ANALISI MATEMATICA I - CORSO DI LAUREA IN FISICA

IL CALCOLO DIFFERENZIALE

prof. Antonio Greco

1 DICEMBRE 2020 -
8 GENNAIO 2021

13 LEZIONI (27%)

MA 1 DIC 2020

DEFINIZIONE: CONSIDERIAMO UNA FUNZIONE $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, E FISSIAMO UN PUNTO $x_0 \in (a,b)$.

SE ESISTE FINITO IL LIMITE DEL RAPPORTO INCREMENTALE, CIOÈ IL LIMITE

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

IN CASO AFFERMATIVO, LA FUNZIONE f SI DICE DERIVABILE NEL PUNTO x_0, ED IL VALORE DEL SUDDETTO LIMITE SI CHIAMA DERIVATA DI f IN x_0 E SI INDICA CON $f'(x_0)$ OPPURE CON $\frac{df}{dx}(x_0)$ O ANCHE $\dot{f}(x_0)$ OVVERO $Df(x_0)$, ECCETERA.

SE f RISULTA DERIVABILE IN OGNI PUNTO $x \in (a,b)$, RESTA DEFINITA LA FUNZIONE DERIVATA $f'(x)$.

SE LA FUNZIONE $f'(x)$ È DERIVABILE A SUA VOLTA, LA SUA DERIVATA SI INDICA CON $f''(x)$, O CON $\frac{d^2 f}{dx^2}$, ECCETERA, E SI CHIAMA DERIVATA SECONDA DI f.

PROCEDENDO IN QUESTO MODO SI POSSONO DEFINIRE LA DERIVATA TERZA $f'''(x) = \frac{d^3 f}{dx^3}$, LA DERIVATA QUARTA, ECCETERA.

LA NOTAZIONE PER INDICARE LA DERIVATA ENNESIMA È

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}$$

E SI INTENDE CHE $f^{(0)}(x) = f(x)$.

ESEMPIO: POSTO $f(x) = mx + q$ CON $m, q \in \mathbb{R}$. SI HA CHE

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{mx + q - (mx_0 + q)}{x - x_0} = m$$

PER OGNI $x \neq x_0$, QUINDI

$$\frac{d}{dx}(mx + q) = m.$$

LO STUDENTE PUÒ DIMOSTRARE CHE LE UNICHE $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ AVENTI RAPPORTO INCREMENTALE COSTANTE SONO I POLINOMI DI GRADO $n \leq 1$.

CASI PARTICOLARI: PONENDO $m = 0$ NEL RISULTATO PRECEDENTE, SI TROVA $\boxed{\frac{d}{dx} q = 0.}$ PONENDO $m = 1$ E $q = 0$ SI TROVA $\boxed{\frac{d}{dx} x = 1.}$

MA 1 DIC 2020

ALTRO ESEMPIO: VERIFICHIAMO CHE $\frac{d}{dx} \log|x| = \frac{1}{x}$ PER OGNI $x \neq 0$. CONSIDERIAMO IL RAPPORTO $\frac{\log|x+h| - \log|x|}{h}$

PER $|h| < |x|$. PER LA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE SI HA

$$|x| = |x+h-h| \leq |x+h| + |h|$$

E QUINDI $|h| < |x+h| + |h|$, IL CHE IMPLICA $|x+h| > 0$.

INOLTRE SI HA CHE

$$-\frac{h}{x} \leq \frac{|h|}{|x|} < 1$$

E QUINDI $1 + \frac{h}{x} > 0$.

PER LE PROPRIETÀ DEI LOGARITMI, SI HA

$$\frac{\log|x+h| - \log|x|}{h} = \frac{1}{h} \log\frac{|x+h|}{|x|}$$

$$= \frac{1}{h} \log\left|\frac{x+h}{x}\right| = \frac{1}{h} \log\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$= \log\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right] \text{ PER } 0<|h|<|x|.$$

SAPENDO CHE LA FUNZIONE LOGARITMICA È CONTINUA, RESTA DA TROVARE IL LIMITE

$$\lim_{h\to 0} \left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}.$$

POSTO $\frac{h}{x} = t$, SI HA:

$$\lim_{h\to 0} \left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} =$$

$$= \lim_{t\to 0} (1+t)^{\frac{1}{tx}} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}}$$

PER QUANTO VISTO IL 18 NOVEMBRE.

QUINDI $\lim_{h\to 0} \frac{\log|x+h| - \log|x|}{h}$

$= \log e^{1/x} = \frac{1}{x}$ COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

ME 2 DIC 2020

TEOREMA: SE $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ È DERIVABILE IN UN PUNTO $x_0\in(a,b)$ ALLORA ESSA È ANCHE CONTINUA IN TALE PUNTO (LA DERIVABILITÀ IMPLICA LA CONTINUITÀ).

DIMOSTRAZIONE: SUPPONIAMO CHE

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0).$$

ALLORA LA FUNZIONE

$$\boxed{g(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)}$$

SODDISFA $\lim_{x\to x_0} g(x)=0$. INOLTRE SI PUÒ SCRIVERE

$$\boxed{f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+g(x)(x-x_0)}$$

DA CUI SEGUE LA CONTINUITÀ DI f IN x_0:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

NON VALE IL VICEVERSA, IN QUANTO ESISTONO FUNZIONI CONTINUE NON DERIVABILI. WEIERSTRASS COSTRUÌ UN FAMOSO ESEMPIO DEFINENDO $f(x)$ CONTINUA IN UN INTERVALLO E NON DERIVABILE IN NESSUN PUNTO USANDO UNA SERIE OPPORTUNA. IN QUESTA SEDE CI LIMITIAMO AD OSSERVARE CHE $f(x)=|x|$ È CONTINUA PER OGNI $x\in\mathbb{R}$ E LA SUA DERIVATA È

$$\frac{d}{dx}|x|=\begin{cases}1, & \text{SE } x>0\\ -1, & \text{SE } x<0\end{cases}$$

INOLTRE $f(x)=|x|$ NON È DERIVABILE NEL PUNTO $x_0=0$ PERCHÉ

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}1, & \text{SE } x>0\\ -1, & \text{SE } x<0\end{cases}$$

QUINDI $\lim_{x\to x_0^{\pm}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\pm 1$

E PERCIÒ IL LIMITE PER $x\to x_0$ NON ESISTE IN QUANTO IL LIMITE DESTRO È DIVERSO DAL LIMITE SINISTRO.

DEFINIZIONE: I LIMITI DESTRO E SINISTRO,

$$\lim_{x\to x_0^{\pm}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

SE ESISTONO FINITI, SI DICONO DERIVATA DESTRA E DERIVATA SINISTRA.

VERIFICHIAMO CHE $f(x)=|x|$ È CONTINUA. SE $x\neq 0$ SAPPIAMO CHE f È DERIVABILE E QUINDI ANCHE CONTINUA. ESSENDO $f(0)=|0|=0$, DOBBIAMO VERIFICARE CHE $\lim_{x\to 0}|x|=0$ MA QUESTO SEGUE IMMEDIATAMENTE DALLA DEFINIZIONE DI LIMITE: PRESO $\varepsilon>0$ SI HA $f(x)=|x|\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ PER OGNI $x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ CON $x_0=0$ E $\delta=\varepsilon$.

GI 3 DIC 2020

LO SVILUPPO DEL PRIMO ORDINE

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + g(x)(x-x_0)}$$

RICAVATO NELLA LEZIONE DEL 2/12 PER UNA FUNZIONE f DERIVABILE NEL PUNTO x_0 SI PUÒ RISCRIVERE

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) + g(x)(x-x_0)$$

FORMULA CHE PERMETTE DI CONFRONTARE L'INCREMENTO, DETTO ANCHE VARIAZIONE,

$\Delta f = f(x) - f(x_0)$ CON L'INCREMENTO $\Delta x = x - x_0$, SCRIVENDO

$$\boxed{\Delta f = f'(x_0) \cdot \Delta x + g(x)\Delta x}$$

L'ULTIMO TERMINE, $g(x)\Delta x$, HA LA PROPRIETÀ CHE

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

E PERCIÒ SI CONSIDERA TRASCURABILE RISPETTO A Δx QUANDO $\Delta x \to 0$.

IL TERMINE PRINCIPALE AL SECONDO MEMBRO, QUANDO $\Delta x \to 0$, È QUINDI $df = f'(x_0)\Delta x$, DETTO DIFFERENZIALE DELLA FUNZIONE f NEL PUNTO x_0.

OSSERVAZIONE: LA FUNZIONE $f(x) = x$ È DERIVABILE CON $f'(x) = 1$, QUINDI $df = dx = \Delta x$, E

PERCIÒ, SE ORA INDICHIAMO CON f UNA QUALUNQUE FUNZIONE DERIVABILE, POSSIAMO SCRIVERE

$$\boxed{df = f' \, dx.}$$

INTRODUCIAMO ORA IL SIMBOLO DI LANDAU « o PICCOLO »

DATE DUE FUNZIONI f E g, SE

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad \text{SI SCRIVE}$$

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{PER } x \to x_0.$$

CON QUESTA NOTAZIONE, LA FORMULA

$$\boxed{\Delta f = f'(x_0) \cdot \Delta x + g(x)\Delta x}$$

SI PUÒ RISCRIVERE

$$\Delta f = df + o(dx).$$

GI 3 DIC 2020

I CONCETTI APPENA INTRODOTTI CON RIFERIMENTO AD UNA FUNZIONE DERIVABILE f SI POSSONO APPROFONDIRE NEL CASO IN CUI ESISTANO LE DERIVATE SUCCESSIVE.

CONSIDERIAMO UNA FUNZIONE $f: (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ DOTATA DELLE DERIVATE $f', \dots, f^{(n-1)}$ IN (a,b) CON $n \geq 2$, E DELLA DERIVATA $f^{(n)}(x_0)$, $x_0 \in (a,b)$. SI PUÒ DIMOSTRARE PER INDUZIONE CHE

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right)$$

SI CONSTATA CHE, PER $n=1$, QUESTA FORMULA SI RIDUCE A

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)}$$

LA FORMULA SOPRA INDICATA, VALIDA PER $n \geq 1$ PURCHÉ ESISTANO LE DERIVATE RICHIESTE, SI CHIAMA FORMULA DI TAYLOR, ED IL TERMINE

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

VIENE DETTO « RESTO » E SI PUÒ SCRIVERE IN VARIE FORME, COME AD ESEMPIO: $o\left((x-x_0)^n\right)$ « RESTO DI PEANO ».

GI 3 DIC 2020

UN'ALTRA CONSEGUENZA DELL'UGUAGLIANZA

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)}$$

VALIDA PER QUALUNQUE FUNZIONE f DERIVABILE IN UN PUNTO x_0 È CHE, POSTO $y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

CHE È UN POLINOMIO DI GRADO $n \leq 1$ E PERCIÒ HA PER GRAFICO UNA RETTA, SI PUÒ SCRIVERE $f(x) = y(x) + o(x-x_0)$

OVVERO $\boxed{f(x) - y(x) = o(x-x_0)}$

SI DICE CHE LA RETTA DI EQUAZIONE $y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ È LA RETTA TANGENTE AL GRAFICO DI f NEL PUNTO DI ASCISSA x_0.

VE 4 DIC 2020

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DELLA DERIVATA: $f'(x_0)$ È IL COEFFICIENTE ANGOLARE DELLA RETTA TANGENTE AL GRAFICO DI f NEL PUNTO x_0.

LA DEFINIZIONE DELLA DERIVATA SI PUÒ APPLICARE FACILMENTE ALLA FUNZIONE $f(x) = x^2$.

FISSATO $x_0 \in \mathbb{R}$, SI HA:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} =$$

$$= \frac{(x + x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = x + x_0 \quad \text{PER } x \neq x_0$$

PERCIÒ $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$

$$= \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = x_0 + x_0 = 2x_0.$$

PER L'ARBITRARIETÀ DI x_0, POSSIAMO SCRIVERE $\dfrac{d}{dx} x^2 = 2x$.

