ANALISI MATEMATICA I - CORSO DI LAUREA IN FISICA

SUCCESSIONI E SERIE NUMERICHE

7 OTTOBRE -
10 NOVEMBRE 2020

19 LEZIONI (39,6%)

07 OTT. 2020

DEFINIZIONE DI SUCCESSIONE NUMERICA:

UNA SUCCESSIONE NUMERICA È UNA FUNZIONE $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

ASSEGNANDO ALLA VARIABILE INDIPENDENTE $n \in \mathbb{N}$ I VALORI $0, 1, 2, \dots$ SI POSSONO (IN LINEA DI PRINCIPIO) OTTENERE I VALORI NUMERICI $a_0 = f(0)$, $a_1 = f(1)$, $a_2 = f(2)$, ...

<u>MOTIVAZIONI</u>: I TERMINI DI UNA SUCCESSIONE SI POSSONO USARE PER <u>APPROSSIMARE</u> UN VALORE NOTEVOLE

DEFINIZIONE DI LIMITE FINITO

SI DICE CHE UNA SUCCESSIONE DI TERMINI $a_0, a_1, a_2, \dots$ CONVERGE AL LIMITE ℓ, OVVERO CHE AMMETTE LIMITE FINITO $\ell \in \mathbb{R}$ SE LA DISUGUAGLIANZA $|a_n - \ell| < \varepsilon$ VALE <u>DEFINITIVAMENTE</u>, QUALUNQUE SIA IL VALORE DEL PARAMETRO $\varepsilon > 0$.

CIOÈ, QUALUNQUE SIA $\varepsilon > 0$ DEVE RISULTARE $|a_n - l| < \varepsilon$ PER OGNI VALORE DI n SUFFICIENTEMENTE GRANDE.

IN ALTRI TERMINI, DEVE ESISTERE UN VALORE PARTICOLARE DELL'INDICE n, CHE SI PUÒ INDICARE CON n_0, OPPURE $\bar{n}$, O ALTRO, TALE CHE RISULTI $|a_n - l| < \varepsilon$ PER OGNI $n \geq \bar{n}$.

DEFINIZIONE DI LIMITE INFINITO

SI DICE CHE LA SUCCESSIONE (a_n) DIVERGE A $+\infty$ SE LA DISUGUAGLIANZA $a_n \geq M$ VALE <u>DEFINITIVAMENTE</u> QUALUNQUE SIA IL VALORE DEL PARAMETRO $M \in \mathbb{R}$.

SI DICE CHE LA SUCCESSIONE DIVERGE A $-\infty$ SE LA SUCCESSIONE DEI TERMINI

$$-a_n$$

DIVERGE A $+\infty$.

07 OTT. 2020

LE SUCCESSIONI CHE NON AMMETTONO LIMITE SI DICONO <u>INDETERMINATE.</u>

---

08 OTT. 2020

LA DEFINIZIONE DI SUCCESSIONE DIVERGENTE A $-\infty$ SI PUÒ ANCHE FORMULARE DIRETTAMENTE, DICENDO CHE LA DISUGUAGLIANZA

$$a_n \leq M$$

VALE DEFINITIVAMENTE QUALUNQUE SIA IL VALORE DEL PARAMETRO M.

08 OTT. 2020

STUDIAMO LA SUCCESSIONE $a_n = 2n$, I CUI TERMINI SONO:

$$0, \ 2, \ 4, \ 6, \ \dots$$

ESSA È DIVERGENTE PERCHÉ, QUALUNQUE SIA IL VALORE DEL PARAMETRO M, LA DISUGUAGLIANZA

$$2n \geq M$$

VALE DEFINITIVAMENTE.

STUDIAMO LA SUCCESSIONE $a_n = \frac{1}{n}$, I CUI TERMINI SONO: OOPS, QUESTA FUNZIONE, CIOÈ

$$f(n) = \frac{1}{n}$$

NON HA PER DOMINIO L'INSIEME DEI NUMERI

$$\{0, \ 1, \ 2, \ 3, \ \dots\}$$

STUDIAMO ALLORA LA SUCCESSIONE

$$a_n = \frac{1}{n+1},$$

I CUI TERMINI SONO:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{1}{2},$$

$$a_2 = \frac{1}{3}, \quad a_3 = \frac{1}{4}, \dots$$

VERIFICHIAMO CHE CONVERGE A ZERO. A TAL FINE, DOBBIAMO VEDERE SE LA DISUGUAGLIANZA

$$|a_n - \ell| < \varepsilon$$

VALE DEFINITIVAMENTE QUALUNQUE SIA IL VALORE DEL PARAMETRO $\varepsilon > 0$.

