità di b_2 che costa 0,85 in 1 e rimborsa 1 in 3, all'epoca 0 non succede nulla, all'epoca 1 avrò un'uscita: – 0,85 e all'epoca 3 un'entrata pari al rimborso: +1.
Del titolo b_3 acquisto una quota pari a $0{,}85 \cdot 0{,}96 = 0{,}816$; all'epoca 0 avrò un'uscita dovuta all'acquisto della quota di b_3 : – 0,816 e all'epoca 1 il rimborso che sarà pari 0,85.
All'epoca 0 avrò così un saldo positivo pari a
0,828 – 0,816 = 0,012,
come si evidenzia anche dal seguente prospetto.

Violazione della relazione di coerenza; arbitraggio

Prospetto delle entrate e delle uscite:

EPOCHE →	0	1	3
v(0, 1)	– 0,816	+ 0,85	0
v(0, 1, 3)	0	– 0,85	+1
v(0, 3)	+ 0,828	0	– 1
Saldo netto	+0,012	0	0

Arbitraggio

- Violazione della relazione di coerenza:

$$v(t_0, t_n) > v(t_0, t_h) \cdot v(t_0, t_h, t_n)$$

→ Possibilità di ARBITRAGGIO (combinazione di operazioni finanziarie che consente di ottenere saldi netti positivi ad ogni epoca ossia "guadagno senza esborso").

→ Nel seguente modo:

Arbitraggio

- Investire un importo pari a $v(t_0, t_h) \cdot v(t_0, t_h, t_n)$ nell'operazione a pronti relativa al periodo (t_0, t_h) e nell'immediato reinvestimento dell'importo $v(t_0, t_h, t_n)$ resosi disponibile in t_h nell'operazione a termine relativa alle tre epoche (t_0, t_h, t_n);

- Finanziamento mediante la vendita dell'operazione a pronti relativa al periodo (t_0, t_n).

epoche	t_0	t_h	t_n
1. pronti	$-v(t_0,t_h)\cdot v(t_0,t_h,t_n)$	$+v(t_0,t_h,t_n)$	0
op.ter.	0	$-v(t_0,t_h,t_n)$	1
2. pronti	$+v(t_0,t_n)$	0	-1
Saldo netto	>0	0	0

Appendice: approfondimenti sui contratti a termine (forward)

Consideriamo i seguenti 4 titoli obbligazionari disponibili sul mercato negli istanti {0; 1; 2; 3; 4}

$$z_1 = \{ -93; 100; 0; 0; 0\}$$
$$z_2 = \{-88; 0; 100; 0; 0\}$$
$$z_3 = \{-101; 10; 10; 110; 0\}$$
$$z_4 = \{-89; 0; 0; 10; 110\}$$

e ricaviamo la struttura dei tassi a pronti e a termine, i loro TIR nonché il prezzo di un titolo z_5 che garantisce il flusso {0; 10; 0; 110} / {1;2;3;4}.

Con il titolo z_1 si ottiene:

$v(0,1)=93/100=0,93$

$i(0,1)=v(0,1)^{-1} - 1 = 7,5269\%$

Con il titolo z_2 si ottiene:

$v(0,2)=88/100=0,88$

$i(0,2)=v(0,2)^{-½} - 1 = 6,6004\%$

Appendice: approfondimenti sui contratti a termine (forward)

Per trovare $i(0,3)$ e $i(0,4)$ bisogna utilizzare i risultati già trovati:

$$101=10\cdot v(0,1) + 10\cdot v(0,2) + 110\cdot v(0,3) + 0\cdot v(0,4)$$

$$101 = 9{,}3 + 8{,}8 + 110\cdot v(0,3)$$

$$v(0,3)=82{,}9/110=0{,}75363$$

$$i(0,3)=0{,}75363^{-1/3} - 1 = 9{,}8872\%$$

$$89 = 10\cdot v(0,3) + 110\cdot v(0,4)$$

$$v(0,4) = 0{,}74058$$

$$i(0,4)=0{,}74058^{-1/4} - 1 = 7{,}79708\%$$

Appendice: approfondimenti sui contratti a termine (forward)

Utilizziamo la relazione per i tassi a termine:

$$\frac{1}{v(t_0, t_h, t_n)} = \frac{\frac{1}{v(t_0, t_n)}}{\frac{1}{v(t_0, t_h)}} = \frac{m(t_0, t_n)}{m(t_0, t_h)} = m(t_0, t_h, t_n)$$

