

## Indice

*Un teorema sulla convergenza in media*, di F. Rellich ..... pag. 2

*Problemi al contorno e agli autovalori della teoria  
delle piastre elastiche (stralcio)*, di K. O. Friedrichs ..... pag. 8

# Un teorema sulla convergenza in media

di

**F. Rellich** a Gottinga

Presentato da R. COURANT alla seduta del 24 gennaio 1930

## §1. Un teorema sulla convergenza in media.

Sia  $\mathfrak{M}$  un insieme infinito di funzioni (distinte)  $u(x, y)$  che siano tutte continue e differenziabili con continuità nell'interno di una regione  $G$  del piano  $xy$ ; il contorno di  $G$  sia costituito da un numero finito di curve chiuse con tangente continua a tratti, e non abbia cuspidi. Per tutte le funzioni di  $\mathfrak{M}$  esistano gli integrali

$$\iint_G u^2 dx dy, \quad \iint_G u_x^2 dx dy, \quad \iint_G u_y^2 dx dy,$$

e si abbia, per tutte le funzioni dell'insieme,

$$\iint_G u^2 dx dy < C, \quad \iint_G u_x^2 dx dy < C, \quad \iint_G u_y^2 dx dy < C,$$

con una stessa  $C$  fissata. Allora dall'insieme dato si può estrarre una successione  $u_n(x, y)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) che converge in media, cioè per la quale si ha

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \iint_G (u_n - u_m)^2 dx dy = 0.$$

La dimostrazione di questo teorema si può svolgere sfruttando la proprietà di completezza delle funzioni trigonometriche, considerando inizialmente un quadrato arbitrario con i lati paralleli agli assi, e poi approssimando la regione  $G$  con un numero finito di quadrati. Qui svolgo tuttavia una dimostrazione che non fa uso della suddetta proprietà, e si basa solo su stime elementari di integrali<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Ringrazio il signor K. FRIEDRICHS per avermi suggerito di dare questa impostazione alla dimostrazione seguente.

A tal fine suddividiamo il dominio  $G$  in un numero finito, diciamo  $N$ , di domini  $G_\nu$  di area  $g_\nu$  che non si sovrappongano e la cui forma sarà precisata più avanti. Per ogni funzione  $u$  consideriamo la funzione  $\bar{u}$ , che in ogni  $G_\nu$  è data da

$$(1) \quad \bar{u} = u^{(\nu)} = \frac{1}{g_\nu} \iint_{G_\nu} u \, dx \, dy;$$

$\bar{u}$  è pertanto una funzione costante a tratti in  $G$ .

Il nostro teorema segue evidentemente non appena si mostri che:

1) Esiste nell'insieme di funzioni dato una successione  $u_1(x, y), u_2(x, y), \dots$  tale che per ogni  $N = 1, 2, \dots$  risulta

$$(2) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \iint_G (\bar{u}_n(x, y) - \bar{u}_m(x, y))^2 \, dx \, dy = 0;$$

2) Per tutte le funzioni  $u$  e  $v$  dell'insieme e per ogni  $\varepsilon > 0$  si può far sì che

$$(3) \quad \left| \iint_G [(u - v)^2 - (\bar{u} - \bar{v})^2] \, dx \, dy \right| < \varepsilon$$

prendendo, indipendentemente da  $u$  e  $v$ , il numero  $N = N(\varepsilon)$  sufficientemente grande. (Si badi che  $\bar{u}$  e  $\bar{v}$  dipendono da  $N$ ).

La prima parte di questa tesi si ottiene come segue: per la (1) si ha, per ogni successione  $u_n(x, y)$  di funzioni dell'insieme dato,

$$\iint_G (\bar{u}_n(x, y) - \bar{u}_m(x, y))^2 \, dx \, dy = \sum_{\nu=1}^N (\sqrt{g_\nu} u_n^{(\nu)} - \sqrt{g_\nu} u_m^{(\nu)})^2$$

con

$$|\sqrt{g_\nu} u_n^{(\nu)}| \leq \sqrt{g_\nu} \sqrt{\frac{1}{g_\nu} \iint_G u_n^2 \, dx \, dy} \leq \sqrt{C}.$$

Per il teorema del punto di accumulazione di WEIERSTRASS esiste una sottosuccessione delle  $u_n(x, y)$  - denotiamo questa sottosuccessione ancora con  $u_n(x, y)$  - tale che le  $N$  successioni  $\sqrt{g_1} u_n^{(1)}, \sqrt{g_2} u_n^{(2)}, \dots, \sqrt{g_N} u_n^{(N)}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) convergono, e

$$(2a) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^N (\sqrt{g_\nu} u_n^{(\nu)} - \sqrt{g_\nu} u_m^{(\nu)})^2 = 0.$$