NEL PRESENTE CASO, PONIAMO $\ell = 0$

08 OTT. 2020

POSTO $\ell = 0$, LA DISUGUAGLIANZA DIVENTA

$$|a_n| < \varepsilon$$

E SICCOME RISULTA

$$a_n = \frac{1}{n+1} > 0$$

PER OGNI $n \in \mathbb{N}$,

SI HA $|a_n| = a_n$

PER OGNI n.

PERCIÒ LA DISUGUAGLIANZA DA STUDIARE SI RIDUCE A

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

ESSA È SODDISFATTA QUANDO RISULTA

$$n+1 > \frac{1}{\varepsilon},$$

CIOÈ DEFINITIVAMENTE.

LA NOTAZIONE PER SCRIVERE I LIMITI DELLE SUCCESSIONI NUMERICHE.

SE LA SUCCESSIONE (a_n) CONVERGE AL LIMITE FINITO ℓ, SI SCRIVE

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell.$$

QUINDI POSSIAMO SCRIVERE

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{-2}{3n+1} = 0$$

0 8 OTT. 2020

SE LA SUCCESSIONE DIVERGE A $+\infty$ SI PUÒ SCRIVERE

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty.$$

SE, INVECE, DIVERGE A $-\infty$, SI PUÒ SCRIVERE $\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty.$

QUINDI POSSIAMO SCRIVERE

$$\lim_{n \to +\infty} 2n = +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} -3n = -\infty.$$

0 8 OTT. 2020

SI PUÒ ANCHE SCRIVERE, A SECONDA DEI CASI,

$$a_n \to \ell \in \mathbb{R}$$

$$a_n \to +\infty$$

$$a_n \to -\infty.$$

PERCIÒ POSSIAMO SCRIVERE:

$$2n \to +\infty$$

$$-3n \to -\infty$$

$$\frac{1}{n+1} \to 0$$

$$\frac{-2}{3n+1} \to 0$$

LA SCORCIATOIA PER IL CALCOLO DEI LIMITI CONSISTE NEL TRATTARE L'INFINITO COME UN NUMERO: AD ESEMPIO, PONENDO $n = +\infty$ NELL'ESPRESSIONE $2n$ SI TROVA $2 \cdot (+\infty)$, E SI PUÒ CONCLUDERE CHE LA SUCCESSIONE $a_n = 2n$ SIA $2 \cdot (+\infty) = +\infty$.

INOLTRE, PONENDO $n = +\infty$ NELL'ESPRESSIONE $-3n$ SI TROVA $-3 \cdot (+\infty) = -\infty$.

E ANCORA, PONENDO $n = +\infty$ NELL'ESPRESSIONE $\frac{1}{n+1}$ SI TROVA

$$\frac{1}{+\infty+1} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

INFINE, PONENDO $n = +\infty$ NELL'ESPRESSIONE $\frac{-2}{3n+1}$

SI TROVA $\frac{-2}{3\cdot(+\infty)+1} =$

$$= \frac{-2}{+\infty+1} = \frac{-2}{+\infty}$$

$$= 0$$

08 OTT. 2020

I DIFETTI DI QUESTO MODO DI PROCEDERE APPAIONO, AD ESEMPIO, NELLO STUDIO DELLA SUCCESSIONE $a_n = (-1)^n$, I CUI TERMINI SONO $1, -1, 1, -1, \ldots$

LA SUCCESSIONE È INDETERMINATA, CIOÈ NON È NÉ CONVERGENTE AD UN LIMITE FINITO, NÉ DIVERGENTE A $\pm\infty$.

SI PUÒ ANCHE DIRE CHE NON AMMETTE LIMITE.

IN QUESTO CASO, I VALORI +1 E −1 NON SI DICONO «LIMITI» MA «PUNTI LIMITE».

SI PUÒ DIRE CHE LA SUCCESSIONE $a_n = (-1)^n$ HA DUE PUNTI LIMITE.

SI NOTI CHE IL TENTATIVO DI ABBREVIARE QUESTO STUDIO PONENDO $n = +\infty$ CONDUCE ALL'ESPRESSIONE FUORVIANTE $(-1)^{+\infty}$.