VEDIAMO UN CASO PIÙ GENERALE:

CONSIDERIAMO $f(x) = x^n$, n INTERO POSITIVO. FISSATO $x_0 \in \mathbb{R}$, SI HA $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{x^n - x_0^n}{x - x_0} =$

$$= \frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h} = \frac{1}{h} \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} h^k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} h^{k-1}$$

E SICCOME $\displaystyle\lim_{h \to 0} h^{k-1} = 0$ SE $k > 1$,

SI TROVA $\displaystyle\lim_{h \to 0} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} h^{k-1} =$

$$= \binom{n}{1} x_0^{n-1} = n x_0^{n-1}.$$

VE 4 DIC 2020

PER L'ARBITRARIETÀ DI x_0, SI PUÒ SCRIVERE

$$\boxed{\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}.}$$

<u>OSSERVAZIONE</u>: PER $k = 1$ RISULTA $h^{k-1} = h^0 = 1$ PER OGNI h.

QUINDI IL $\displaystyle\lim_{h \to 0} h^{k-1}$ SI TROVA IMMEDIATAMENTE E VALE 1. POSSIAMO OSSERVARE, INOLTRE, CHE IL LIMITE $\displaystyle\lim_{h \to 0} h^0$ SI PRESENTA NELLA FORMA INDETERMINATA 0^0, MA QUESTA OSSERVAZIONE, BENCHÉ CORRETTA, È IRRILEVANTE AI FINI DEL CALCOLO DEL LIMITE.

VE 4 DIC 2020

IL CALCOLO DIFFERENZIALE

SE DUE FUNZIONI f E g SONO DERIVABILI IN UN PUNTO x_0, ALLORA, PRESI ARBITRARIAMENTE $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, LA FUNZIONE $\lambda f(x) + \mu g(x)$ È DERIVABILE, E SI HA

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\lambda f(x) + \mu g(x)\right)_{x=x_0} = \lambda \frac{df}{dx}(x_0) + \mu \frac{dg}{dx}(x_0).}$$

SI PARLA DI « LINEARITÀ DELL'OPERATORE DI DERIVAZIONE »

APPLICAZIONE: SAPENDO CHE

$$\frac{d}{dx} x^k = \begin{cases} 0, & k = 0; \\ k x^{k-1}, & k \geq 1 \end{cases}$$

SE NE DEDUCE CHE I POLINOMI $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

SONO DERIVABILI, E SI HA CHE

$$P'(x) = \left(a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k x^k\right)'$$
$$= \frac{d}{dx} a_0 + \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$$

SICCOME $\frac{d}{dx} a_0 = 0$, E PER LA LINEARITÀ DELL'OPERATORE DI DERIVAZIONE, SI TROVA $P'(x) =$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{d}{dx} x^k =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}.$$

CASI PARTICOLARI: SE $\mu = 0$ SI HA $\frac{d}{dx} \lambda f(x) = \lambda f'(x)$;

SE $\lambda = 1$ E $\mu = \pm 1$ SI TROVA

$$\frac{d}{dx}\left(f(x) \pm g(x)\right) = f'(x) \pm g'(x).$$

DIMOSTRAZIONE DELLA LINEARITÀ DELL'OPERATORE DI DERIVAZIONE

PRENDIAMO $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ E f, g DERIVABILI IN x_0. PER LA DEFINIZIONE DELLA DERIVATA, CONSIDERIAMO

$$\frac{\lambda f(x) + \mu g(x) - \left(\lambda f(x_0) + \mu g(x_0)\right)}{x - x_0}$$

$$= \lambda \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \mu \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

E SICCOME $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to f'(x_0)$ E $\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \to g'(x_0)$, LA TESI SEGUE DAL TEOREMA SUL LIMITE DI UNA SOMMA.

DERIVATA DEL PRODOTTO

SE f E g SONO DERIVABILI IN x_0, ALLORA LA FUNZIONE $f(x)\,g(x)$ È ANCH'ESSA DERIVABILE, E SI HA

$$\boxed{\frac{d}{dx}\Big(f(x)\,g(x)\Big)_{x=x_0} = f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0).}$$

IN GENERALE, NON È VERO CHE

$$\frac{d}{dx}\Big(f(x)\,g(x)\Big) = f'(x)\cdot g'(x)$$

E UN CONTROESEMPIO SI OTTIENE PRENDENDO $f(x) = g(x) = x$, COSICCHÉ $f'(x) = g'(x) = 1$ E $f(x)\,g(x) = x^2$, QUINDI

$$\frac{d}{dx}\Big(f(x)\,g(x)\Big) = 2x$$

MENTRE $f'(x)\,g'(x) = 1$

PER DIMOSTRARE LA REGOLA DI DERIVAZIONE DEL PRODOTTO, APPLICHIAMO LA DEFINIZIONE DELLA DERIVATA ALLA FUNZIONE $f(x)\,g(x)$.

VE 4 DIC 2020

SI HA: $$\frac{f(x)\,g(x) - f(x_0)\,g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{f(x)\,g(x) - f(x_0)\,g(x) + f(x_0)\,g(x) - f(x_0)\,g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,g(x) + f(x_0)\,\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

SAPENDO CHE

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to f'(x_0),$$

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \to g'(x_0),$$

E RICORDANDO CHE $g(x) \to g(x_0)$ PERCHÉ LA DERIVABILITÀ DI g IMPLICA LA CONTINUITÀ, LA TESI SEGUE.

ESEMPIO: SAPENDO CHE $\frac{d}{dx}x = 1$ E CHE $\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x}$ PER $x > 0$, SI HA CHE

$$\frac{d}{dx}\big(x \log x\big) = \log x + \frac{1}{x}\cdot x = 1 + \log x \quad \text{PER } x > 0.$$

INCIDENTALMENTE OSSERVIAMO CHE

$$x \log x = \log x^x \quad \text{PER } x > 0.$$

 ME 9 DIC 2020

LA COSIDDETTA « FORMA INDETERMINATA 0^0 »

SI CONTRAVVIENE ALLA BUONA NORMA DI NON INDICARE DUE COSE DIVERSE CON LO STESSO SIMBOLO (13 OTTOBRE). PER LA DEFINIZIONE DELL'ELEVAMENTO A POTENZA, SI HA $x^0 = 1$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$, QUINDI $0^0 = 1$.

QUANDO SI DICE CHE « 0^0 È INDETERMINATO » SI INTENDE CHE, SE $f, g \longrightarrow 0$, CON $g(x) > 0$ PER OGNI x, IL LIMITE DI $\left(g(x)\right)^{f(x)}$ DIPENDE DA f E DA g. PER FARE UNA VERIFICA, SIMILE A QUELLA DEL 20/10 PER LA FORMA $\infty - \infty$, FACCIAMO QUALCHE PREMESSA.

I. SE $b>1$, SI HA $\boxed{\lim_{x\to+\infty} b^x = +\infty}$

E $\boxed{\lim_{x\to+\infty} b^{x^2} = +\infty.}$ INFATTI

$x^2 \geq x \geq [x]$ PER $x \geq 1$,

QUINDI $b^{x^2} \geq b^x \geq b^{[x]}$.

SAPENDO CHE $b^n \longrightarrow +\infty$ (14/10)

LA CONCLUSIONE SEGUE DAL TEOREMA DEL CONFRONTO.

II. SE $c \in (0,1)$, ALLORA $\lim_{x\to+\infty} c^x = 0$:

INFATTI, POSTO $b = \frac{1}{c} > 1$ SI HA

$$\lim_{x\to+\infty} c^x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{b^x} = 0$$

COME ABBIAMO VISTO IL 17/11. SIMILMENTE,

$$\lim_{x\to+\infty} c^{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{b^{x^2}} = 0.$$

TUTTO CIÒ PREMESSO, VERIFICHIAMO CHE, SE $f, g \to 0$, CON $g(x) > 0$, IL LIMITE DI $\left(g(x)\right)^{f(x)}$ PUÒ:

1) NON ESISTERE;

2) ESSERE $+\infty$;

3) ESSERE UN QUALUNQUE $\ell \in [0, +\infty)$.

<u>CASO 2</u>: PONIAMO $f(x) = \frac{-1}{x}$ E $g(x) = c^{x^2}$ COSICCHÉ $f, g \to 0$ PER $x \to +\infty$. IN QUESTO CASO, SI HA

$$\left(g(x)\right)^{f(x)} = \left(c^{x^2}\right)^{-\frac{1}{x}} = c^{-x} = \left(\frac{1}{c}\right)^x$$
$$= b^x \longrightarrow +\infty.$$

<u>CASO 3</u>, $\ell = 0$. PONIAMO $f(x) = \frac{1}{x}$ E $g(x) = c^{x^2}$, COSICCHÉ RISULTA

$$\left(g(x)\right)^{f(x)} = \left(c^{x^2}\right)^{\frac{1}{x}} = c^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

CASO 3, $\ell \in (0,1)$. PONIAMO $f(x) = \frac{1}{x}$

E $g(x) = c^x$, COSICCHÉ RISULTA

$$(g(x))^{f(x)} = (c^x)^{\frac{1}{x}} = c \longrightarrow c \in (0,1).$$

CASO 3, $\ell > 1$. PONIAMO $f(x) = -\frac{1}{x}$,

E $g(x) = c^x$, COSICCHÉ SI HA:

$$(g(x))^{f(x)} = (c^x)^{-\frac{1}{x}} = c^{-1} \longrightarrow \frac{1}{c} > 1.$$

QUINDI BASTA SCEGLIERE $c = \frac{1}{\ell}$ PER FAR SÌ CHE $(g(x))^{f(x)} \to \ell$.

CASO 3, $\ell = 1$: PONIAMO $f(x) = 0$ (COSTANTE) E $g(x) = \frac{1}{x}$, COSICCHÉ

$$(g(x))^{f(x)} = \left(\frac{1}{x}\right)^0 = 1 \longrightarrow 1.$$

CASO 1: PONIAMO $f(x) = \frac{(-1)^{[x]}}{x} \to 0$

E $g(x) = c^x$, COSICCHÉ $(g(x))^{f(x)} =$

$$= (c^x)^{\frac{(-1)^{[x]}}{x}} = c^{(-1)^{[x]}} = \begin{cases} c, & \text{SE } [x] \text{ È PARI,} \\ \frac{1}{c}, & \text{SE } [x] \text{ È DISPARI} \end{cases}$$

QUINDI $(g(x))^{f(x)}$ NON AMMETTE LIMITE PER $x \longrightarrow +\infty$.

PER PROSEGUIRE NELLO STUDIO DEL CALCOLO DIFFERENZIALE, VERIFICHIAMO CHE $\frac{d}{dx}\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$

APPLICANDO LA DEFINIZIONE. SI HA:

$$\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{x-x_0} = \frac{x_0 - x}{x x_0 (x-x_0)} = \frac{-1}{x x_0}$$

QUINDI $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{x-x_0} = -\frac{1}{x_0^2}$ E

LA TESI SEGUE PER L'ARBITRARIETÀ DI $x_0 \neq 0$.