Effettuando questa costruzione per  $N = 1, 2, \dots$  ecc. e facendo in modo che, per le successioni così ottenute, la successiva sia interamente contenuta nella

precedente, la successione diagonale di questo schema soddisfa (2a) per ogni  $N$ . Con questo la prima parte della tesi, cioè l'uguaglianza (2), è dimostrata.\*

Per dimostrare la seconda parte, poniamo per brevità

$$(4) \quad u - v = w, \quad \bar{u} - \bar{v} = \bar{w}$$

ed otteniamo per il primo membro della (3)

$$(5) \quad \left| \iint_G (w^2 - \bar{w}^2) dx dy \right| \leq \iint_G |w + \bar{w}| \cdot |w - \bar{w}| dx dy \\ \leq \sqrt{\iint_G (w + \bar{w})^2 dx dy} \cdot \sqrt{\iint_G (w - \bar{w})^2 dx dy}.$$

Ora, essendo

$$\iint_G (w + \bar{w})^2 dx dy \leq 2 \iint_G w^2 dx dy + 2 \iint_G \bar{w}^2 dx dy$$

si ha per la (4)

$$\iint_G (w + \bar{w})^2 dx dy \leq 16C.$$

Abbiamo dunque concluso se mostriamo che l'integrale

$$\iint_G (w - \bar{w})^2 dx dy = \sum_{\nu=1}^N \iint_{G_\nu} (w - \bar{w}^{(\nu)})^2 dx dy$$

si può rendere arbitrariamente piccolo per tutte le funzioni  $w$  *simultaneamente* prendendo  $N$  sufficientemente grande.<sup>†</sup> Ma ciò segue dalla disuguaglianza

$$(6) \quad \iint_{G_\nu} (w - \bar{w})^2 dx dy \leq c_N \iint_{G_\nu} (w_x^2 + w_y^2) dx dy,$$

dimostrata più avanti, nella quale  $c_N$  denota una costante che può essere resa arbitrariamente piccola prendendo  $N$  sufficientemente grande, indipendentemente dalla funzione  $w$ . Sulla base di questa disuguaglianza si ha infatti

$$\iint_G (w - \bar{w})^2 dx dy \leq c_N \iint_G (w_x^2 + w_y^2) dx dy,$$

e siccome

$$\iint_G (w_x^2 + w_y^2) dx dy \leq 2 \iint_G (u_x^2 + v_x^2 + u_y^2 + v_y^2) dx dy \leq 8C$$

---

\*NdT: poiché la successione diagonale è limitata in  $L^2(G)$ , la (2) equivale alla *convergenza debole* in tale spazio.

†NdT: cioè  $\bar{w} \rightarrow w$  in  $L^2(G)$ , per  $N \rightarrow +\infty$ , *uniformemente* rispetto a  $w$ .

si ha anche

$$\iint_G (w - \bar{w})^2 dx dy \leq c_N \cdot 8C,$$

con il che tutto è dimostrato.

La disuguaglianza (6) si può dimostrare seguendo K. FRIEDRICHS<sup>2</sup> per particolari domini  $G_\nu$  tramite semplici stime di integrali. A tal fine prendiamo come  $G_\nu$  innanzitutto domini delimitati da un segmento di lunghezza  $k_\nu$  parallelo all'asse  $x$ , da due rette perpendicolari ad esso e da una curva  $y = y(x)$  differenziabile con continuità a tratti e distante al massimo  $h_\nu$  e almeno  $k_\nu$  dalla base; successivamente “triangoli” rettangoli i cui cateti sono segmenti paralleli agli assi aventi lunghezza non superiore ad  $h_\nu$ , e la cui “ipotenusa” consista di tratti di curva differenziabili con continuità e aventi proiezione unica su entrambi i cateti. Poi prendiamo come  $G$  i domini che si ottengono ruotando i precedenti di un angolo arbitrario. Pensiamo ora il dominio  $G$  suddiviso<sup>3</sup> in un numero finito di tali domini  $G_\nu$  per i quali le  $h_\nu$  e  $k_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots, N$ ) stanno al di sotto di una quantità che tende a 0 per  $N \rightarrow \infty$ ; richiediamo inoltre che per ogni  $\nu$  valga la disuguaglianza  $h_\nu \leq a k_\nu$  con un numero  $a$  che dipende solo dal dominio  $G$ .