08 OTT. 2020

CONSIDERIAMO, PER CONCLUDERE, LA SUCCESSIONE $a_n = (-1)^{2n}$, I CUI TERMINI SONO

$$1, \ 1, \ 1, \ 1, \ \ldots$$

INFATTI RISULTA

$$(-1)^{2n} = \left((-1)^2\right)^n = 1^n = 1$$

PER OGNI $n \in \mathbb{N}$.

SI TRATTA DUNQUE DI UNA SUCCESSIONE COSTANTE. POSTO $\ell = 1$ RISULTA

$$|a_n - \ell| = 0 < \varepsilon$$

PER OGNI $n \in \mathbb{N}$, QUALUNQUE SIA $\varepsilon > 0$.

0 8 OTT. 2020

CONCLUDIAMO CON L'OSSERVARE CHE, PONENDO $n = +\infty$ IN $(-1)^{2n}$ SI TROVA $(-1)^{2\cdot(+\infty)} = (-1)^{+\infty}$, IL CHE NON PORTA AL RISULTATO.

0 9 OTT. 2020

PER METTERE IN EVIDENZA LA DIFFERENZA FRA LA DEFINIZIONE DI LIMITE E L'INTERPRETAZIONE DELLO STUDENTE, CONSIDERIAMO LA SUCCESSIONE $a_n = (-1)^n$, I CUI TERMINI SONO

$1, \; -1, \; 1, \; -1, \; \dots$

0 9 OTT. 2020

LA CONDIZIONE INDICATA DALLO STUDENTE È SODDISFATTA CON $l = 1$.

INFATTI RISULTA

$$|a_n - l| < \varepsilon$$

PER $n = 0$, QUALUNQUE SIA $\varepsilon > 0$, IN QUANTO RISULTA $a_0 = 1$ E QUINDI $|a_0 - l| = 0$

VEDIAMO ALLORA LA DEFINIZIONE DI LIMITE: SE PRENDO $\varepsilon = 0,2$ LA DISUGUAGLIANZA

$$|a_n - l| < \varepsilon$$

NON È SODDISFATTA DEFINITIVAMENTE PERCHÉ NON È SODDISFATTA PER OGNI n DISPARI

COME SI PROCEDE PER TROVARE IL LIMITE DI UNA DATA SUCCESSIONE ?

IL DIFETTO DELLA DEFINIZIONE DI LIMITE STA NEL FATTO CHE ESSA RICHIEDE LA CONOSCENZA DEL LIMITE STESSO !

PURTROPPO, NON ESISTE UN PROCEDIMENTO MECCANICO PER TROVARE IL LIMITE (SE ESISTE) DI UNA SUCCESSIONE DATA.

LA RAGIONE DI CIÒ STA NEL FATTO CHE IL LIMITE, SE ESISTE FINITO, È UN NUMERO REALE, E I NUMERI REALI SONO...

SONO DEI LIMITI !

PIÙ PRECISAMENTE, I NUMERI REALI SONO I LIMITI DELLE SUCCESSIONI FONDAMENTALI DI NUMERI RAZIONALI.

UNA SUCCESSIONE (a_n) SI DICE <u>FONDAMENTALE</u> SE LA DISUGUAGLIANZA

$$|a_n - a_k| < \varepsilon$$

VALE DEFINITIVAMENTE QUALUNQUE SIA $\varepsilon > 0$.

NEL CORSO DI ANALISI MATEMATICA I SI STUDIANO SUCCESSIONI PARTICOLARMENTE SEMPLICI, I CUI LIMITI SI TROVANO APPLICANDO I TEOREMI SUI LIMITI:

① TEOREMA SUL LIMITE DI UNA SOMMA

SE $a_n \to a \in \mathbb{R}$ E $b_n \to b \in \mathbb{R}$ ALLORA RISULTA

$$a_n + b_n \to a + b$$

UN TEOREMA ANALOGO VALE PER LA DIFFERENZA E PER IL PRODOTTO:

$$a_n - b_n \to a - b$$

$$a_n b_n \to ab$$

09 OTT. 2020

② TEOREMA SUL LIMITE DEL RAPPORTO:

SE $a_n \to a \in \mathbb{R}$ E $b_n \to b \in \mathbb{R}$ CON $b \neq 0$, ALLORA

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$$

OSSERVAZIONE: IL CODOMINIO DELLE SUCCESSIONI NUMERICHE È L'INSIEME $\mathbb{R}$ DEI NUMERI REALI. L'IMMAGINE DI UNA SUCCESSIONE È L'INSIEME $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

$= \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, INSIEME DEI VALORI NUMERICI DEI SUOI TERMINI.