Appendice: approfondimenti sui contratti a termine (forward)

Troviamo i seguenti valori numerici:

$i(0,0,1) = i(0,1) = 0{,}075269$
$i(0,1,2) = m(0,2)/m(0,1) - 1 = 1{,}13636 / 1{,}075269 - 1 = 0{,}056818$
$i(0,2,3) = m(0,3)/m(0,2) - 1 = 1{,}326911 / 1{,}13636 - 1 = 0{,}167685$
$i(0,3,4) = m(0,4)/m(0,3) - 1 = 1{,}350293 / 1{,}326911 - 1 = 0{,}017621$

Per calcolare i TIR dei primi due titoli:

$TIR(z_1) = i(0,1) = 0{,}075269$
$TIR(z_2) = i(0,2) = 0{,}066004$

mentre per calcolare i TIR degli altri due titoli bisogna impostare due equazioni algebriche di grado rispettivamente 3 e 4:

$$101 = 10v + 10v^2 + 110v^3 \qquad 89 = 10v^3 + 110v^4$$

Appendice: approfondimenti sui contratti a termine (forward)

Attraverso il metodo di Newton si trova:

$v^* = 0,91245$ (prima equazione)

$v^* = 0,92657$ (seconda equazione)

Infine il prezzo del titolo z_5 si ricava impostando la seguente relazione:

$P = 10\ v(0,2) + 110\ v(0,4) = 8,8 + 81,4638 = 90,2638$

In appendice all'esempio precedente poniamo per ipotesi che sia venduto un contratto forward sul titolo z_4 con consegna in t=2. Si vuole conoscere il prezzo P_4 pattuito in t=0:

$$P_4 = 10\ v(0,2,3) + 110\ v(0,2,4)$$

Dobbiamo prima trovare i prezzi a termine dei ZCB unitari:

$v(0,2,3) = v(0,3) / v(0,2) = 0,75363 / 0,88 = 0,8564$

$v(0,2,4) = v(0,4) / v(0,2) = 0,74058 / 0,88 = 0,84157$

$P_4 = 10 \times 0,8564 + 110 \times 0,84157 = 101,1365$

Appendice: approfondimenti sui contratti a termine (forward)

Infine, proseguendo con i dati dell'esempio precedente, si vuole cercare una strategia di arbitraggio che si verrebbe a creare nell'ipotesi in cui il prezzo P_4 sia più basso di un euro (P_4' = 100,1365) rispetto al prezzo determinato nel rispetto della coerenza del mercato.
Ovviamente l'investitore valuta positivamente il prezzo più basso, e sfrutta tale condizione per trarre un profitto. Per cercare la strategia di portafoglio più opportuna, denominiamo con

π_1= numero di titoli z_1 da acquistare o vendere;
π_2= numero di titoli z_2 da acquistare o vendere;
π_3= numero di titoli z_3 da acquistare o vendere;
π_4= numero di titoli z_4 da acquistare o vendere;

ed inoltre il titolo da acquistare è
z'_4 = { 0; 0; -100,1365; 10; 110}

Appendice: approfondimenti sui contratti a termine (forward)

Impostiamo ora un sistema di 4 equazioni e 4 incognite (π_i) imponendo che negli istanti 1, 2, 3, 4 il risultato netto sia nullo. Il profitto si realizzerà in t=0.

$$\begin{cases} \pi_1 \cdot 100 + \pi_2 \cdot 0 + \pi_3 \cdot 10 + \pi_4 \cdot 0 = 0 & (t = 1) \\ \pi_1 \cdot 0 + \pi_2 \cdot 100 + \pi_3 \cdot 10 + \pi_4 \cdot 0 = 100{,}1365 & (t = 2) \\ \pi_1 \cdot 0 + \pi_2 \cdot 0 + \pi_3 \cdot 110 + \pi_4 \cdot 10 = -10 & (t = 3) \\ \pi_1 \cdot 0 + \pi_2 \cdot 0 + \pi_3 \cdot 0 + \pi_4 \cdot 110 = -110 & (t = 4) \end{cases}$$

titolo z_1 titolo z_2 titolo z_3 titolo z_4 titolo z'_4

La soluzione è molto agevole: si inizia con l'ultima riga e si ricava π_4=-1. Poi si sostituisce il valore trovato nella terza riga, e si trova il valore π_3=0.