REGOLA DI DERIVAZIONE DELLA FUNZIONE $f(g(x))$, FUNZIONE COMPOSTA DI $f(t)$ E $g(x)$. SE $f(t)$ È DERIVABILE IN UN PUNTO $t_0 = g(x_0)$, E g È DERIVABILE NEL PUNTO x_0, LA FUNZIONE $f(g(x))$ È DERIVABILE NEL PUNTO x_0 E SI HA:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dx} f(g(x))\Big|_{x=x_0} &= f'(t_0)\cdot g'(x_0) \\ &= f'(g(x_0))\cdot g'(x_0) \end{aligned}}$$

PONENDO $t = g(x)$ E $y = f(t)$, LA STESSA REGOLA SI PUÒ SCRIVERE

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{dx}$$

ME 9 DIC 2020

DIMOSTRAZIONE: SI HA CHE

$$\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x-x_0} =$$

$$= \boxed{\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)} \cdot \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}$$

PER x TALE CHE $g(x) \neq g(x_0)$. MA SE $g(x) = g(x_0)$ SI HA

$$\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x-x_0} = 0 \cdot \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

COSICCHÉ IN OGNI CASO POSSIAMO SCRIVERE

$$\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)} = h(x,x_0)\cdot \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

DOVE $h(x,x_0) = \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$, $t = g(x)$ E $t_0 = g(x_0)$ SE $t \neq t_0$. MA ALLORA

$\lim\limits_{x\to x_0} h(x,x_0) = f'(t_0)$ PERCHÉ QUANDO $x \to x_0$ SI HA $g(x) \to g(x_0)$ PERCHÉ LA DERIVABILITÀ DI g IMPLICA LA CONTINUITÀ. LA TESI SEGUE PERCHÉ

$$\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \to g'(x_0)$$ E SI APPLICA IL TEOREMA SUL LIMITE DEL PRODOTTO.

GI 10 DIC 2020

APPLICAZIONE:

TROVIAMO LA DERIVATA DELLA FUNZIONE x^{-n} CON n INTERO POSITIVO. POSTO $f(t)=\frac{1}{t}$ E $g(x)=x^n$, SAPENDO CHE $f'(t)=-\frac{1}{t^2}$ E $g'(x)=n\,x^{n-1}$, PER LA REGOLA DI DERIVAZIONE DELLA FUNZIONE COMPOSTA SI TROVA:

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{d}{dx}\frac{1}{x^n} = \frac{d}{dx} x^{-n}$$

$$= f'(g(x))\cdot g'(x) = \boxed{\frac{-1}{g^2(x)}\cdot g'(x)} =$$

$$= \frac{-1}{x^{2n}}\cdot n\cdot x^{n-1} = -n\,x^{-n-1}.$$

CONVIENE SCRIVERE z INLUOGO DI $-n$, COSICCHÉ SI HA $\boxed{\frac{d}{dx}x^z = z\,x^{z-1}.}$

CONFRONTANDO QUESTA FORMULA CON QUELLA DEL 4 DICEMBRE, POSSIAMO DIRE CHE ESSA VALE PER OGNI $z\in\mathbb{Z}$.

CERTO, SE $z<0$ LA FUNZIONE x^z È DEFINITA PER $x\neq 0$. INOLTRE, SE $z=0$ SI HA $x^z=1$ PER OGNI x E QUINDI $\frac{d}{dx}x^z=0$ PER OGNI x, MENTRE $z\,x^{z-1}=0$ PER $x\neq 0$ ED È INDEFINITO PER $x=0$.

OSSERVAZIONE: I CALCOLI PRECEDENTI MOSTRANO CHE SE $g(x)$ È DERIVABILE, E $g(x)\neq 0$, ALLORA $\frac{d}{dx}\frac{1}{g(x)} = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$.

ALTRA APPLICAZIONE: PONIAMO ADESSO $f(t)=\log t$. SE $g(x)$ È UNA FUNZIONE POSITIVA E DERIVABILE, SI HA $\frac{d}{dx}\log g(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$

$$= \frac{1}{g(x)}\cdot g'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}.$$

ALTRA APPLICAZIONE: CONSIDERIAMO UNA FUNZIONE $f(x)$ DERIVABILE E PARI: $f(x)=f(-x)$ PER OGNI x. LA DERIVATA DEL PRIMO MEMBRO SI INDICA CON $f'(x)$. LA DERIVATA DEL SECONDO MEMBRO È DATA DA: $\frac{d}{dx}f(g(x))$ CON $g(x)=-x$, QUINDI $g'(x)=-1$.

MA ALLORA $\frac{d}{dx}f(-x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$ $=-f'(-x)$. CONFRONTANDO IL SECONDO MEMBRO CON IL PRIMO, SI TROVA

$$f'(x) = -f'(-x)$$

QUINDI LA DERIVATA f' DI UNA FUNZIONE f, DERIVABILE E PARI, È UNA FUNZIONE DISPARI. SIMILMENTE SI DIMOSTRA CHE LA DERIVATA DI UNA FUNZIONE DERIVABILE E DISPARI È UNA FUNZIONE PARI.

ESEMPIO: LA FUNZIONE $f(x) = x^2$ È DERIVABILE E PARI, E LA SUA DERIVATA $f'(x) = 2x$ È DISPARI.

GI 10 DIC 2020

COME ULTIMA APPLICAZIONE, VEDIAMO LA REGOLA DI DERIVAZIONE DEL RAPPORTO $\frac{f(x)}{g(x)}$ DI DUE FUNZIONI DERIVABILI, CON $g(x) \neq 0$. SI TROVA:

$$\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{d}{dx}\left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right) =$$

$$= f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} - f(x) \frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

$$= \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{g^2(x)}.$$

OSSERVAZIONE: IN PRATICA, A SECONDA DELL'ESPRESSIONE DI f E DI g, CONVIENE TALVOLTA NON USARE QUEST'ULTIMA ESPRESSIONE, E SCRIVERE

$$\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$= f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} - f(x) \frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

GI 10 DIC 2020

PROBLEMI [301]

1a) LA FUNZIONE $f(x) = |x| \cdot x$

È DERIVABILE NEL PUNTO $x_0 = 0$ IN

QUANTO $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|\, x}{x} = |x|$

E $\lim_{x \to 0} |x| = 0$, QUINDI $f'(0) = 0$.

1b) L'EQUAZIONE DELLA RETTA TANGENTE

AL GRAFICO DI $f(x)$ NEL PUNTO $x_0 = 0$ È

$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).}$ ESSENDO

$f(x_0) = |x_0|\, x_0 = 0$ E $f'(0) = 0$,

LA RETTA TANGENTE HA EQUAZIONE $y = 0$

CIOÈ È L'ASSE x.

1c) PER TRACCIARE IL GRAFICO DI

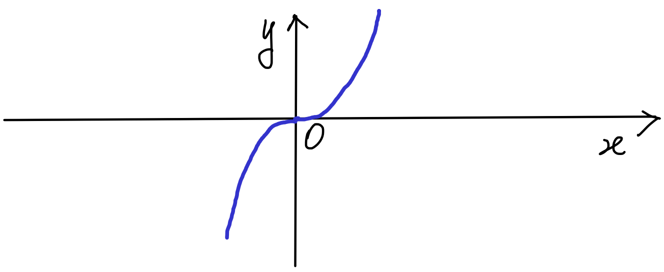
$f(x) = |x|\, x$ BASTA OSSERVARE CHE

f È DISPARI IN QUANTO $f(-x) = |-x| \cdot (-x)$

$= -|x|\, x = -f(x)$, E INOLTRE

$f(x) = x^2$ PER OGNI $x \geq 0$. QUINDI

IL GRAFICO È IL SEGUENTE:



VE 11 DIC 2020

PROBLEMI [301]

2a) IL DOMINIO DELLA FUNZIONE

$y(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ È L'INSIEME

$\{ x \in \mathbb{R} : |x| \leq R \}$. NOTA: L'ESPRESSIONE « FISSATO $R > 0$ » NON

SIGNIFICA « DARE AD R UN VALORE

NUMERICO A PIACERE » MA « RAGIONARE CON LA LETTERA R, CHE DEVE POTER ASSUMERE QUALUNQUE VALORE POSITIVO ». PER TRACCIARE IL GRAFICO

DI $y(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ OSSERVIAMO

INNANZITUTTO CHE $\boxed{y(x) \geq 0}$ PER

OGNI $x \in [-R, R]$. SEGUENDO IL

SUGGERIMENTO, ELEVIAMO AMBO I

MEMBRI AL QUADRATO, E TROVIAMO:

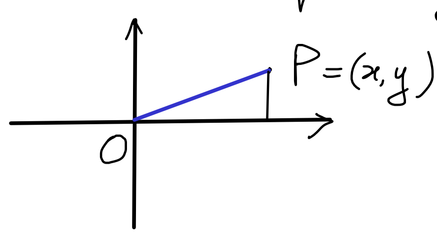
$$\boxed{x^2 + (y(x))^2 = R^2.}$$

RICORDIAMO CHE, PER IL TEOREMA

DI PITAGORA, LA DISTANZA DEL

PUNTO $P = (x, y)$ DALL'ORIGINE O

È DATA DA $\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$

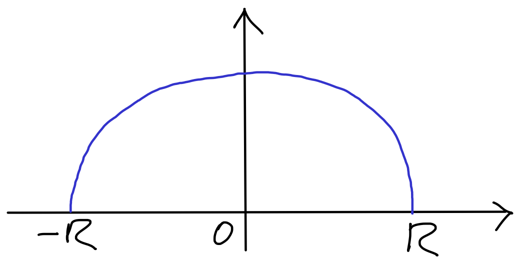


E QUINDI L'EQUAZIONE $x^2 + y^2 = R^2$

RAPPRESENTA LA CIRCONFERENZA

CENTRATA IN O E DI RAGGIO R.

METTENDO INSIEME QUESTA INFORMAZIONE CON LA CONDIZIONE $y(x) \geq 0$, SI DEDUCE CHE IL GRAFICO DI $y(x)$ È LA SEMICIRCONFERENZA SUPERIORE:



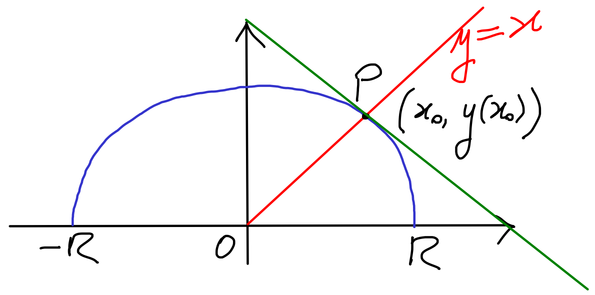
<u>OSSERVAZIONE:</u> IL DOMINIO DELLA FUNZIONE COMPOSTA $\sqrt{g(x)}$ È COSTITUITO DAI PUNTI x DEL DOMINIO DI $g(x)$ TALI CHE $g(x) \geq 0$.

NEL CASO PARTICOLARE $g(x) = R^2 - x^2$, LA DISUGUAGLIANZA DIVENTA $R^2 - x^2 \geq 0$ CIOÈ $x^2 \leq R^2$, CHE, ESSENDO $x^2 \geq 0$, EQUIVALE A $\sqrt{x^2} \leq \sqrt{R^2}$ QUINDI $|x| \leq R$. QUEST'ULTIMA SI PUÒ RISCRIVERE $-R \leq x \leq R$.