Per ogni dominio  $G_\nu$ , essendo  $\iint_{G_\nu} (w - \bar{w}) dx dy = 0$  si può applicare la disuguaglianza citata e il ragionamento di FRIEDRICHS porge immediatamente

$$\iint_{G_\nu} (w - \bar{w})^2 dx dy \leq b \cdot h_\nu^2 \iint_{G_\nu} (w_x^2 + w_y^2) dx dy,$$

dove  $b$  è un numero fissato, dipendente solo dal dominio  $G$ . Posto

$$h_N = \max_{\nu=1,2,\dots,N} h_\nu,$$

il prodotto  $b \cdot h_N^2$  ha evidentemente le proprietà richieste per la costante  $c_N$  nella (6). Con ciò la dimostrazione del teorema enunciato inizialmente è portata completamente a termine.

Si noti che questo teorema e la dimostrazione testé presentata si estendono immediatamente al caso di più di due variabili.

---

<sup>2</sup>K. FRIEDRICHS: *Die Randwert- und Eigenwertprobleme...*, Math. Ann. **98** in partic. pagg. 230–232. (Il secondo membro della seconda formula a pag. 231 e della prima formula a pag. 232 deve essere moltiplicato per un fattore  $L$ ).

<sup>3</sup>È facile vedere che questa suddivisione è sempre possibile.

## §2. Applicazioni.

1) Entrambi i noti teoremi sulla molteplicità finita e sulla crescita infinita degli autovalori di un operatore lineare autoaggiunto si ottengono immediatamente dal teorema del §1. Lo dimostro con riferimento all'equazione differenziale  $u_{xx} + u_{yy} + \lambda u = 0$  e devo ovviamente verificare quanto segue: data una successione di funzioni  $u^{(n)}(x, y)$  linearmente indipendenti e corrispondenti costanti  $\lambda_n$  tali che: 1)  $u^{(n)}(x, y)$  è continua nella regione chiusa  $G$ , differenziabile due volte con continuità nell'interno di  $G$  e soddisfa ivi l'equazione differenziale

$$(7) \quad u_{xx}^{(n)} + u_{yy}^{(n)} + \lambda_n u^{(n)} = 0.$$

2)  $u^{(n)}(x, y)$  si annulla sul contorno di  $G$ .

3) L'integrale  $\iint_G [(u_x^{(n)})^2 + (u_y^{(n)})^2] dx dy$  esiste.

4)  $\iint_G (u^{(n)})^2 dx dy = 1$ .

*Allora non esiste un maggiorante  $C$  tale che la disuguaglianza  $|\lambda_n| < C$  valga per ogni  $N$ .*

Se infatti fosse  $|\lambda_n| < C$ , allora siccome

$$\iint_G [(u_x^{(n)})^2 + (u_y^{(n)})^2] dx dy = \lambda_n$$

(la trasformazione di GREEN, mediante la quale si ricava questa formula dalla (7), si può applicare alle funzioni  $u^{(n)}(x, y)$  sotto le nostre ipotesi) si avrebbe anche

$$\iint_G (u_x^{(n)})^2 dx dy < C, \quad \iint_G (u_y^{(n)})^2 dx dy < C;$$

quindi per il §1 si avrebbe, per una sottosuccessione,

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \iint_G (u^{(n)} - u^{(m)})^2 dx dy = 0.$$

Ma questo è impossibile perché si può supporre che le funzioni siano mutualmente ortogonali, da cui, stante la loro normalizzazione, segue che per  $n \neq m$

$$\iint_G (u^{(n)} - u^{(m)})^2 dx dy = 2.$$

Con le stesse considerazioni si può dimostrare il noto teorema secondo il quale

la generica (anche non autoaggiunta) equazione differenziale ellittica omogenea può avere soltanto un numero finito di soluzioni linearmente indipendenti che si annullano sul contorno.

2) Come ulteriore applicazione si ottiene immediatamente il noto fatto che da ogni successione minimizzante di un problema di minimo che conduce ad un problema agli autovalori del tipo anzidetto si può estrarre una sottosuccessione che converge in media. Infatti, ad esempio, per il problema

$$\iint_G (u_x^2 + u_y^2) dx dy = \text{Min}, \quad \iint_G u^2 dx dy = 1$$

$$u = 0 \text{ sul contorno di } G$$

segue che, per ogni successione minimizzante  $u^{(n)}(x, y)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), gli integrali

$$\iint_G (u_x^{(n)})^2 dx dy, \quad \iint_G (u_y^{(n)})^2 dx dy$$

e naturalmente anche

$$\iint_G (u^{(n)})^2 dx dy$$

sono limitati indipendentemente da  $n$ , per cui il nostro teorema porge immediatamente la tesi.