ESEMPIO: LA SUCCESSIONE $a_n = (-1)^n$ È UNA FUNZIONE $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ AVENTE PER CODOMINIO L'INSIEME $\mathbb{R}$ DEI NUMERI REALI. LA SUA IMMAGINE È L'INSIEME

$$\{ a_n \mid n \in \mathbb{N} \} = \{-1, 1\}$$

IL CODOMINIO COINCIDE CON L'IMMAGINE ?

IN GENERALE NO.

L'IMMAGINE DI UNA QUALUNQUE SUCCESSIONE NON PUÒ ESSERE L'INSIEME $\mathbb{R}$ DEI NUMERI REALI (GEORG CANTOR).

DEFINIZIONE DI FUNZIONE

DATI DUE INSIEMI A E B, DETTI DOMINIO E CODOMINIO, UNA FUNZIONE $f: A \longrightarrow B$ È UN SOTTOINSIEME $\Gamma \subset A \times B$ AVENTE LA PROPRIETÀ FUNZIONALE, CIOÈ TALE CHE PER OGNI $a \in A$ ESISTA UNO E UN SOLO $b \in B$ TALE CHE $(a, b) \in \Gamma$.

09 OTT. 2020

OSSERVAZIONE: SE $b_n \to b \in \mathbb{R}$ CON $b \neq 0$ ALLORA, PER LA DEFINIZIONE DI LIMITE, RISULTA

$$|b_n - b| < \varepsilon$$

DEFINITIVAMENTE.

SE $b > 0$, LA USO CON $\varepsilon = b$ E TROVO CHE $|b_n - b| < b$ DEFINITIVAMENTE, CIOÈ

$$-b < b_n - b < b.$$

LA PRIMA DI TALI DISUGUAGLIANZE SI RIDUCE A $b_n > 0$.

SIMILMENTE, SE $b < 0$ SI TROVA CHE $b_n < 0$ DEFINITIVAMENTE.

09 OTT. 2020

(5) TEOREMA SUL LIMITE DI UNA POTENZA

SE $a_n \to a \in \mathbb{R}$ E SE $b_n \to b \in \mathbb{R}$ CON $b > 0$, ALLORA

$$b_n^{a_n} \longrightarrow b^a$$

LA RISPOSTA AL PROBLEMA 1 È CHE TUTTI I NUMERI REALI $x \in \mathbb{R}$ SODDISFANO L'UGUAGLIANZA

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

PER VEDERLO, DOBBIAMO CONTROLLARE CHE IL SECONDO MEMBRO $|x|$ SODDISFI LA DEFINIZIONE DELLA RADICE QUADRATA, E CIOÈ:

1) CHE SIA $|x| \geq 0$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$, E QUESTO È VERO;

2) CHE RISULTI $|x|^2$ UGUALE AL RADICANDO x^2.

SICCOME

$$|x|^2 = |x| \cdot |x|$$

E

$$x^2 = x \cdot x,$$

L'UGUAGLIANZA

$$|x|^2 = x^2$$

SUSSISTE PER OGNI $x \in \mathbb{R}$ PER LA REGOLA DEI SEGNI.

SI NOTI CHE L'UGUAGLIANZA

$$\sqrt{x^2} = x$$

SUSSISTE SOLO PER $x \geq 0$.

13 OTT. 2020

POTENZE CON ESPONENTE REALE

L'OBIETTIVO È QUELLO DI DEFINIRE LA POTENZA

$$b^a$$

PER OGNI $a \in \mathbb{R}$. LO SI CONSEGUE ATTRAVERSO ALCUNE TAPPE:

TAPPA 1: SI DEFINISCE

$$b^n = \underbrace{b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ VOLTE}}$$

PER OGNI INTERO $n \geq 1$.

SI PONE, INOLTRE,

$$b^0 = 1 \text{ PER OGNI}$$

$b \in \mathbb{R}$. SI HA, IN PARTICOLARE, $0^0 = 1$.