2b) OSSERVIAMO INNANZITUTTO CHE, POSTO $x_0 = \frac{R}{\sqrt{2}}$, SI TROVA

$$y(x_0) = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{2}} = \sqrt{\frac{R^2}{2}} = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

$$= x_0$$



VE 11 DIC 2020

QUINDI, INDICATO CON $P = (x_0, y(x_0))$ IL PUNTO DI TANGENZA, ESSO SI TROVA SULLA BISETTRICE DEL PRIMO QUADRANTE. MA LA RETTA TANGENTE AD UNA CIRCONFERENZA È PERPENDICOLARE AL RAGGIO, E PERCIÒ LA RETTA CERCATA AVRÀ COEFFICIENTE ANGOLARE $\frac{-1}{m}$, ESSENDO $m = 1$ IL COEFFICIENTE ANGOLARE DELLA BISETTRICE $y = x$. IN CONCLUSIONE, LA RETTA CERCATA HA EQUAZIONE

$$y = -(x - x_0) + y(x_0).$$

RICORDANDO L'INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DELLA DERIVATA, POSSIAMO SCRIVERE

$$\left(\frac{d}{dx}\sqrt{R^2 - x^2}\right)_{x = \frac{R}{\sqrt{2}}} = -1.$$

IN DEFINITIVA, L'EQUAZIONE CERCATA È $y = (x_0 - x) + y(x_0)$, CIOÈ

$$y = \frac{R}{\sqrt{2}} - x + \frac{R}{\sqrt{2}} \quad \text{E QUINDI}$$

$$\boxed{y = R\sqrt{2} - x.}$$

REGOLA DI DERIVAZIONE DELLA FUNZIONE INVERSA DI UNA DATA FUNZIONE DERIVABILE

CONSIDERIAMO UNA FUNZIONE f CONTINUA E STRETTAMENTE MONOTONA SU DI UN INTERVALLO. PROCEDENDO COME NELLA LEZIONE DEL 27 NOVEMBRE, SI DIMOSTRA CHE f È INVERTIBILE, DUNQUE ESISTE LA FUNZIONE INVERSA g, INDICATA CON f^{-1}, CHE RISULTA A SUA VOLTA CONTINUA E MONOTONA COME f. SE ESISTE $f'(x_0)$ IN UN PUNTO x_0 INTERNO AL DOMINIO DI f, E SE RISULTA $\boxed{f'(x_0) \neq 0}$, ALLORA LA FUNZIONE INVERSA, CIOÈ $x = g(y)$, È DERIVABILE NEL PUNTO $y_0 = f(x_0)$, E SI HA:

$$\boxed{g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}}$$

CON LA NOTAZIONE DI LEIBNIZ, SI PUÒ SCRIVERE $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

VE 11 DIC 2020

LA TESI SEGUE DAL FATTO CHE, POSTO $y = f(x)$ E $x = g(y)$, SI HA

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$$

E PER IPOTESI RISULTA $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to f'(x_0)$.

<u>APPLICAZIONE</u>: SAPENDO CHE $(\log x)' = \frac{1}{x}$ PONIAMO $\boxed{x = e^y}$ E OTTENIAMO:

$$\frac{d}{dy} e^y = \frac{1}{\frac{d}{dx}\log x} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{e^y}} = e^y$$

QUINDI LA FUNZIONE $x = e^y$ HA LA PECULIARITÀ CHE $\frac{dx}{dy} = x(y)$.

<u>CONSEGUENZA</u>: CONSIDERIAMO x^α CON $x > 0$ E $\alpha \in \mathbb{R}$. PER LA DEFINIZIONE DEI LOGARITMI, SI HA $\boxed{t = e^{\log t}}$ PER OGNI $t > 0$, QUINDI $x^\alpha = e^{\log x^\alpha}$ (IL COLTELLINO SVIZZERO). MA ESSENDO $\log x^\alpha = \alpha \log x$, POSSIAMO SCRIVERE $\boxed{x^\alpha = e^{\alpha \log x}}$ CIOÈ VEDIAMO x^α COME FUNZIONE COMPOSTA DI $f(t) = e^t$ E $g(x) = \alpha \log x$

VE 11 DIC 2020

PER LA REGOLA DI DERIVAZIONE DELLA FUNZIONE COMPOSTA, SAPENDO CHE $f'(t) = e^t$ E $g'(x) = \frac{\alpha}{x}$, SI TROVA:

$$\frac{d}{dx} x^\alpha = f'(g(x))\, g'(x) = e^{g(x)} \cdot \frac{\alpha}{x}$$

$$= e^{\alpha \lg x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x}$$

$$= \alpha x^{\alpha-1}$$

ESPRESSIONE DEL TUTTO ANALOGA ALLA

$$\frac{d}{dx} x^z = z\, x^{z-1},$$ TROVATA PER $z \in \mathbb{Z}$.

SFIDA: DISCUTERE LA DERIVABILITÀ DA DESTRA DI x^α CON $\alpha \in (0, +\infty)$ NEL PUNTO $x_0 = 0$.

MA 15 DIC 2020

UN CASO NOTEVOLE È $\alpha = \frac{1}{2}$. IN TAL CASO, LA SUDDETTA FORMULA IMPLICA CHE

$$\frac{d}{dx} x^{1/2} = \frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1}$$

$$= \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{PER } x > 0.$$

PER DETERMINARE L'EVENTUALE DERIVATA DESTRA NEL PUNTO $x_0 = 0$, CONSIDERIAMO IL RAPPORTO INCREMENTALE

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{1}{x}}.$$

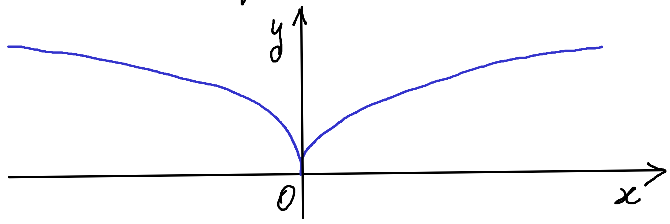
SAPENDO CHE $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ E CHE $\lim_{t \to +\infty} \sqrt{t} = +\infty$, SI CONCLUDE

MA 15 DIC 2020

CHE $$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = +\infty,$$ E

QUINDI LA FUNZIONE $f(x) = \sqrt{x}$ NON È DERIVABILE DA DESTRA NEL PUNTO $x_0 = 0$.

STUDIAMO ALLORA IL PROLUNGAMENTO PER PARITÀ A TUTTO L'ASSE REALE, CIOÈ LA FUNZIONE $f(x) = \sqrt{|x|}$



SAPENDO CHE LA DERIVATA DI UNA FUNZIONE PARI È UNA FUNZIONE DISPARI, POSSIAMO SCRIVERE

$$\frac{df}{dx} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}, & \text{SE } x > 0 \\ \frac{-1}{2\sqrt{|x|}}, & \text{SE } x < 0 \end{cases}$$

INOLTRE $$\lim_{x \to 0^\pm} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \pm\infty$$

DEFINIZIONE: SE $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ È **CONTINUA** IN $x_0 \in (a,b)$ E

$$\lim_{x \to x_0^\pm} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty,$$ OPPURE

$$\lim_{x \to x_0^\pm} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \mp\infty,$$ SI DICE CHE IL PUNTO x_0 È UNA **CUSPIDE**.

SE, PIÙ SEMPLICEMENTE, I LIMITI

$$\lim_{x \to x_0^\pm} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$ HANNO DUE DISTINTI VALORI FINITI (COME NEL CASO DI $f(x) = |x|$ NEL PUNTO $x_0 = 0$) SI PARLA DI **PUNTO ANGOLOSO**.

MA 15 DIC 2020

SI RAMMENTI CHE, IN BASE AD UNA CONVENZIONE DI USO FREQUENTE, LA FORMULA $\lim_{x \to x_0^\pm} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$ STA AL POSTO DELLE SEGUENTI DUE:

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$$

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$$

SIMILMENTE, LA FORMULA

$$\lim_{x \to x_0^\pm} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \mp\infty$$

STA AL POSTO DELLE SEGUENTI DUE:

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$$

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$$

COME APPLICAZIONE DELLA REGOLA DI DERIVAZIONE DELLA RADICE QUADRATA, TROVIAMO $\frac{d}{dx}\sqrt{R^2-x^2}$, COMPOSTA DI $f(t)=\sqrt{t}$ E $g(x)=R^2-x^2$. SI HA:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{R^2-x^2} = f'(g(x))\cdot g'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}} = \frac{-2x}{2\sqrt{R^2-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

PER $x \in (-R, R)$. IN PARTICOLARE, POSTO $x_0 = \frac{R}{\sqrt{2}}$, SI TROVA $y'(x_0) = \frac{-R/\sqrt{2}}{\sqrt{R^2-\frac{R^2}{2}}} = \frac{-R/\sqrt{2}}{R/\sqrt{2}} = -1.$

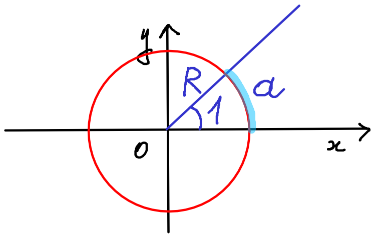
PREMESSO CHE PUNTI ANGOLOSI E CUSPIDI PRESUPPONGONO LA CONTINUITÀ DELLA FUNZIONE, STUDIAMO ADESSO I PUNTI DI DISCONTINUITÀ. LA TIPICA CLASSIFICAZIONE È LA SEGUENTE: SE I $\lim_{x \to x_0^\pm} f(x)$ ESISTONO FINITI, E SONO DIVERSI, SI DICE CHE x_0 È UN PUNTO DI SALTO (DISCONTINUITÀ DI PRIMA SPECIE). SE ALMENO UNO DEI DUE LIMITI NON ESISTE, O È INFINITO, SI PARLA DI DISCONTINUITÀ DI SECONDA SPECIE. SE, INFINE, RISULTA $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq f(x_0)$ SI PARLA DI DISCONTINUITÀ DI TERZA SPECIE, DETTA DISCONTINUITÀ ELIMINABILE NEL SENSO CHE LA FUNZIONE

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0 \\ \lim_{x \to x_0} f(x), & x = x_0 \end{cases}$$

È CONTINUA NEL PUNTO x_0.

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE. IL RADIANTE

PREMESSO CHE IL GRADO SESSAGESIMALE SI DEFINISCE COME LA TRECENTOSESSANTESIMA PARTE DELL'ANGOLO GIRO, SI PUÒ DEFINIRE IN MODO ANALOGO (MA NON CONVENZIONALE) IL RADIANTE COME LA 2π-ESIMA PARTE DELL'ANGOLO GIRO.



SECONDO LA DEFINIZIONE CONVENZIONALE, IL RADIANTE È QUELL'ANGOLO (AL CENTRO) CHE INDIVIDUA SULLA CIRCONFERENZA DI RAGGIO R UN ARCO $a = R$.

APPLICAZIONE: MISURA DI UN ARCO a CORRISPONDENTE AD UN ANGOLO α (RADIANTI). BASTA IMPOSTARE LA PROPORZIONE $\frac{a}{\alpha} = \frac{R}{1}$

DA CUI SEGUE $\boxed{a = \alpha R.}$

MISURA IN RADIANTI DELL'ANGOLO GIRO

SOSTITUENDO $a = 2\pi R$ NELLA FORMULA PRECEDENTE, TROVIAMO $\alpha = 2\pi$.

MA 15 DIC 2020

CONVERSIONE GRADI-RADIANTI. CONOSCENDO LA MISURA IN RADIANTI DELL'ANGOLO GIRO, E PER PROPORZIONALITÀ DIRETTA, SI PUÒ COSTRUIRE LA SEGUENTE TABELLA:

GRADI	RADIANTI
$360°$	2π
$180°$	π
$90°$	$\frac{\pi}{2}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$
$30°$	$\frac{\pi}{6}$
$60°$	$\frac{\pi}{3}$
$\frac{180°}{\pi}$ (POCO MENO DI $60°$)	1
$\frac{\alpha}{\pi} 180°$	α
$\beta°$	$\frac{\beta°}{180°}\pi$

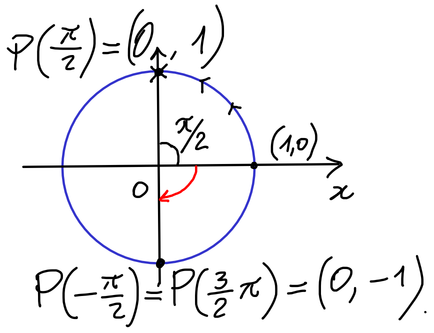
LE PRINCIPALI FUNZIONI TRIGONOMETRICHE SONO $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$ E $\operatorname{tg}\alpha$ (SENO, COSENO E TANGENTE, INDICATE ANCHE CON $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ E $\tan\alpha$). E SI POSSONO DEFINIRE COME SEGUE. PRENDIAMO $\alpha \in [0, 2\pi)$ E DEFINIAMO INNANZITUTTO IL PUNTO $P(\alpha)$ SULLA CIRCONFERENZA $x^2 + y^2 = 1$ CON IL SEGUENTE PROCEDIMENTO.