# Problemi al contorno e agli autovalori della teoria delle piastre elastiche. (Applicazione dei metodi diretti del calcolo delle variazioni)

di

Kurt Friedrichs a Gottinga

(omissis)

## II. Il problema della piastra omogenea libera.

### 1. Positura del problema.

(omissis)

$$(28) \quad H[\varphi] \leq c D[\varphi] \text{ sotto la condizione } \iint_G \varphi \, dx \, dy = 0 \quad {}^{33)}$$

(omissis)

### 3. Dimostrazione delle disuguaglianze integrali.\*

(omissis)

La disuguaglianza (28) segue<sup>34a)</sup> chiaramente dalla disuguaglianza

$$\iint_G dx \, dy \cdot \iint_G \varphi^2 \, dx \, dy - \left( \iint_G \varphi \, dx \, dy \right)^2 \leq c D[\varphi] \quad {}^{35)}$$

---

\*NdT: l'autore svolge la dimostrazione della disuguaglianza (28), dove:  $H[\varphi]$  e  $D[\varphi]$  sono dati da  $H[\varphi] = \iint_G \varphi^2 \, dx \, dy$ ;  $D[\varphi] = \iint_G (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) \, dx \, dy$ ;  $G$  è un dominio limitato, semplicemente connesso, il cui contorno  $\Gamma$  consiste di un numero finito di curve dotate di tangenti che variano con continuità fino agli estremi, le cuspidi sono escluse; la lettera  $c$  denota un'opportuna costante dipendente solo dal dominio  $G$ ; la funzione  $\varphi$  è continua fino al contorno  $\Gamma$  ed è dotata di derivate prime continue nell'interno di  $G$ .

<sup>33)</sup> Cfr. H. Poincaré, Acta Math. **20**, pag. 98 e segg.

<sup>34a)</sup> In effetti è equivalente ad essa.

<sup>35)</sup> Una simile trattazione si trova, per un diverso scopo, in H. Poincaré, cfr. J. Hadamard, Leçons sur la propagation des ondes, pagg. 28–31. La disuguaglianza (28) è in effetti equivalente al fatto che il secondo autovalore della membrana “liberamente vibrante” è positivo. Ciò segue subito dall'esistenza della corrispondente seconda autofunzione, nella cui dimostrazione ci si serve tuttavia proprio della disuguaglianza (28).

(senza condizioni accessorie), la quale, come si verifica facilmente, si può portare nella forma

$$(32) \quad \iint_G \iint_G (\varphi_1 - \varphi_2)^2 dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \leq 2c D[\varphi]$$

dove nell'integrale al primo membro si intendono con  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  i valori della funzione  $\varphi$  in due punti  $P_1 = (x_1, y_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2)$  che variano nel dominio  $G$  indipendentemente l'uno dall'altro. La forma di questo integrale suggerisce di collegare i punti  $P_1$  e  $P_2$  con una curva  $L_{12}$  di ascissa curvilinea  $s$  e giacente all'interno di  $G$ , e di sfruttare la maggiorazione

$$(\varphi_1 - \varphi_2)^2 \leq L \int_{P_1}^{P_2} \varphi_s^2 ds \leq L \int_{P_1}^{P_2} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) ds$$

dove  $L$  è un maggiorante fissato per la lunghezza di tutte le curve  $L_{12}$ . Usando la maggiorazione per  $(\varphi_1 - \varphi_2)^2$  così trovata, si vede che resta da dimostrare soltanto la disuguaglianza

$$L \iint_G \iint_G \int_{P_1}^{P_2} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) ds dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \leq 2c D[\varphi].$$

A tal fine è sufficiente ridurre i tre integrali al primo membro ad una sola integrazione su  $G$ . Vogliamo far ciò inizialmente per un dominio semplice, e precisamente per un dominio  $T$  delimitato da una base dritta, diciamo il segmento dell'asse  $x$  da 0 fino ad  $a$ , e poi da due lati perpendicolari ad esso e da una curva  $T$  di equazione  $y = \bar{y}(x)$  dotata di tangente continua e distante dalla base al massimo  $h$  e almeno  $k$ .