Appendice: approfondimenti sui contratti a termine (forward)

Infine si ha π_2=1,001365 e π_1=0. La strategia è quindi:

- acquisto di 1 titolo z'_4;
- vendita di 1 titolo z_4;
- acquisto di 1,001365 titoli z_2;

e la tabella dei payoff si presenta così:

	0	1	2	3	4
acquisto z'_4	0	0	-100,1365	10	110
vendita z_4	89	0	0	-10	-110
acquisto z_2	-88,12012	0	100,1365	0	0
	0,87988	0	0	0	0

Appendice: approfondimenti sui contratti a termine (forward)

Come risultato finale si ha che l'opportunità di arbitraggio apertasi sul mercato a causa della minor valutazione del titolo z_4 rispetto al valore "coerente", ha portato alla creazione di un profitto pari a 0,87988 al tempo 0.
La risoluzione del sistema risulta più agevole, nel caso generale, utilizzando le funzioni Excel relative alle matrici.
Vediamo lo stesso esempio:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			Coefficienti del sistema					termini noti
2			titolo z1	titolo z2	titolo z3	titolo z4		
3	t=1		100	0	10	0		0
4	t=2		0	100	10	0		100,1365
5	t=3		0	0	110	10		-10
6	t=4		0	0	0	110		-110
7								
8								
9	Unità z1		0					
10	Unità z2		1,001365					
11	Unità z3		0					
12	Unità z4		-1					

Appendice: approfondimenti sui contratti a termine (forward)

I coefficienti delle equazioni del sistema sono inseriti nelle celle C3:F6.
I termini noti delle equazioni del sistema sono inseriti nelle celle H3:H6.
La soluzione si trova nelle celle C9:C12, ed è ottenuta evidenziando le celle C9:C12 e scrivendo la seguente formula:

=matr.prodotto (matr.inversa(C3:F6);H3:H6)

ed infine confermando con Crtl+Shift+Enter, anziché solo Enter (questo perché in Excel le formule che restituiscono matrici devono essere immesse come formule "matrice").
Sostanzialmente il vettore dei risultati viene ottenuto mediante il prodotto tra la matrice inversa dei coefficienti (C3:F6) ed il vettore dei termini noti (H3:H6).
In merito alla sintassi delle formule utilizzate, bisogna ricordare che:
matr.inversa utilizza solo matrici "quadrate" (stesso numero di righe e colonne);
matr.prodotto ha come argomento due matrici tali che il numero di colonne della prima deve coincidere con il numero di righe nella seconda.

Appendice: il metodo del "Bootstrap"

- Fase preliminare – introduzione.
- Al fine di procedere con l'esposizione del metodo del **Bootstrap** è necessario ricordare cosa si intende per struttura dei tassi d'interesse nelle sue due accezioni spot e forward.
- *La struttura a pronti (spot) dei tassi d'interesse*.
- Si definisce a pronti un'operazione finanziaria in cui è possibile scambiare un importo x_0 in t_0 con un altro importo x_n in t_n.

  Se nel mercato è disponibile un titolo (zero coupon bond) che restituisce un importo x_n a scadenza a seguito di un esborso iniziale (prezzo del titolo) pari a x_0 , allora esiste per questa operazione un tasso di interesse a pronti tra 0 ed *n*.

Il metodo del "Bootstrap"

- Fase preliminare - La struttura a termine (forward) dei tassi d'interesse.
- Si definisce a termine un'operazione finanziaria conclusa in t_0 che prevede lo scambio di un importo x_h in t_h con un importo x_n in t_n.
- Data una struttura spot dei tassi d'interesse è possibile ricavare la loro struttura a termine (forward).
- Una struttura a termine dei tassi di interesse è utile per effettuare valutazioni di strutture a tasso fisso come le obbligazioni o gli swaps.

Il metodo del "Bootstrap"

- Fase preliminare - Tasso interno di rendimento (Internal Rate of Return).
- E' quel tasso unico che sostituito agli *n* tassi di periodo di un'operazione finanziaria che genera *n* flussi monetari certi (positivi e negativi), verifica l'uguaglianza tra il prezzo dell'operazione in questione ed i flussi di importi monetari appena definiti.
- L'IRR permette di rappresentare un'operazione articolata in flussi distribuiti su varie scadenze con un solo indice di redditività.
- Il tasso interno di rendimento può essere utilizzato per esprimere il rendimento di un'obbligazione; calcolare il valore attuale di una serie di flussi; calcolare il montante a scadenza di un flusso o di una serie di flussi; valutare la redditività di un investimento.