MA 15 DIC 2020

SE $\alpha = 0$, PONIAMO $P(\alpha) = (1,0)$.

SE $\alpha \in (0, 2\pi)$, PARTIAMO DAL PUNTO $(1,0)$ E PERCORRIAMO LA CIRCONFERENZA IN SENSO ANTIORARIO PER UN ARCO DI LUNGHEZZA $a = \alpha$. IL PUNTO DI ARRIVO È $P(\alpha)$.

ESEMPIO: INDIVIDUIAMO IL PUNTO $P\left(\frac{\pi}{2}\right)$



LA DEFINIZIONE DI $P(\alpha)$ SI ESTENDE AD OGNI $\alpha \in \mathbb{R}$ PONENDO $P(\alpha + 2\pi) = P(\alpha)$ PER OGNI α. SI DICE CHE $P(\alpha)$ È UNA FUNZIONE PERIODICA DI PERIODO 2π. ESEMPI: $P(2\pi) = P(0) = (1,0)$;

$$P\left(-\frac{\pi}{2}\right) = P\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) = P\left(\frac{3}{2}\pi\right) = (0,-1).$$

UNA VOLTA DEFINITO $P(\alpha)$ PER OGNI $\alpha \in \mathbb{R}$, LE SUE COORDINATE SONO, PER DEFINIZIONE, $\cos\alpha$ E $\operatorname{sen}\alpha$: $P(\alpha) = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$.

SI HA, DUNQUE: $\operatorname{sen}(\alpha + 2\pi) = \operatorname{sen}\alpha$ E $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$ PER OGNI $\alpha \in \mathbb{R}$

E INOLTRE $(\cos\alpha)^2 + (\operatorname{sen}\alpha)^2 = 1$

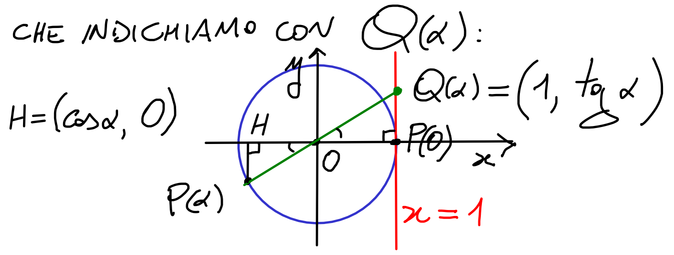
(PRIMA IDENTITÀ FONDAMENTALE)

MA 15 DIC 2020

DALLA DEFINIZIONE SI RICAVANO ALCUNI VALORI NOTEVOLI, COME AD ESEMPIO:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0 \text{ PER OGNI } k \in \mathbb{Z}.$$

CON L'ECCEZIONE DEI VALORI $\boxed{\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi}$, IL PUNTO $P(\alpha)$ NON GIACE SULL'ASSE y E QUINDI LA RETTA PER O E $P(\alpha)$ INTERSECA LA RETTA $x = 1$ IN UN PUNTO, CHE INDICHIAMO CON $Q(\alpha)$:



L'ORDINATA DI $Q(\alpha)$ DEFINISCE LA FUNZIONE $\operatorname{tg}\alpha$

ME 16 DIC 2020

DALLA SIMILITUDINE DEI TRIANGOLI $P(\alpha)HO$ E $Q(\alpha)P(0)O$ SEGUE CHE $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$, SECONDA IDENTITÀ FONDAMENTALE.

PARITÀ E DISPARITÀ: FISSATO $\alpha \in \mathbb{R}$, CONSIDERIAMO $P(\alpha)$ E $P(-\alpha)$: SICCOME HANNO LA STESSA ASCISSA E ORDINATE OPPOSTE, SEGUE CHE $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$, $\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}(-\alpha)$, E $\operatorname{tg}\alpha$ (SE È BEN DEFINITA) SODDISFA

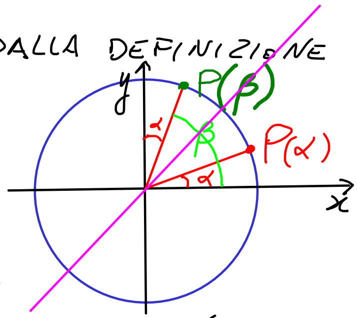
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\operatorname{sen}(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = -\operatorname{tg}(-\alpha).$$

DUNQUE $\operatorname{sen}\alpha$ E $\operatorname{tg}\alpha$ SONO FUNZIONI DISPARI, $\cos\alpha$ È UNA FUNZIONE PARI.

ME 16 DIC 2020

DEFINIZIONE: DUE NUMERI REALI α, β SI DICONO (IN TRIGONOMETRIA) COMPLEMENTARI SE $\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$, SUPPLEMENTARI SE $\alpha+\beta=\pi$.

SE $\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$, DALLA DEFINIZIONE SEGUE CHE $P(\alpha)$ E $P(\beta)$ SONO SIMMETRICI RISPETTO ALLA RETTA $y=x$, QUINDI $P(\alpha) = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ $= (\operatorname{sen}\beta, \cos\beta)$ E $P(\beta) = (\cos\beta, \operatorname{sen}\beta) = (\operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha)$.



IN DEFINITIVA, SI PUÒ SCRIVERE

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha \end{cases}$$

PER PROSEGUIRE, UTILIZZEREMO LE FORMULE DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

POSTO $\beta = -\gamma$, ESSE DIVENTANO

$$\cos(\alpha-\gamma) = \cos\alpha\cos\gamma + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\gamma$$

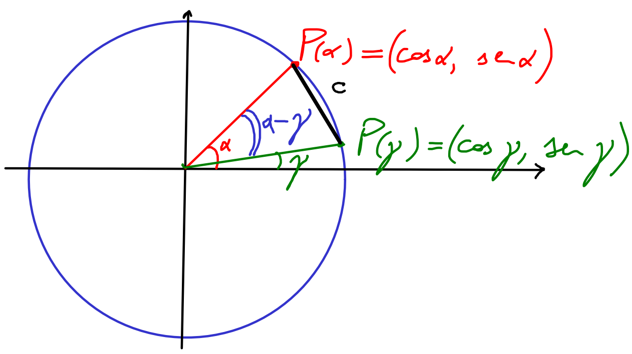
$$\operatorname{sen}(\alpha-\gamma) = \operatorname{sen}\alpha\cos\gamma - \cos\alpha\operatorname{sen}\gamma$$

QUEST'ULTIMA UGUAGLIANZA SI PUÒ OTTENERE DA $\operatorname{sen}(\alpha-\gamma) = \cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha-\gamma)\right] =$

$$= \cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\gamma\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\gamma +$$

$$-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{sen}\gamma = \operatorname{sen}\alpha\cos\gamma - \cos\alpha\operatorname{sen}\gamma$$

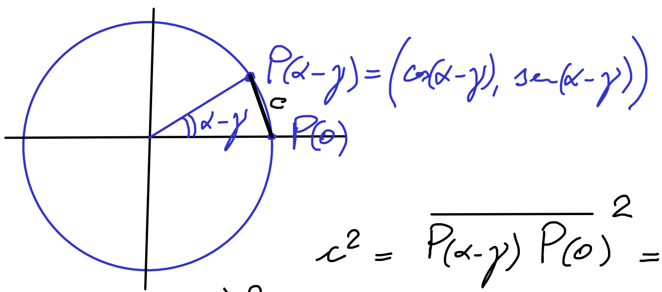
QUINDI, PER DIMOSTRARE LE QUATTRO FORMULE, BASTA VERIFICARE CHE $\cos(\alpha-\gamma) = \cos\alpha\cos\gamma + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\gamma$. SE $\alpha=\gamma$ SI TROVA $\cos 0 = 1 = \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\gamma$.



PER IL TEOREMA DI PITAGORA, SI HA CHE

$$\overline{P(\alpha)P(\gamma)}^2 = (\cos\alpha-\cos\gamma)^2 + (\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\gamma)^2 =$$

$$= c^2 = 2 - 2\cos\alpha\cos\gamma - 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\gamma$$



$$c^2 = \overline{P(\alpha-\gamma)\,P(0)}^2 =$$

$$= (1-\cos(\alpha-\gamma))^2 + (\operatorname{sen}(\alpha-\gamma))^2 =$$

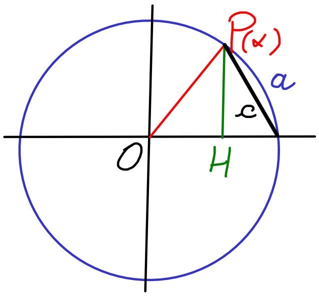
$= 2 - 2\cos(\alpha-\gamma)$. CONFRONTANDO LE DUE ESPRESSIONI DI c^2 TROVIAMO $\cos(\alpha-\gamma) = \cos\alpha\cos\gamma + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\gamma$, COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

ME 16 DIC 2020

LE FUNZIONI CIRCOLARI SONO DERIVABILI, E SI HA: $\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$;

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x;$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$



1 CONTINUITÀ DI $\operatorname{sen}\alpha$ NEL PUNTO $\alpha = 0$. CONSIDERIAMO $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ E OSSERVIAMO CHE

$|\operatorname{sen}\alpha| = \overline{P(\alpha)H} \leq c \leq a = |\alpha|$. SI HA DUNQUE $|\operatorname{sen}\alpha| \leq |\alpha|$ PER OGNI $\alpha \in \mathbb{R}$.

NE SEGUE CHE $\lim_{\alpha \to 0} \operatorname{sen}\alpha = 0 = \operatorname{sen} 0$, COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

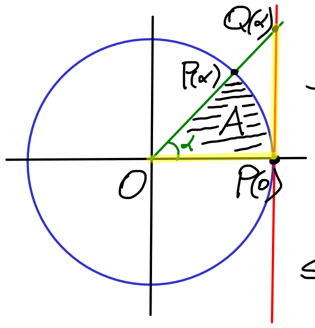
2 CONTINUITÀ DI $\cos\alpha$ NEL PUNTO $\alpha = 0$. DALLA PRIMA IDENTITÀ FONDAMENTALE SEGUE CHE $\lim_{\alpha\to 0}\cos\alpha = \lim_{\alpha \to 0}\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\alpha} =$

$$= 1 = \cos 0.$$

3. CONTINUITÀ IN UN PUNTO $\alpha \in \mathbb{R}$: $\operatorname{sen}(\alpha + h) = \operatorname{sen}\alpha \cos h + \cos\alpha \operatorname{sen} h$. SICCOME $\operatorname{sen} h \to 0$ E $\cos h \to 1$ PER $h \to 0$, SI DEDUCE CHE $\lim_{h \to 0}\operatorname{sen}(\alpha + h) = \operatorname{sen}\alpha$,

E SIMILMENTE $\lim_{h\to 0}\cos(\alpha + h) = \cos\alpha$.

NE SEGUE CHE $\operatorname{tg}\alpha$ È CONTINUA (NEI PUNTI DOVE $\cos\alpha \neq 0$).