TAPPA 2: PER OGNI n, k INTERI POSITIVI SI PONE

$$b^{\frac{n}{k}} = \left(\sqrt[k]{b}\right)^n.$$

QUESTO RICHIEDE CHE SI PRENDA $b \geq 0$

TAPPA 3 PONENDO ORA

$$b^{-\frac{n}{k}} = \frac{1}{b^{\frac{n}{k}}},$$

PER $b > 0$, LA POTENZA

$$b^q$$

RESTA DEFINITA PER OGNI VALORE RAZIONALE DELL'ESPONENTE $q \in \mathbb{Q}$

(IL SIMBOLO $\mathbb{Q}$ È UNO DEI TANTI SIMBOLI INTRODOTTI DA N. BOURBAKI)

TAPPA 4: POSSIAMO ORA DEFINIRE b^a PER OGNI $a \in \mathbb{R}$: PRENDIAMO UNA SUCCESSIONE DI NUMERI RAZIONALI q_i TALE CHE

$$\lim_{i \to \infty} q_i = a$$

E PONIAMO

$$b^a = \lim_{i \to \infty} b^{q_i}$$

RICORDANDO CHE LE POTENZE b^{q_i} SONO STATE DEFINITE ALLA TAPPA 3.

1 3 OTT. 2020

OSSERVAZIONE: TALVOLTA SI CHIAMANO «NUMERI NATURALI» GLI INTERI POSITIVI, DI CONSEGUENZA SI PUÒ CHIAMARE SUCCESSIONE NUMERICA UNA FUNZIONE A VALORI REALI AVENTE PER DOMINIO L'INSIEME DEGLI INTERI POSITIVI O QUELLO DEGLI INTERI NON NEGATIVI.

SI NOTI CHE IL CARATTERE DI UNA SUCCESSIONE, CIOÈ IL FATTO CHE ABBIA LIMITE O MENO, ED IL VALORE DEL LIMITE, VISTA LA DEFINIZIONE DI LIMITE, NON DIPENDONO DAL PRIMO TERMINE!

1 3 OTT. 2020

OSSERVAZIONE: LA FORMULA $0^0 = 1$ ALLA TAPPA 1 DEFINISCE L'OPERAZIONE ALGEBRICA DI ELEVAMENTO A POTENZA.

INVECE, L'ESPRESSIONE « 0^0 È INDETERMINATO » USA LA STESSA NOTAZIONE PER RIFERIRSI ALLA TEORIA DEI LIMITI.

OSSERVAZIONE: LE POTENZE b^a CON ESPONENTE REALE $a \in \mathbb{R}$ E BASE $b > 0$ SONO POSITIVE, CIOÈ RISULTA

$$b^a > 0$$

PROBLEMA 2 SERIE [102]

PER VERIFICARE CHE

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

DOBBIAMO VEDERE SE LA DISUGUAGLIANZA

$$|a_n - l| = \left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \text{ VALE}$$

DEFINITIVAMENTE, QUALUNQUE SIA $\varepsilon > 0$.

ESSA EQUIVALE A

$$\sqrt{n} > \frac{1}{\varepsilon}, \text{ LA QUALE}$$

È SODDISFATTA PER OGNI

$$n > \frac{1}{\varepsilon^2}, \text{ CIOÈ}$$

DEFINITIVAMENTE.

13 OTT. 2020

PROBLEMA 3 SERIE [102]

STUDIAMO LA SUCCESSIONE

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

I CUI TERMINI SONO:

$$-1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, \dots$$

POSTO $l = 0$, LA DISUGUAGLIANZA

$$|a_n - l| = \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \text{ VALE}$$

DEFINITIVAMENTE, PER OGNI $\varepsilon > 0$, QUINDI

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0.$$

14 OTT. 2020

OSSERVAZIONE: IL TENTATIVO DI FARE PRIMA PONENDO $n = +\infty$ NELL'ESPRESSIONE DI a_n PORTA A OTTENERE

$$\frac{(-1)^{+\infty}}{\sqrt{+\infty}},$$

UN'ESPRESSIONE FUORVIANTE.

OSSERVAZIONE: IL PROBLEMA 3 SI PUÒ RISOLVERE APPLICANDO UN TEOREMA:

IL RAPPORTO FRA UN TERMINE LIMITATO ED UNO DIVERGENTE TENDE A ZERO.

PER VEDERLO, INTRODUCIAMO IL CONCETTO DI LIMITATEZZA.