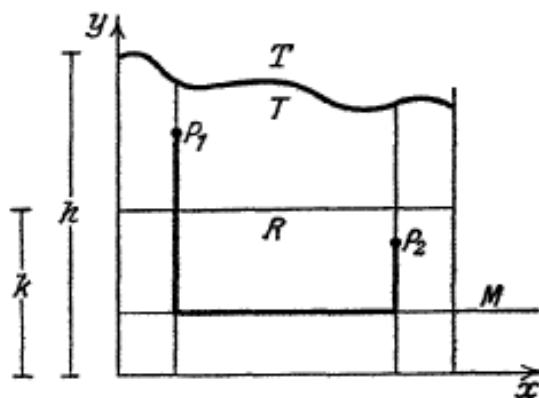


Fig. 3.

Affinché il cammino di integrazione  $L_{12}$  sia comodo da trattare, osserviamo che nel rettangolo  $R$ , individuato nel dominio  $G$  dalla parallela all'asse  $x$  distante  $k$  da esso, per ogni funzione  $\varphi$  esiste una ulteriore parallela  $M$  tale che

$$(33) \quad \int_M (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) dx = \frac{1}{k} \iint_R (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) dx dy.$$

Ora colleghiamo i due punti  $P_1$  e  $P_2$  all'interno di  $T$  come segue: procediamo a partire da essi lungo parallele all'asse  $y$  fino ad incontrare la retta  $M$ , e poi colleghiamo le due intersezioni con il segmento di tale retta delimitato da esse. L'integrale  $\int (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) ds$  lungo questo cammino si maggiora integrando lungo i segmenti di parallele condotti

da  $P_1$  e  $P_2$ , tutti interi, e lungo tutto il segmento  $M$ . In tal modo si ottiene la seguente maggiorazione:

$$\begin{aligned} \iint_T \iint_T (\varphi_1 - \varphi_2)^2 dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 &\leq L \iint_T dx_2 dy_2 \cdot \iint_T \left\{ \int_0^{\bar{y}(x_1)} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) dy \right\} dx_1 dy_1 \\ &+ L \iint_T dx_1 dy_1 \cdot \iint_T \left\{ \int_0^{\bar{y}(x_2)} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) dy \right\} dx_2 dy_2 \\ &+ L \left( \iint_T dx dy \right)^2 \cdot \int_M (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) dx. \end{aligned}$$

L'integrale

$$\iint_T \left\{ \int_0^{\bar{y}(x_1)} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) dy \right\} dx_1 dy_1,$$

per esempio, possiamo stimarlo per eccesso con

$$h \int_0^a \left\{ \int_0^{\bar{y}(x_1)} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) dy \right\} dx_1 = h \iint_T (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) dx dy$$

e così otteniamo, usando il valore (33) di  $\int_M (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) dx$  dato sopra, la disuguaglianza cercata

$$\iint_T \iint_T (\varphi_1 - \varphi_2)^2 dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \leq \left( 2a + \frac{a^2}{k} \right) L h^2 \iint_T (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) dx dy.$$

Possiamo dimostrare la disuguaglianza (32) per il dominio più generale  $G$  qui considerato ricoprendolo con un numero finito, diciamo  $N$ , di sottodomini  $T_i$  <sup>35a)</sup> del tipo dianzi descritto, in modo tale che ogni punto appartenga ad uno di essi. In tal modo si ha ovviamente

$$\iint_G \iint_G (\varphi_1 - \varphi_2)^2 dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \leq \sum_{i_1, i_2=1}^N \iint_{T_{i_1}} \iint_{T_{i_2}} (\varphi_1 - \varphi_2)^2 dx_1 dy_1 dx_2 dy_2.$$

Agli integrali sotto il segno di sommatoria possiamo applicare lo stesso ragionamento di prima; se invece i punti  $P_1$  e  $P_2$  appartengono a due diversi domini  $T_{i_1}$  e  $T_{i_2}$  allora per ogni funzione  $\varphi$  dobbiamo collegare i due segmenti  $M$  giacenti nei corrispondenti rettangoli  $R$  con una linea  $M_{i_1 i_2}$  tale che l'integrale esteso ad essa sia

$$\int_{M_{i_1 i_2}} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) ds \leq c \iint_G (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) dx dy$$

dove  $c$  è una costante dipendente solo dal dominio  $G$ . Ci si convince facilmente che ciò è possibile.

(omissis)

Tratto da: *Die Randwert- und Eigenwertprobleme aus der Theorie der elastischen Platten. (Anwendung der direkten Methoden der Variationsrechnung)*, Math. Ann. **98** (1928), 205–247 (cfr. [www.DigiZeitschriften.de](http://www.DigiZeitschriften.de))  
Trad. it. A. Greco, Università di Cagliari, 5-1-2021.

<sup>35a)</sup> Che si possono anche sovrapporre l'un l'altro.