Il metodo del "Bootstrap"

- Il "bootstrap" e la sua esigenza ai fini operativi.
- Se esiste un mercato in cui ad ogni scadenza è univocamente associato un tasso interno di rendimento (IRR), come quello degli swaps, è possibile ricavare la corrispondente struttura di tassi zero coupon.
- La struttura di tassi zero coupon è funzione del tempo in quanto il tasso è riferito alla sola data della scadenza del titolo.
- Per tasso zero coupon ad *n* anni si intende il rendimento di un titolo di durata *n* anni senza flussi cedolari intermedi

Il metodo del "Bootstrap"

- Dati due istanti *t* ed *s* (con t<s) il prezzo in *t* di un titolo che rimborsa 1 in *s* e non ha flussi intermedi sia definito come v(t,s).
- Introduciamo, dunque, il rendimento del tasso zero coupon espresso su base annuale sapendo che è il rendimento di periodo del titolo in oggetto

$$\frac{1 - v(t,s)}{v(t,s)}$$

$$i_{zc} = \sqrt[s]{1 + \frac{1 - v(t,s)}{v(t,s)}} - 1 = \sqrt[s]{\frac{1}{v(t,s)}} - 1$$

Il metodo del "Bootstrap"

- Il Bootstrap.
- Data una curva di tassi swaps è possibile ricavare la corrispondente curva di tassi zero coupon.
- Tale processo, detto di bootstrapping, viene avviato partendo dalla seguente ipotesi iniziale

$$IRR_1 = i_{zc_1}$$

- Tale tasso iniziale è definito tasso di bootstrap. Il tasso swap ad un anno coincide proprio col tasso zc ad un anno, in quanto non vi sono flussi cedolari intermedi
- 1 zc1 IR

Il metodo del "Bootstrap"

- Il Bootstrap.
- Attraverso una impostazione di tipo ricorsivo è possibile, partendo dal tasso di bootstrap, ricavare i tassi zero coupon per le scadenze successive, nel modo che segue:

$$P_2 = \frac{IRR_2}{1 + i_{zc_1}} + \frac{K + IRR_2}{\left(1 + i_{zc_2}\right)^2} \Rightarrow i_{zc_2}$$

$$P_3 = \frac{IRR_3}{1 + i_{zc_1}} + \frac{IRR_3}{\left(1 + i_{zc_2}\right)^2} + \frac{K + IRR_3}{\left(1 + i_{zc_3}\right)^3} \Rightarrow i_{zc_3}$$

$$\vdots$$

$$P_n \Rightarrow i_{zc_n}$$

Il metodo del "Bootstrap"

- Il Bootstrap.
- L'espressione di un tasso zero coupon per la scadenza j è la seguente:

$$i_{zc_j} = \sqrt[j]{\frac{1 + IRR_j}{1 - \sum_{i=1}^{j-1} IRR_j \cdot \left(1 + i_{zc_i}\right)^{-i}}} - 1$$

Il metodo del "Bootstrap"