DEFINIZIONE: UNA SUCCESSIONE (a_n) SI DICE LIMITATA SUPERIORMENTE SE ESISTE UNA COSTANTE $C \in \mathbb{R}$ TALE CHE

$$a_n \leq C$$

PER OGNI $n \in \mathbb{N}$.

ESEMPIO: LA SUCCESSIONE $a_n = (-1)^n$ È LIMITATA SUPERIORMENTE, INFATTI RISULTA

$$(-1)^n \leq 1$$

PER OGNI $n \in \mathbb{N}$.

OSSERVAZIONE: È LEGITTIMO AFFERMARE CHE

$$(-1)^n \leq 2$$

PER OGNI $n \in \mathbb{N}$.

IN GENERALE, SE RISULTA

$a_n \leq C$ PER OGNI n,

E SE PRENDO $C' > C$,

ALLORA SI HA

$$a_n \leq C < C'$$

PER OGNI n.

CONCLUSIONE: SE UNA SUCCESSIONE È LIMITATA SUPERIORMENTE, ALLORA L'INSIEME DELLE POSSIBILI COSTANTI C È INFINITO.

DEFINIZIONE: LE COSTANTI C CHE INTERVENGONO NELLA DEFINIZIONE DI SUCCESSIONE LIMITATA SI DICONO MAGGIORANTI DELLA SUCCESSIONE.

14 OTT. 2020

ANALOGAMENTE, SI DICE CHE UNA SUCCESSIONE (a_n) È <u>LIMITATA INFERIORMENTE</u> SE AMMETTE ALMENO UN <u>MINORANTE</u>, CIOÈ SE ESISTE UNA COSTANTE $C \in \mathbb{R}$ TALE CHE

$$C \leq a_n \quad \text{PER OGNI } n.$$

<u>OSSERVAZIONE:</u> LA SUCCESSIONE $a_n = (-1)^n$ È ANCHE LIMITATA INFERIORMENTE, IN QUANTO

$$-1 \leq (-1)^n$$

PER OGNI n.

LE SUCCESSIONI LIMITATE SIA SUPERIORMENTE CHE INFERIORMENTE SI POSSONO DIRE:

1) LIMITATE SUPERIORMENTE;

2) LIMITATE INFERIORMENTE;

3) LIMITATE.

<u>TEOREMA</u>: SE (a_n) È UNA SUCCESSIONE LIMITATA E $b_n \longrightarrow +\infty$, ALLORA

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

<u>DIMOSTRAZIONE</u>: PER LA DEFINIZIONE DI LIMITE, DOBBIAMO VERIFICARE CHE

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \ell \right| =$$

$$= \frac{|a_n|}{b_n} < \varepsilon$$

DEFINITIVAMENTE PER OGNI $\varepsilon > 0$.

OSSERVIAMO CHE, SICCOME $b_n \longrightarrow +\infty$ PER IPOTESI, PER LA DEFINIZIONE DI LIMITE INFINITO SI HA $b_n \geq M$ DEFINITIVAMENTE, QUALUNQUE SIA $M \in \mathbb{R}$, E QUINDI, PRENDENDO $M = 1$, DEVE AVERSI

$$b_n \geq 1 > 0$$

DEFINITIVAMENTE, E PERCIÒ $|b_n| = b_n$ DEFINITIVAMENTE.

SAPENDO CHE $b_n > 0$ DEFINITIVAMENTE, LA DISUGUAGLIANZA

$$\frac{|a_n|}{b_n} < \varepsilon$$

SI PUÒ RISCRIVERE

$$b_n > \frac{|a_n|}{\varepsilon}$$

E NOI CI CHIEDIAMO SE VALE DEFINITIVAMENTE. PER RISPONDERE, DOBBIAMO USARE LE DUE IPOTESI DEL TEOREMA: SAPENDO CHE a_n È LIMITATA, POSSIAMO DIRE CHE ESISTE UNA COSTANTE C TALE CHE $|a_n| \leq C$ PER OGNI n.

NE SEGUE CHE

$$\frac{|a_n|}{\varepsilon} \leq \frac{C}{\varepsilon}.$$

MA ALLORA, SICCOME $b_n \geq M$ DEFINITIVAMENTE, PRENDENDO $M > \frac{C}{\varepsilon}$

SI TROVA

$$b_n > \frac{C}{\varepsilon} \geq \frac{|a_n|}{\varepsilon}$$

DEFINITIVAMENTE, E IL TEOREMA È DIMOSTRATO.