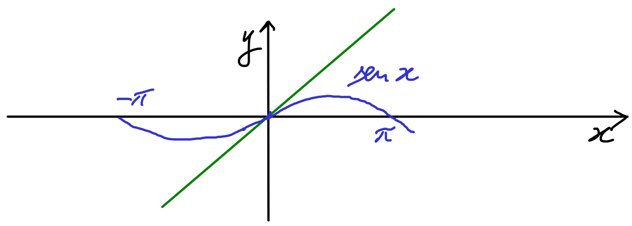


4. DERIVABILITÀ DI $\operatorname{sen}\alpha$ NEL PUNTO $\alpha = 0$. SAPPIAMO CHE $|\operatorname{sen}\alpha| \leq |\alpha|$, E QUINDI

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen} 0}{\alpha - 0} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} \leq 1 \text{ PER}$$

$0 < |\alpha| < \frac{\pi}{2}$. PER AVERE UNA STIMA PER DIFETTO DEL RAPPORTO $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}$, INDICO CON A L'AREA DEL SETTORE CIRCOLARE ED OSSERVO CHE $\frac{A}{\pi} = \frac{|\alpha|}{2\pi}$ QUINDI $A = \frac{1}{2}|\alpha|$. INOLTRE A NON SUPERA L'AREA DEL TRIANGOLO $O\hat{P}(0)Q(\alpha)$, CHE È $\frac{1}{2}|\operatorname{tg}\alpha| = \frac{1}{2}\frac{|\operatorname{sen}\alpha|}{\cos\alpha}$, QUINDI $\frac{1}{2}|\alpha| \leq \frac{1}{2}\frac{|\operatorname{sen}\alpha|}{\cos\alpha}$, DA CUI RICAVO

$\cos\alpha \leq \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} \leq 1$, E PER IL TEOREMA DEL CONFRONTO, $\lim_{\alpha\to 0}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} = 1$.



5. OSSERVIAMO CHE $\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = (1 + \cos\alpha)(1 - \cos\alpha)$

E QUINDI $\lim_{\alpha \to 0}\frac{1 - \cos\alpha}{\alpha} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{1 - \cos^2\alpha}{\alpha(1 + \cos\alpha)} =$

$$= \lim_{\alpha \to 0}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\cdot\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1 + \cos\alpha} = 0.$$

6 DERIVATA DI $\operatorname{sen}\alpha$ IN UN PUNTO $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha+h) - \operatorname{sen}\alpha}{h} =$$

$$= \frac{1}{h}\left(\operatorname{sen}\alpha \cos h + \cos\alpha \operatorname{sen} h - \operatorname{sen}\alpha\right) =$$

$$= \operatorname{sen}\alpha \, \frac{\cos h - 1}{h} + \cos\alpha \, \frac{\operatorname{sen} h}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} \cos\alpha$$

7.

SIMILMENTE SI DIMOSTRA CHE $\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$.

8. $\frac{d}{dx} \operatorname{tg} x = \frac{d}{dx} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} =$

$$= \frac{(\cos x)^2 + (\operatorname{sen} x)^2}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x.$$

 GI 17 DIC 2020

PROBLEMA [302]

1) IL DOMINIO DELLA FUNZIONE $f(x) = e^{-x^2}$ È L'INTERVALLO $(-\infty, +\infty)$: NULLA IMPEDISCE DI ASSEGNARE ALLA x UN QUALUNQUE VALORE REALE.

2) RISULTA $f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$, DUNQUE $f(x)$ È UNA FUNZIONE PARI. CON LO STESSO RAGIONAMENTO SI VEDE CHE, SE $g(t)$ È UNA FUNZIONE QUALUNQUE, ALLORA LA FUNZIONE $g(x^2)$ È UNA FUNZIONE PARI (AMMESSO CHE ABBIA DOMINIO NON VUOTO).

LA PARITÀ (COME ANCHE LA DISPARITÀ) RIDUCE AL SEMIASSE $x \geq 0$ LO STUDIO DEL GRAFICO.

3) PRESI x_1, x_2 TALI CHE $0 \leq x_1 < x_2$ SI HA CHE $0 \leq x_1^2 < x_2^2$ E QUINDI $-x_2^2 < -x_1^2 \leq 0$. ESSENDO LA FUNZIONE $g(t) = e^t$ STRETTAMENTE CRESCENTE, POSSIAMO SCRIVERE $e^{-x_2^2} < e^{-x_1^2} \leq e^0$ QUINDI $f(x)$ È STRETTAMENTE DECRESCENTE SULL'INTERVALLO $[0, +\infty)$.

TEOREMA: SE $f: S \to \mathbb{R}$ È PARI E STRETTAMENTE CRESCENTE SULL'INSIEME $S \cap [0, +\infty)$ ALLORA È STRETTAMENTE DECRESCENTE SULL'INSIEME $S \cap (-\infty, 0]$.

DIMOSTRAZIONE: PRENDIAMO $t_1, t_2 \in S$ SODDISFACENTI $t_1 < t_2 \leq 0$. VERIFICHIAMO CHE $f(t_1) > f(t_2)$. ESSENDO $f(t_1) = f(-t_1)$ E $f(t_2) = f(-t_2)$, E SICCOME $0 \leq -t_2 < -t_1$, SI HA $f(-t_2) < f(-t_1)$ PER LA MONOTONIA DI f SU $S \cap [0, +\infty)$. NE SEGUE CHE $f(t_2) < f(t_1)$ COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

4) ESSENDO $g(t) = e^t > 0$ PER OGNI t, SI HA $f(x) > 0$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$.

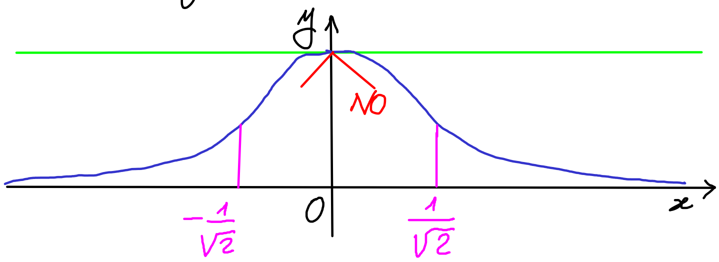
5) SAPPIAMO DAL 27 NOVEMBRE CHE $g(t) = e^t \xrightarrow[t \to -\infty]{} 0$, QUINDI $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ PERCHÉ $-x^2 \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} -\infty$. POSSIAMO DIRE CHE LA RETTA $y = 0$ È UN ASINTOTO ORIZZONTALE PER $x \to \pm\infty$.

6) ESSENDO $f(x) > 0$ PER OGNI x, IL GRAFICO NON INTERSECA L'ASSE x. L'INTERSEZIONE CON L'ASSE y È IL PUNTO $(0, f(0)) = (0, e^0) = (0, 1)$. RICORDANDO CHE $e^0 \geq e^{-x^2}$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$ (PUNTO 3) POSSIAMO SCRIVERE $\max\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = e^0 = 1$ E IL PUNTO $x_0 = 0$ È UN PUNTO DI MASSIMO (L'UNICO, PER LA MONOTONIA).

7) PER TROVARE L'EQUAZIONE DELLA RETTA TANGENTE $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ NEL PUNTO $x_0 = 0$, TROVIAMO $f'(x) = \frac{d}{dx} e^{-x^2}$.

ESSENDO $\frac{d}{dt} e^t = e^t$ E $\frac{d}{dx}(-x^2) = -2x$, SI TROVA $f'(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x) = -2x\, e^{-x^2}$

E SE NE DEDUCE CHE $f'(0) = 0$, QUINDI L'EQUAZIONE DELLA RETTA TANGENTE NEL PUNTO $x_0 = 0$ È $y = 1$.



RELAZIONE FRA MASSIMI, MINIMI E DERIVATA

CONSIDERIAMO UNA FUNZIONE $f: [x_0, b) \to \mathbb{R}$ TALE CHE $f(x_0) \geq f(x)$ PER OGNI $x \geq x_0$. ALLORA $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ E PERCIÒ, SE ESISTE FINITO IL $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0^+)$, SI HA $f'(x_0^+) \leq 0$ PER IL TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO. IN CONCLUSIONE: CONDIZIONE NECESSARIA AFFINCHÉ $f: [x_0, b) \to \mathbb{R}$ ABBIA UN PUNTO DI MASSIMO IN x_0 È CHE $f'(x_0^+)$, SE ESISTE, SIA NON POSITIVA.

CONSIDERIAMO ADESSO UNA $f: (a, x_0] \to \mathbb{R}$ TALE CHE $f(x_0) \geq f(x)$ PER OGNI $x \leq x_0$. SI HA $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ PER OGNI $x < x_0$. SI CONCLUDE CHE: CONDIZIONE NECESSARIA AFFINCHÉ x_0 SIA UN PUNTO DI MASSIMO È CHE $f'(x_0^-)$, SE ESISTE, SIA NON NEGATIVA.

CON LO STESSO RAGIONAMENTO, SI TROVANO LE CONDIZIONI NECESSARIE AFFINCHÉ x_0 SIA UN PUNTO DI MINIMO: $f'(x_0^-) \leq 0 \leq f'(x_0^+)$ AMMESSO CHE LE DUE DERIVATE ESISTANO.

<u>ESEMPIO</u>: IL PUNTO $x_0 = 0$ SODDISFA LA DISUGUAGLIANZA $|x_0| = 0 \leq |x|$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$, QUINDI $\min_{x \in \mathbb{R}} |x| = 0$ E IL PUNTO $x_0 = 0$ È UN PUNTO (L'UNICO) DI MINIMO. SAPPIAMO CHE, POSTO $f(x) = |x|$, SI HA $f'(0^-) = -1 < 0$ E $f'(0^+) = 1 > 0$.

SPESSO LA FUNZIONE f È DEFINITA IN (a,b) CON $x_0 \in (a, b)$. IN QUESTO CASO, SE x_0 È UN PUNTO DI MASSIMO, E SE ESISTE $f'(x_0)$, SI DEVE AVERE $f'(x_0^+) \leq 0 \leq f'(x_0^-)$ MA ANCHE $f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$ QUINDI $f'(x_0^+) = f'(x_0^-) = 0$

E PERCIÒ CONDIZIONE NECESSARIA AFFINCHÉ IL PUNTO $x_0 \in (a,b)$ SIA UN PUNTO DI MASSIMO, È CHE $f'(x_0)$, SE ESISTE, SIA NULLA. LA CONDIZIONE $f'(x_0) = 0$ È NECESSARIA ANCHE QUANDO x_0 È UN PUNTO DI MINIMO.

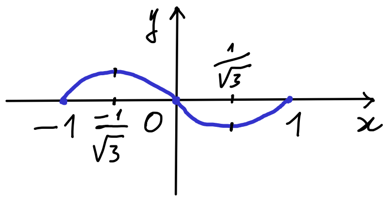
<u>OSSERVAZIONE</u>: QUANDO f NON È DERIVABILE, LA SUDDETTA CONDIZIONE NON SI PUÒ APPLICARE.

GI 17 DIC 2020

ESEMPIO: LA FUNZIONE $f(x) = |x|$ HA UN MINIMO NEL PUNTO $x_0 = 0$, NON È DERIVABILE, E LA CONDIZIONE $f'(x_0) = 0$ NON SUSSISTE.

ESEMPIO: ESSENDO $\sqrt{0} = 0 \leq \sqrt{x}$ PER OGNI $x \geq 0$, SI HA $\min\limits_{x \in [0,+\infty)} \sqrt{x} = 0$ ED IL PUNTO $x_0 = 0$ È UN PUNTO DI MINIMO (L'UNICO). TUTTAVIA LA CONDIZIONE $f'(0) = 0$ NON SI PUÒ UTILIZZARE.

ESEMPIO: CONSIDERIAMO $f(x) = x^3 - x$ PER $x \in [-1, 1]$, COSICCHÉ PER IL TEOREMA DI WEIERSTRASS ESISTONO ALMENO UN PUNTO DI MASSIMO E ALMENO UN PUNTO DI MINIMO. LA FUNZIONE È DISPARI E SODDISFA $f(\pm 1) = 0$. INOLTRE $f(x) = x(x^2 - 1)$ CON $x^2 - 1 < 0$ PER $x \in (-1, 1)$, QUINDI $f(x)$ HA IL SEGNO OPPOSTO A QUELLO DI x. CI DEVONO ESSERE ALMENO UN PUNTO DI MASSIMO $x_1 \in (-1, 0)$ E UNO DI MINIMO $x_2 \in (0, 1)$.