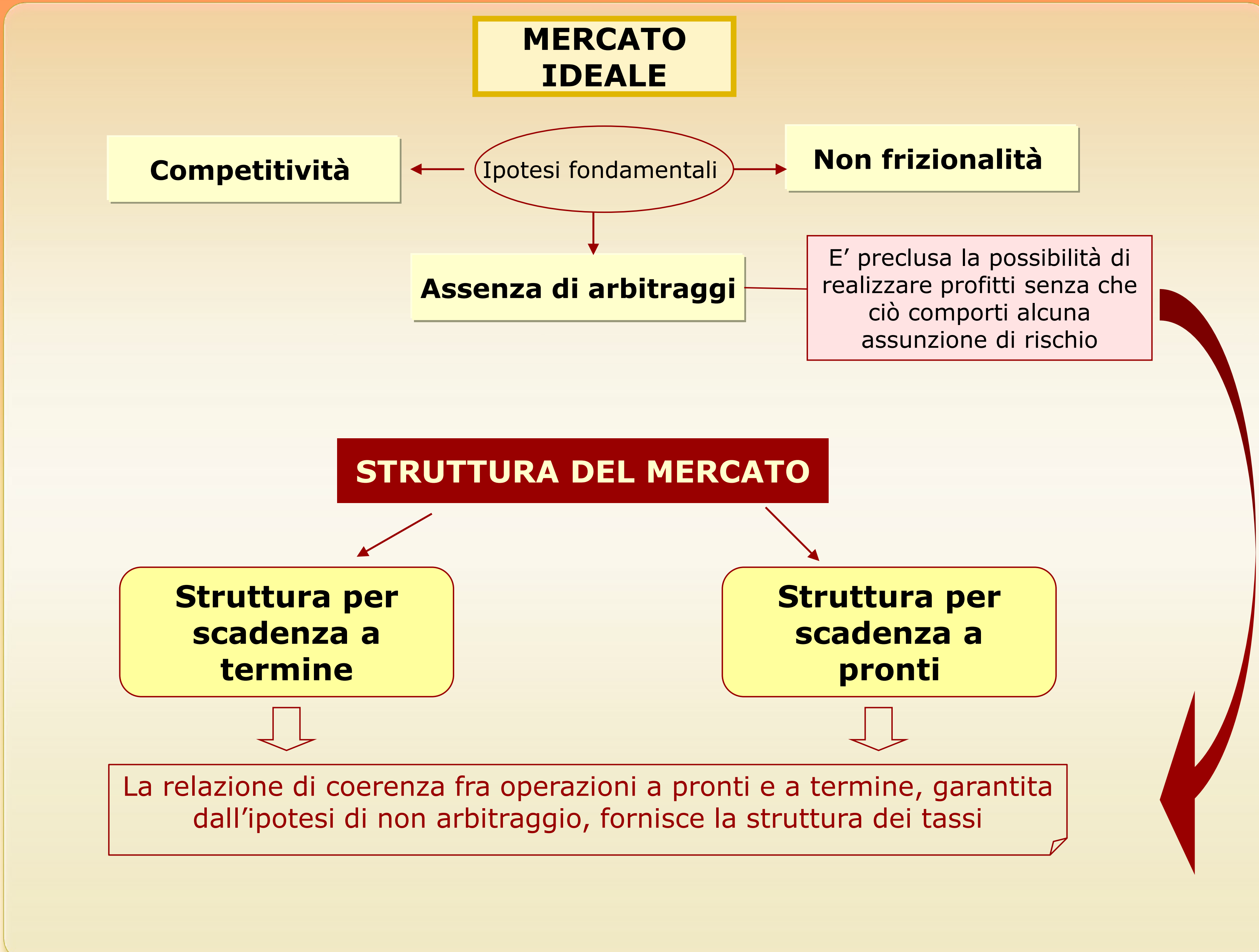
- Aspetti operativi.
- Il metodo del bootstrap richiede la completezza della curva dei tassi swap (irs) di partenza. Si deve disporre, cioè, di un tasso swap in corrispondenza di tutte le scadenza per le quali necessitiamo dei tassi zero coupon.
- Accade, però, dal punto di vista operativo, che tale condizione di completezza della curva dei tassi di partenza non sia rispettata.
- A tal fine, visto il limite operativo di cui sopra, si utilizzano molto spesso tecniche di interpolazione per colmare i vuoti della curva di base oppure applicate ai tassi zc finali.

Appendice: il metodo della regressione polinomiale

- Aspetti operativi.
- Dati di input: rendimenti (TIR) e duration di bot e btp alla data di riferimento.
- I TIR sono da intendersi approssimazioni dei tassi spot (a pronti) e le duration dei tempi corrispondenti.
- Tramite la regressione polinomiale esprimiamo una funzione che lega il tasso al tempo.

Conclusioni

- Questo modulo introduce le caratteristiche di due fondamentali titoli obbligazionari, i titoli a cedola fissa e i titoli a cedola nulla.
- Abbiamo introdotto la variabilità dei tassi d'interesse, inserendo i concetti cardine della matematica finanziaria in un contesto in cui è il mercato a formare il prezzo dei titoli obbligazionari.
- Ipotizzando un mercato ideale, si è desunta la struttura a pronti e a termine dei tassi d'interesse.
- Abbiamo descritto l'ipotesi di coerenza del mercato, quale condizione per l'impossibilità degli arbitraggi in un contesto in cui non si può trarre profitto senza assumere rischio.
- Ipotizzando la violazione della relazione di coerenza, abbiamo imparato a porre in essere una strategia d'arbitraggio.
- Infine, in appendice, è stato inserito un approfondimento relativo ai contratti a termine, il metodo del bootstrap e il metodo della regressione polinomiale.