14 OTT. 2020

LA SUCCESSIONE $a_n = (-1)^n$ È UN ESEMPIO DI SUCCESSIONE LIMITATA CHE NON AMMETTE LIMITE.

SI PUÒ PERÒ DIMOSTRARE CHE TUTTE <u>LE SUCCESSIONI CONVERGENTI SONO LIMITATE</u>: INFATTI, SE

$$a_n \longrightarrow l \in \mathbb{R},$$

SI HA

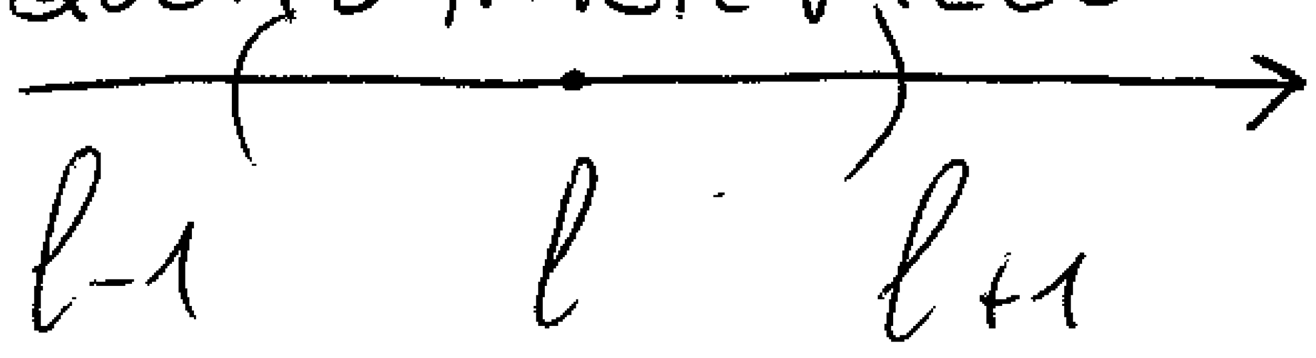
$$|a_n - l| < 1$$

DEFINITIVAMENTE, IL CHE SI PUÒ ANCHE SCRIVERE

$$l - 1 < a_n < l + 1$$

(SI RAMMENTI CHE IL VALORE ASSOLUTO $|x - y|$ RAPPRESENTA LA DISTANZA TRA x ED y SULLA RETTA)

I PUNTI a_n SI TROVANO DEFINITIVAMENTE IN QUESTO INTERVALLO



I TERMINI a_n CHE NON DOVESSERO SODDISFARE LE DISUGUAGLIANZE

$$l - 1 < a_n < l + 1$$

SONO IN NUMERO FINITO, QUINDI VE NE È UNO PIÙ PICCOLO DI TUTTI, ED UNO PIÙ GRANDE DI TUTTI, E PERCIÒ ESISTONO DUE COSTANTI C_1, C_2 TALI CHE

$$C_1 \le a_n \le C_2$$

PER TUTTI GLI n.

CONSIDERIAMO ORA UNA SUCCESSIONE CONVERGENTE $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$.

SAPPIAMO CHE ESISTONO C_1, C_2 TALI CHE

$$C_1 \le a_n \le C_2$$

PER OGNI n. SI PUÒ DIMOSTRARE CHE

$$C_1 \le \ell \le C_2 .$$

VEDIAMO UNA FORMULAZIONE PIÙ GENERALE.

<u>TEOREMA:</u> CONSIDERIAMO DUE SUCCESSIONI (a_n) E (b_n) TALI CHE $a_n \le b_n$ PER OGNI n.

① SE $a_n \to A$ E $b_n \to B$, CON A E B FINITI O INFINITI, ALLORA RISULTA

$$A \le B .$$

② SOTTO LA SOLA IPOTESI CHE $a_n \to +\infty$ SI PUÒ DIMOSTRARE CHE

$$b_n \to +\infty .$$

<u>APPLICAZIONE</u> PER OGNI $b>1$ SI HA CHE

$$\lim_{n\to+\infty} b^n = +\infty .$$

PER VERIFICARE CHE

$$\lim_{n\to+\infty} b^n = +\infty$$

NELL'IPOTESI $b>1$,

OSSERVIAMO CHE

$$b^{n+1} = b \cdot b^n$$

E QUINDI

$$b^{n+1} - b^n =$$
$$= b \cdot b^n - b^n =$$
$$= (b-1)\, b^n$$
$$\geq (b-1)$$ PERCHÉ

$b^n \geq 1$ PER IPOTESI.