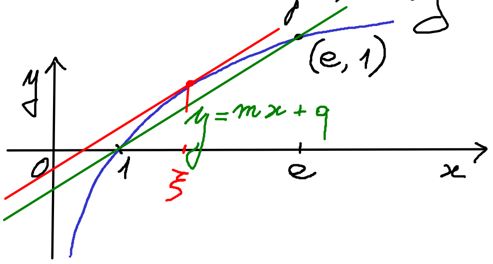
IN VIRTÙ DELLA CONDIZIONE NECESSARIA, ESSI DEVONO ESSERE **PUNTI CRITICI**, DETTI ANCHE **PUNTI STAZIONARI**, CIOÈ SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE $f'(x) = 0$, OVVERO $3x^2 - 1 = 0$ LE CUI UNICHE SOLUZIONI SONO $x_{1,2} = \mp \frac{1}{\sqrt{3}}$.

GLI ESTREMI DELL'INTERVALLO $[-1, 1]$ HANNO LA PROPRIETÀ CHE: $f(-1) = 0 \leq f(x)$ PER OGNI $x \in [-1, 0]$, E $f(1) = 0 \geq f(x)$ PER OGNI $x \in [0, 1]$. SI PUÒ DIRE CHE IL PRIMO ESTREMO, $x_3 = -1$, È UN PUNTO DI MINIMO RELATIVO PER f, E CHE $x_4 = 1$ È UN PUNTO DI MASSIMO RELATIVO, DETTI ANCHE PUNTI DI MASSIMO E MINIMO **LOCALE** (DALL'INGLESE LOCAL MAXIMUM, LOCAL MINIMUM). IN GENERALE, DATA $f : S \to \mathbb{R}$, SI DICE CHE x_0 È UN PUNTO DI MASSIMO RELATIVO SE ESISTE UN INTERVALLO (a, b) TALE CHE $x_0 \in (a, b)$ E x_0 È UN PUNTO DI MASSIMO PER LA RESTRIZIONE $f\big|_{S \cap (a,b)}$, CIOÈ SE $f(x_0) \geq f(x)$ PER OGNI $x \in S \cap (a, b)$.

TEOREMA DI LAGRANGE, DETTO ANCHE TEOREMA DELLA MEDIA (THE MEAN VALUE THEOREM)

CONSIDERIAMO UNA FUNZIONE $f \in C^0([a,b])$ CHE SIA DERIVABILE IN (a,b). GLI ESTREMI DEL GRAFICO SONO $(a, f(a))$ E $(b, f(b))$. INDICHIAMO CON $m = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ IL COEFFICIENTE ANGOLARE DELLA RETTA $y = m(x-a) + f(a)$ PASSANTE PER GLI ESTREMI.

ESEMPIO: POSTO $f(x) = \log x$ E $a = 1$, $b = e$, SI HA $m = \dfrac{1}{e-1}$



TESI: ESISTE ALMENO UN PUNTO INTERNO ALL'INTERVALLO (a,b), TRADIZIONALMENTE INDICATO CON ξ (CSI) TALE CHE $f'(\xi) = m$.

NELL'ESEMPIO PRECEDENTE, SI HA $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ E RISULTA $f'(\xi) = \dfrac{1}{e-1}$ NEL PUNTO $\xi = e-1$.

LA **DIMOSTRAZIONE** SI BASA SUL FATTO CHE LA FUNZIONE $h(x) = f(x) - (mx+q)$ SODDISFA LE IPOTESI DEL TEOREMA DI WEIERSTRASS E QUINDI AMMETTE MASSIMO E MINIMO. PER SOSTITUZIONE SI TROVA $h(b) - h(a) = 0$, CIOÈ $h(a) = h(b)$ E PERCIÒ ALMENO UN ESTREMO (MASSIMO O MINIMO) È ASSUNTO IN UN PUNTO INTERNO $\xi \in (a,b)$, DUNQUE $h'(\xi) = 0$, CIOÈ $f'(\xi) - m = 0$, DA CUI LA TESI.

VE 18 DIC 2020

CONSEGUENZE

A. SCRIVIAMO x_0 AL POSTO DI a E x AL POSTO DI b, O VICEVERSA. LA TESI DIVENTA:
$$\boxed{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\xi)}$$

CONSEGUENZA: SE ESISTE IL $\lim_{x \to x_0} f'(x) = L$, FINITO O INFINITO, E SE f È CONTINUA NEL PUNTO x_0, ALLORA $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = L$.

B. LA TESI SI PUÒ ANCHE SCRIVERE
$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x-x_0),$$
CHE È LA BASE PER DIMOSTRARE PER INDUZIONE LA FORMULA DI TAYLOR CON IL RESTO DI LAGRANGE: SE f È DOTATA DELLE DERIVATE $f', f'', \dots, f^{(n+1)}$ IN UN INTERVALLO (a,b), ALLORA, PRESI $x_0, x \in (a,b)$, ESISTE ξ NELL'INTERVALLO AVENTE PER ESTREMI x_0 E x TALE CHE
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

INFATTI PER $n = 0$ LA SUDDETTA FORMULA SI RIDUCE A $f(x) = f(x_0) + f'(\xi)\cdot(x-x_0)$ E QUESTA SEGUE DAL TEOREMA DI LAGRANGE.

ESEMPIO: CON $f(x) = e^x$ E $x_0 = 0$ SI TROVA
$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\xi_n}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

VE 18 DIC 2020

OSSERVAZIONE: DAL CRITERIO DEL RAPPORTO SEGUE CHE LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ CONVERGE (ASSOLUTAMENTE) PER OGNI $x \in \mathbb{R}$ E QUINDI (CONDIZIONE NECESSARIA)

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0}$$

POICHÉ IL PUNTO ξ_n SI TROVA FRA 0 E x, SI HA $e^{\xi_n} \leq e^{|\xi_n|} < e^{|x|}$ E QUINDI

$$\left| \frac{e^{\xi_n}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| < e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

MA ALLORA, PER LA DEFINIZIONE DI SOMMA DI UNA SERIE, SI HA

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

ESSENDO $x_0 = 0$, LA SERIE AL SECONDO MEMBRO SI CHIAMA « SERIE DI MACLAURIN » DELLA FUNZIONE ESPONENZIALE.

C. CARATTERIZZAZIONE DELLE FUNZIONI A DERIVATA NULLA.

SE $f \in C^0([a,b])$ SODDISFA $f'(x) = 0$ IN OGNI $x \in (a,b)$, IL TEOREMA DI LAGRANGE

$\boxed{f(x) = f(a) + f'(\xi)(x-a)}$ IMPLICA $f(x) = f(a)$ PER OGNI x, QUINDI f È COSTANTE.

D. TEST DI MONOTONIA. SE $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ È DERIVABILE E TALE CHE $f'(x) \geq 0$ PER OGNI x, ALLORA, PRESI $x_1, x_2 \in (a,b)$ CON $x_1 < x_2$, SI HA:

$$f(x_2) = f(x_1) + f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq f(x_1)$$

E QUINDI f È MONOTONA NON DECRESCENTE.

LO STESSO RAGIONAMENTO MOSTRA CHE, SE $f'(x) > 0$ PER OGNI $x \in (a,b)$, SI HA $f(x_2) > f(x_1)$ QUINDI f È STRETTAMENTE CRESCENTE.

NOTA: VICEVERSA, SE f È MONOTONA NON DECRESCENTE, ALLORA $f(x) - f(x_0)$ È CONCORDE CON $x - x_0$, QUINDI $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ E (SE ESISTE $f'(x_0)$) RISULTA $f'(x_0) \geq 0$ PER IL TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO.

E. CONVESSITÀ: UNA FUNZIONE $f : I \to \mathbb{R}$, DOVE I È UN INTERVALLO, SI DICE CONVESSA SE, COMUNQUE SI PRENDANO $x_1, x_2 \in I$, RISULTA $\boxed{f(x) \leq y(x)}$ PER OGNI $x \in [x_1, x_2]$, ESSENDO $y(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1)$

ESEMPI: $f(x) = x^2$, $f(x) = |x|$, $f(x) = mx + q$

UNA FUNZIONE $g : I \to \mathbb{R}$ SI DICE CONCAVA SE LA FUNZIONE $f(x) = -g(x)$ È CONVESSA.

 VE 18 DIC 2020

LA CONVESSITÀ DI UNA FUNZIONE $f: I \to \mathbb{R}$ È ESPRESSA DALLA DISUGUAGLIANZA

$$f(x) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1)$$

CHE DEVE VALERE PER OGNI $x_1 < x < x_2$.

ESSA EQUIVALE ALLA MONOTONIA DEL RAPPORTO INCREMENTALE:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

NE SEGUE CHE:

1) PER LA COMPLETEZZA DI $\mathbb{R}$, LE FUNZIONI CONVESSE HANNO $f'(x^\pm)$ IN OGNI PUNTO $x \in (a,b)$ E QUINDI SONO ANCHE CONTINUE;

2) SE UNA FUNZIONE CONVESSA È DERIVABILE, ALLORA $f'(x)$ È MONOTONA NON DECRESCENTE;

3) SE UNA $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ È DERIVABILE IN (a,b) E LA FUNZIONE $f'(x)$ È MONOTONA NON DECRESCENTE, ALLORA f È CONVESSA (TEST DI CONVESSITÀ).

4) PER STABILIRE SE f' È CRESCENTE SI PUÒ ANDARE A VEDERE SE $\frac{d}{dx} f'(x) = f''(x)$ (SE ESISTE) SODDISFA $f''(x) \geq 0$ IN (a,b).

<u>ESEMPIO:</u> SE $f(x) = e^{-x^2}$, SI HA $f'(x) = -2x e^{-x^2}$ E

$$f''(x) = -2(1 - 2x^2) e^{-x^2}$$

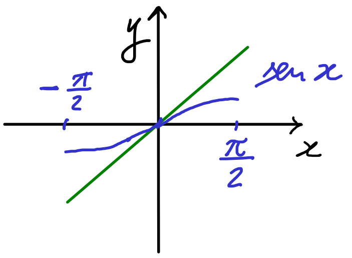
QUINDI $f''(x)$ HA IL SEGNO DI $2x^2 - 1$ E CIOÈ $f''(x) < 0$ SE $2x^2 < 1$, DUNQUE PER $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ E $f''(x) > 0$ PER $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ E PER $x \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$.

NEGLI ULTIMI DUE INTERVALLI f È CONVESSA, E NEL PRIMO È CONCAVA. I PUNTI $x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ DOVE $f''(x)$ CAMBIA SEGNO SI DICONO PUNTI DI FLESSO.