MERCATO IDEALE
Competitività
Ipotesi fondamentali
Non frizionalità
Assenza di arbitraggi
E’ preclusa la possibilità di realizzare profitti senza che ciò comporti alcuna assunzione di rischio
STRUTTURA DEL MERCATO
Struttura per scadenza a termine
Struttura per scadenza a pronti
La relazione di coerenza fra operazioni a pronti e a termine, garantita dall’ipotesi di non arbitraggio, fornisce la struttura dei tassi

ESERCIZI

Esercizio 1

- Dati i tre titoli

$$z_1 = (-99; 104)/(0; 1)$$
$$z_2 = (-99; 107)/(0; 2)$$
$$b_1 = (-99; 4; 4; 104)/(0; 1; 2; 3)$$

- Estrapolare la struttura dei tassi a pronti e a termine.

$$z_1 \rightarrow r(0,1) = \frac{104}{99} \rightarrow i(0,1) = r(0,1) - 1 = 0{,}0505$$

$$z_2 \rightarrow r(0,2) = \frac{107}{99} \rightarrow i(0,2) = r(0,2)^{1/2} - 1$$

$$= 0{,}03962$$

$$z_3 \rightarrow 99 = 4 \cdot v(0,1) + 4 \cdot v(0,2) + 104 \cdot v(0,3)$$

$$\rightarrow v(0,3) = 0{,}879725$$

$$\rightarrow i(0,3) = v(0,3)^{-1/3} - 1 = 0{,}043641$$

$$i(0,1,2) = \frac{v(0,1)}{v(0,2)} - 1 = \frac{99/104}{99/107} - 1 = 0{,}02885$$

$$i(0,2,3) = \frac{v(0,2)}{v(0,3)} - 1 = \frac{99/107}{0{,}879725} - 1$$

$$= 0{,}05173$$

Esercizio 2

- Sapendo che, sul nostro mercato finanziario di riferimento, v(0; 1) = 0,94 e v(0; 1; 3) = 0,86 verificare se la presenza di uno zero coupon bond unitario z_1 = (-0,83; 1) / (0; 3) apre possibilità di arbitraggio e, eventualmente, calcolare il profitto realizzabile impostando una strategia con saldo positivo in t = 0.

- La conoscenza dello zcb (-0,83;1)/(0;3) consente di determinare *v(0;3)=0,83*
- Siccome

$$v(0;1)\cdot v(0;1;3)=0{,}8084\neq 0{,}83$$

→ Possibilità di arbitraggio.

→ Saldo: 0,83-0,8084=0,0216.

	0	1	3
1. O.F.	0,83	0	-1
2 O.F.	0	-0,86	1
3 O.F.	-0,8084	0,86	0
Saldo	0,0216	0	0

- 1 O.F.→ vendita dell’operazione più costosa;
- 2 O.F.→ acquisto a termine;
- 3 O.F. →acquisto a pronti.

Esercizio 3

- Sia dato un titolo a cedola fissa *x* di valore nominale 100 euro, vita a scadenza 10 anni, cedola annuale e quotato alla pari. Sapendo che il *TIR* di *x* è uguale a *11,5%* calcolare la cedola *C* del titolo e il valore attuale rispetto a tale tasso.

- Dall’equazione di equilibrio:

$$VN = C \cdot a_{\overline{n}|i} + VN \cdot (1+i)^{-n}$$

si deduce il valore della cedola

$$C = \frac{VN \cdot (1-(1+i)^{-n})}{a_{\overline{n}|i}} = 11{,}5$$

Esercizio 4

- Sia dato un titolo a cedola fissa x di valore facciale 110 euro, vita a scadenza 12 anni, cedola annuale di 12 euro e quotato alla pari. Calcolarne il *TIR* ed il valore attuale rispetto a tale tasso.

- Dall'equazione di equilibrio:

$$VN = C \cdot a_{\overline{n|}i} + VN \cdot (1+i)^{-n} =$$
$$= C \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} + VN \cdot (1+i)^{-n}$$
$$\Rightarrow 110 = 12 \cdot \frac{1-(1+i)^{-12}}{i} + 110 \cdot (1+i)^{-12}$$

si ottiene con un metodo di approssimazione:

$$i = TIR = 10{,}9091\%$$

Esercizio 5

- Sia dato un titolo a cedola fissa *x* di valore nominale 100 euro, vita a scadenza 2 anni, cedola annuale del 12% nominale e prezzo *P=97,5* euro. Calcolarne il *TIR* e il valore attuale *W(0,x)* secondo la legge esponenziale individuata dal *TIR*. Determinare inoltre la quantità ΔP di cui bisogna decrementare il prezzo affinché il *TIR* risulti uguale al 15%.

- L'equazione di equilibrio:

$$P = x \cdot (1 + TIR)^{-1} + (VN + x) \cdot (1 + TIR)^{-2}$$
$$97{,}5 = 12 \cdot (1 + TIR)^{-1} + 112 \cdot (1 + TIR)^{-2}$$

consente di trovare *TIR = 13,509%.*

- La nuova equazione di equilibrio è:

$$P + \Delta P = x \cdot (1 + TIR)^{-1} + (VN + x) \cdot (1 + TIR)^{-2}$$
$$\Rightarrow 97{,}5 + \Delta P = 12 \cdot (1 + 0{,}15)^{-1} + 112 \cdot (1 + 0{,}15)^{-2}$$
$$\Rightarrow \Delta P = -2{,}3771$$

Esercizio 6

- Sia dato un titolo a cedola fissa trimestrale del *10%* nominale annuo, vita a scadenza 15 anni e capitale di rimborso 100 euro. Calcolarne il *TIR* su base annua in caso di aggiudicazione alla pari. Sapendo inoltre che le cedole di tale titolo sono gravate di una ritenuta fiscale del *12,5%*, calcolarne il *TIR* su base annua al netto della ritenuta fiscale. Determinare infine con quale prezzo di aggiudicazione *P* si ottiene un *TIR* (lordo) del *12%* su base annua.

- Ricaviamo il tasso trimestrale:

$$i_{1/4} = \frac{j(4)}{4} = 0{,}025$$

- Il *TIR* in caso di aggiudicazione alla pari è:

$$TIR = i = (1 + i_{1/4})^4 - 1 = (1{,}025)^4 - 1 = 0{,}1038$$

- Le cedole lorde sono date da:

$$C = VR \cdot i_{1/4} = 100 \cdot 0{,}025 = 2{,}5$$

- Le cedole al netto delle ritenute fiscali sono:

$$C' = C \cdot (1 - \text{tasso}) = 2{,}1875$$

- Il TIR netto *i** si ottiene risolvendo l'equazione di equilibrio:

$$VR = C' \cdot a_{\overline{4n}|i*_{1/4}} + VR \cdot \left(1 + i *_{1/4}\right)^{-4n}$$

$$100 = 2{,}1875 \cdot \frac{1 - \left(1 + i *_{1/4}\right)^{-60}}{i *_{1/4}} + 100 \cdot \left(1 + i *_{1/4}\right)^{-60}$$

- Mediante interpolazione si ottiene (su base annua)

$$i * = 9{,}041\%.$$

- Il prezzo P con un TIR lordo j^* si ottiene dopo aver ricavato

$$j*_{1/4} = (1 + j*)^{1/4} - 1 = 0{,}0287$$

dalla relazione

$$P = C \cdot a_{\overline{4n}|j*_{1/4}} + VR \cdot \left(1 + j*_{1/4}\right)^{-4n}$$
$$= 2{,}5 \cdot \frac{1 - \left(1 + j*_{1/4}\right)^{-60}}{j*_{1/4}} + 100 \cdot \left(1 + j*_{1/4}\right)^{-60} = 89{,}3708$$

Esercizio 7

- Data la seguente forza d’interesse (intensità istantanea di interesse):

$$\delta(t) = \frac{i}{5 + 5 \cdot t \cdot i}$$

- Calcolare il prezzo di una obbligazione che paga cedole annue di 4 e rimborsa il capitale alla pari dopo tre anni (con *i = 5%*).
- Calcolare il TIR di detta obbligazione in caso di reinvestimento dei flussi intermedi al 6% in capitalizzazione composta.