GI 7 GEN 2021

Problemi [303]

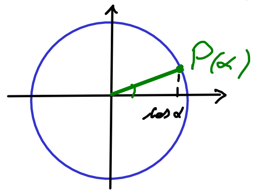
1a) RECUPERIAMO IL GRAFICO GIÀ VISTO IL 16/12/2020:



1b) APPLICHIAMO LA REGOLA DI DERIVAZIONE DELLA FUNZIONE INVERSA (11/12/2020):

SAPPIAMO CHE $f'(x) = \frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$

E CHE $\cos x > 0$ PER $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, QUINDI,



POSTO $g(y) = f^{-1}(y) = \operatorname{arcsen} y$

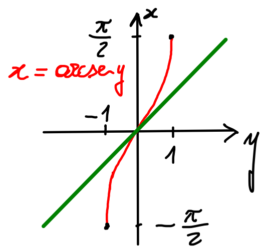
POSSIAMO DIRE CHE $g(y)$ È DERIVABILE, E PER OGNI $y \in (-1, 1)$ RISULTA

$$g'(y) = \frac{dg}{dy} = \frac{1}{\frac{df}{dx}} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x}.$$

PER AVERE y ANCHE AL SECONDO MEMBRO, USIAMO L'IDENTITÀ $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$, DALLA QUALE RICAVIAMO $\cos x = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}$ PER $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. PERTANTO

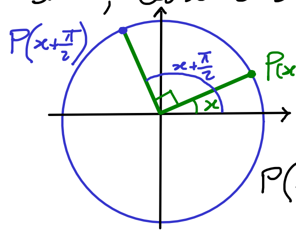
$$\frac{d}{dy}\operatorname{arcsen} y = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

PER $y \in (-1, 1)$. IL GRAFICO DI $x = \operatorname{arcsen} y$ SI RICAVA DA QUELLO DI $y = \operatorname{sen} x$ SCAMBIANDO GLI ASSI:



2) PER TRACCIARE IL GRAFICO DI $g(x) = \cos x$ PUÒ ESSERE UTILE VEDERE LE RELAZIONI TRA $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ E $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

COSTANTE DI FASE



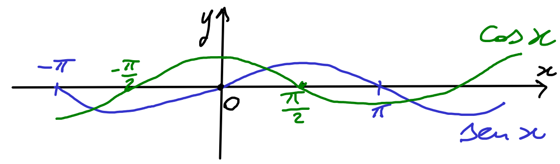
$P(x) = (\cos x, \operatorname{sen} x)$

$P\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = (-\operatorname{sen} x, \cos x)$

DALLA DEFINIZIONE DI $\operatorname{sen} x$ E $\cos x$ SEGUE CHE

$$\begin{cases} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \end{cases}$$

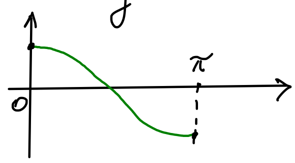
QUEST'ULTIMA RELAZIONE PUÒ SERVIRE PER RICAVARE IL GRAFICO DI $\cos x$ DA QUELLO DI SEN x EFFETTUANDO UNA TRASLAZIONE:



INOLTRE, SAPENDO CHE $\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$, APPLICANDO LA REGOLA DI DERIVAZIONE DELLA FUNZIONE COMPOSTA TROVIAMO: $\frac{d}{dx}\cos x$

$$= \frac{d}{dx}\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} x.$$

LIMITATAMENTE ALL'INTERVALLO $[0, \pi]$ IL GRAFICO DI $y = \cos x$ È IL SEGUENTE:



IL CHE RISOLVE IL PROBLEMA 2a.

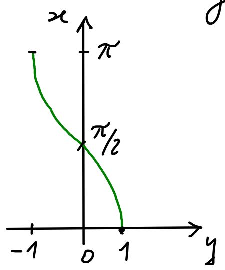
2b) SULL'INTERVALLO $[0, \pi]$ LA FUNZIONE $y = \cos x$ È STRETTAMENTE DECRESCENTE, QUINDI È INVERTIBILE, E LA SUA INVERSA SI INDICA CON $x = \arccos y$, $y \in [-1, 1]$.

ESSENDO $\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x < 0$ PER $x \in (0, \pi)$, SI HA $\frac{d}{dy}\arccos y = \frac{1}{-\operatorname{sen} x}$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$$

GI 7 GEN 2021

IL GRAFICO DI $x = \arccos y$ SI TROVA DA QUELLO DI $y = \cos x$ EFFETTUANDO UNA RIFLESSIONE RISPETTO ALLA RETTA $y = x$:

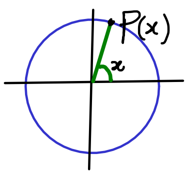


VE 8 GEN 2021

3a) RICORDIAMO CHE $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, QUINDI È UNA FUNZIONE DISPARI, E RISULTA $\operatorname{tg} 0 = 0$, E $\operatorname{tg} x > 0$ PER $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\operatorname{tg} x < 0$ PER $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. INOLTRE

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \operatorname{tg} x = \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = +\infty$$

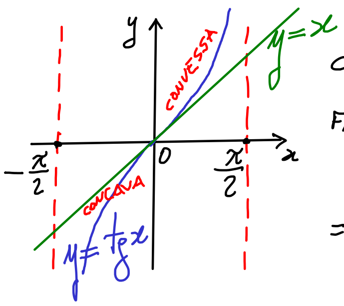
PERCHÉ $\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \cos x = 0^+$



E, ANALOGAMENTE, $\lim_{x \to \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \operatorname{tg} x$

$$= \lim_{x \to \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\infty \text{ PER DISPARITÀ.}$$

CI ASPETTIAMO UN GRAFICO COME IL SEGUENTE:



CIÒ TROVA RISCONTRO NEL FATTO CHE $\dfrac{d}{dx} \operatorname{tg} x =$

$$= 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$$

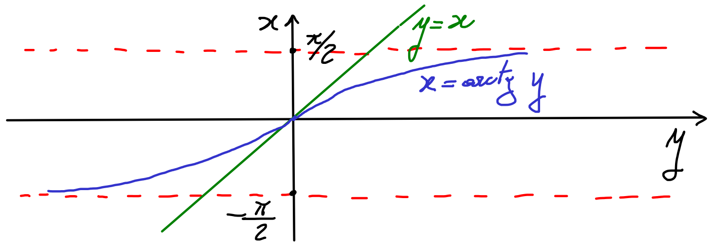
IN PARTICOLARE $\left(\dfrac{d}{dx} \operatorname{tg} x\right)_{x=0} = 1$. INOLTRE

$$\frac{d^2}{dx^2} \operatorname{tg} x = \frac{d}{dx}\left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right) = 2 \operatorname{tg} x \cdot \left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right)$$

VE 8 GEN 2021

3b) ESSENDO LA FUNZIONE $y = \operatorname{tg} x$ DERIVABILE E STRETTAMENTE CRESCENTE SULL'INTERVALLO $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, ESISTE LA FUNZIONE INVERSA, CHE È STRETTAMENTE CRESCENTE SULL'INTERVALLO $(-\infty, +\infty)$ E SI INDICA CON $\operatorname{arctg} y$. PER LA REGOLA DI DERIVAZIONE DELLA FUNZIONE INVERSA, SI HA CHE

$$\frac{d}{dy} \operatorname{arctg} y = \frac{1}{\frac{d}{dx} \operatorname{tg} x} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}$$



IL TEOREMA DI CAUCHY (THE GENERALIZED MEAN VALUE THEOREM) È UN'ESTENSIONE DEL TEOREMA DI LAGRANGE E RIGUARDA DUE FUNZIONI $f, g \in C^0([a,b])$, DERIVABILI IN (a,b) E CON $g' \neq 0$ IN (a,b). TESI: ESISTE ALMENO UN PUNTO $\xi \in (a,b)$ TALE CHE

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.}$$

IL TEOREMA SI PUÒ USARE NEL CASO $g(x) = x$. IN TAL CASO, LA TESI DIVENTA: ESISTE $\xi \in (a,b)$ TALE CHE

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$

CIOÈ SI OTTIENE IL TEOREMA DI LAGRANGE.
LA DIMOSTRAZIONE SI OTTIENE RAGIONANDO SULLA FUNZIONE

$$h(x) = \left(f(b)-f(a)\right) g(x) - \left(g(b)-g(a)\right) f(x).$$

ESSENDO $h(a) = h(b)$, LA FUNZIONE h HA ALMENO UN PUNTO INTERNO ξ DI MASSIMO O DI MINIMO, DUNQUE $h'(\xi) = 0$. MA $h'(\xi) =$

$$= \left(f(b)-f(a)\right) \cdot g'(\xi) - \left(g(b)-g(a)\right) f'(\xi)$$

QUINDI $\left(f(b)-f(a)\right) \cdot g'(\xi) = \left(g(b)-g(a)\right) f'(\xi)$

DA CUI LA TESI.

APPLICAZIONE (REGOLA DI DE L'HÔPITAL)

SUPPONIAMO CHE $\boxed{f(a) = g(a) = 0.}$ ALLORA

$$\frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

QUINDI: SE $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ESISTE, FINITO O INFINITO, ALLORA $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

IL RISULTATO CONTINUA A VALERE (ADATTANDO LA DIMOSTRAZIONE) ANCHE NEL CASO IN CUI

$$\lim_{x\to a} f(a) = \lim_{x\to a} g(a) = \pm\infty$$

CIOÈ, SE $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, ALLORA RISULTA $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$

UN RISULTATO ANALOGO VALE ANCHE NEL CASO IN CUI $x \to \pm\infty$: SE $f, g : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ SONO TALI CHE $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$, OPPURE $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = \pm\infty$, E SE f E g SONO DERIVABILI, CON $g' \neq 0$, E SE ESISTE, FINITO O INFINITO, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, ALLORA RISULTA

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

LA PIÙ SEMPLICE APPLICAZIONE: RICORDIAMO CHE $\lim_{x\to+\infty} b^x = +\infty$ SE $b > 1$, E CERCHIAMO IL LIMITE $\lim_{x\to+\infty} \frac{b^x}{x}$. SI HA CHE $b^x = e^{\log b^x} = e^{x \log b}$ E QUINDI

$$\frac{d}{dx} b^x = e^{x \log b} \cdot \log b = b^x \log b \longrightarrow +\infty$$

PERCHÉ $\log b > 0$ IN QUANTO $b > 1$. MA ALLORA

$$\frac{b^x \log b}{1} = b^x \log b \longrightarrow +\infty$$

E QUINDI $\lim_{x\to+\infty} \frac{b^x}{x} = +\infty.$

VE 8 GEN 2021

QUALCHE ALTRO LIMITE NOTEVOLE

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha}, \quad \alpha > 0$$

SICCOME $e^x, x^\alpha \longrightarrow +\infty$, VOGLIAMO USARE LA REGOLA DI DE L'HÔPITAL.

SAPPIAMO CHE $\frac{d}{dx} e^x = e^x$ E $\frac{d}{dx} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$. ALLORA STUDIAMO IL LIMITE

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{\alpha x^{\alpha-1}}$$

MA QUESTO LIMITE SEMBRA DELLO STESSO TIPO DI QUELLO DATO. FACCIAMO ALLORA UN ALTRO RAGIONAMENTO: OSSERVIAMO CHE

$$\frac{e^x}{x^\alpha} = \left(\frac{e^{\frac{x}{\alpha}}}{x}\right)^\alpha = \left(\frac{b^x}{x}\right)^\alpha$$ DOVE $b = e^{\frac{1}{\alpha}} > 1$ PERCHÉ $\alpha > 0$. SAPENDO CHE $\frac{b^x}{x} \longrightarrow +\infty$ POSSIAMO CONCLUDERE CHE $\left(\frac{b^x}{x}\right)^\alpha \longrightarrow +\infty$ (LEZIONE DEL 17/11)

POSSIAMO DUNQUE CONCLUDERE CHE

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty.$$

OSSERVIAMO CHE $\lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty$

INFATTI LA DISUGUAGLIANZA $\log x > M$, $M \in \mathbb{R}$, È SODDISFATTA PER OGNI $x > e^M$.

STUDIAMO ALLORA IL LIMITE

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x^\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

SAPPIAMO CHE $\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x}$ E TROVIAMO $\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$

PER IL TEOREMA DI DE L'HÔPITAL POSSIAMO CONCLUDERE CHE $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0$.

STUDIAMO ADESSO IL LIMITE $\lim_{t \to 0^+} \log t$.

CON IL CAMBIAMENTO DI VARIABILE $t = \frac{1}{x}$

SI TROVA: $\lim_{t \to 0^+} \log t = \lim_{x \to +\infty} \log \frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \log x^{-1} = \lim_{x \to +\infty} (-\log x) = -\infty$.

CERCHIAMO ALLORA IL LIMITE $\lim_{t \to 0^+} t^\alpha \log t$, CON $\alpha > 0$. POSTO $t = \frac{1}{x}$, SI TROVA:

$$t^\alpha \log t = \frac{1}{x^\alpha} \log \frac{1}{x} = \frac{-\log x}{x^\alpha} \longrightarrow 0$$