$$v(t) = e^{-\int_0^t \delta(s)ds}$$

- Fattore di sconto:
- Integrale della forza d'interesse:

$$\int_0^t \delta(s)ds = \int_0^t \frac{i}{5+5\cdot s\cdot i}ds = \frac{1}{5}\cdot\int_0^t \frac{5\cdot i}{5+5\cdot s\cdot i}ds =$$
$$= \frac{1}{5}\cdot[\log(5+5\cdot s\cdot i)]_0^t = \frac{1}{5}\cdot(\log(5+5\cdot t\cdot i) - \log 5) =$$
$$= \frac{1}{5}\cdot\log\frac{5+5\cdot t\cdot i}{5} = \log(1+t\cdot i)^{1/5}$$

- Avremo perciò:

$$v(t) = (1 + t \cdot i)^{-1/5} = (1 + 0{,}05 \cdot t)^{-1/5}$$

- Ossia:

$$\left| \begin{array}{l} v(1) = 0{,}9903 \\ v(2) = 0{,}9811 \\ v(3) = 0{,}9724 \end{array} \right.$$

- Calcolo del valore attuale:

$$(P; 4; 4; 104)/(0; 1; 2; 3)$$
$$P = 4 \cdot v(1) + 4 \cdot v(2) + 104 \cdot v(3) = 109{,}02$$

- Reinvestimento flussi intermedi all'epoca tre:

$$V_3 = 4 \cdot 1{,}06^2 + 4 \cdot 1{,}06 + 104 = 112{,}73$$

- Nuovo scadenzario:

$$(P; 0; 0; V_3)/(0; 1; 2; 3)$$

- Calcolo del *TIR*:

$$P = V_3 \cdot (1+i)^{-3} \Rightarrow i = \left(\frac{V_3}{P}\right)^{1/3} - 1 = 0{,}011234$$

Esercizio 8

- Compro 10 zero coupon bond ad un anno che costano 97,51 e rimborsano 100 a scadenza nonché 25 obbligazioni biennali che pagano cedole annue al *4%* e rimborsano il capitale a 101.
- Sapendo che il mio *TIR* complessivo è il *4,5%* calcolare il prezzo delle obbligazioni.
- Calcolare quale sarebbe stato il *TIR* complessivo se il prezzo delle obbligazioni fosse stato pari a 100.

- Scadenzario dei due titoli:

$$z_1: \quad (97{,}51;\; 100)/(0;\; 1)$$
$$z_2: \quad (P; 4;\; 105)/(0;\; 1;\; 2)$$

- Scadenzario dell'operazione complessiva:

$$\theta: \quad (975{,}1 + 25P; 1.100;\; 2.625)/(0;\; 1;\; 2)$$

- Prezzo delle obbligazioni:

$$975{,}1 + 25P = \frac{1.100}{1{,}045} + \frac{2.625}{1{,}045^2} \rightarrow P = 99{,}2529$$

- Nuovo *TIR* (con prezzo pari a 100):

$$2.625 \cdot v^2 + 1.100 \cdot v - 3.475{,}1 = 0$$

- Si ottiene

$$v = 0{,}959984 \rightarrow i = \frac{1}{v} - 1 = 0{,}041684$$

- L'altra soluzione $v = -1{,}38$ non è accettabile.

Esercizio 9

- Un investitore compra un’obbligazione che garantisce una rendita perpetua con rate semestrali di 200 la prima delle quali scade tra 3 mesi.
- Gli viene offerto di cedere l’obbligazione in cambio di due pagamenti di 4.000 uno all’epoca *t* ed uno l’anno dopo.
- Calcolare l’epoca *t* che rende equivalenti le due operazioni (tasso annuo $i = 10\%$).

- Valore attuale della prima rendita (perpetua e anticipata):

$$VA_1 = 1{,}10^{1/4} \cdot \frac{200}{\sqrt{1{,}10} - 1} = 4.196{,}43$$

- Valore attuale dei due pagamenti:

$$VA_2 = 4.000 \cdot 1{,}10^{-t} + 4.000 \cdot 1{,}10^{-t-1} =$$
$$= 4.000 \cdot 1{,}10^{-t} \cdot (1{,}10^{-1} + 1) = 7.636{,}36 \cdot 1{,}10^{-t}$$

- Imponiamo l’equivalenza: $VA_1 = VA_2$.

- Si ottiene:

$$7.636{,}36 \cdot 1{,}10^{-t} = 4.196{,}43$$

$$\Rightarrow t = -\frac{\log \frac{4.196{,}43}{7.636{,}36}}{\log 1{,}10} = 6{,}2815$$