QUINDI POSSIAMO SCRIVERE:

$$b-1 \geq b-1$$
$$b^2 - b \geq b-1$$
$$b^3 - b^2 \geq b-1$$
$$b^4 - b^3 \geq b-1$$
$$\dots$$
$$b^n - b^{n-1} \geq b-1$$

$$b^n - 1 \geq (b-1)\cdot n$$

NE SEGUE CHE

$$b^n \geq (b-1)n + 1$$

E LA TESI SI RICAVA DAL FATTO CHE

$$\lim_{n\to+\infty} \left[(b-1)n+1\right] = +\infty$$

E CIÒ SEGUE DAL FATTO CHE RISULTA $(b-1)n + 1 \geq M$ PER $n \geq \dfrac{M-1}{b-1}$.

ALTRA APPLICAZIONE:

SCELTO ARBITRARIAMENTE UN NUMERO REALE $\alpha > 0$, RISULTA CHE

$$\lim_{n \to +\infty} n^{\alpha} = +\infty$$

ESEMPIO:

$$\lim_{n \to +\infty} n^{2} = +\infty$$

ESEMPIO:

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

LA DIMOSTRAZIONE DELLA TESI SI PUÒ SVOLGERE IN DUE PASSI:

<u>PASSO N. 1</u>: CONSIDERIAMO $\alpha = \frac{1}{k}$ CON k INTERO POSITIVO, CIOÈ

$$n^{\alpha} = n^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{n}$$

IN QUESTO CASO BASTA OSSERVARE CHE LA DISUGUAGLIANZA

$$\sqrt[k]{n} \geq M$$

È SODDISFATTA PER OGNI $n \geq M^{k}$, CIOÈ DEFINITIVAMENTE, SE $M \geq 0$.

OSSERVIAMO, INCIDENTALMENTE, CHE PER VERIFICARE CHE UNA SUCCESSIONE (a_n) DIVERGE A $+\infty$, È SUFFICIENTE VERIFICARE CHE $a_n \geq M$ DEFINITIVAMENTE PER OGNI $M \geq 0$.

NON C'È BISOGNO DI PREOCCUPARSI DEL CASO $M < 0$.

INFATTI, SE $a_n \geq M$ DEFINITIVAMENTE PER QUALUNQUE $M \geq 0$, ALLORA RISULTA

$$a_n \geq 0$$

DEFINITIVAMENTE, E PERCIÒ

$$a_n \geq 0 > C$$

QUALUNQUE SIA $C < 0$.

PASSO 2: FISSO α REALE E POSITIVO, E PRENDO UN INTERO $k > \frac{1}{\alpha}$ COSICCHÉ $\alpha \geq \frac{1}{k}$ E QUINDI

$$n^\alpha \geq n^{\frac{1}{k}}$$

E SICCOME $n^{1/k} \longrightarrow +\infty$, PER IL TEOREMA DEL CONFRONTO SI DEDUCE CHE

$$n^\alpha \longrightarrow +\infty.$$

ESEMPI TIPICI

1. COMBINAZIONE LINEARE DI POTENZE DI n, CIOÈ SOMMA DI POTENZE DI n MOLTIPLICATE PER COSTANTI:

$$\lim_{n \to +\infty} (2\sqrt{n} + n)$$

$$\geq \lim_{n \to +\infty} n = +\infty,$$

PERCHÉ $2\sqrt{n} + n \geq n$ PER OGNI $n \in \mathbb{N}$, QUINDI POSSO APPLICARE IL TEOREMA DEL CONFRONTO.

STUDIAMO ALLORA IL LIMITE

$$\lim_{n \to +\infty} (2\sqrt{n} - n)$$

SI HA CHE

$$2\sqrt{n} - n =$$

$$= n \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{n}} - 1 \right)$$

PER OGNI $n > 0$.

RICORDIAMO CHE IL RAPPORTO FRA UNA SUCCESSIONE LIMITATA E UNA DIVERGENTE TENDE A ZERO, POSSIAMO DIRE CHE

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0$$

QUINDI

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{n}} - 1 \right) = -1$$

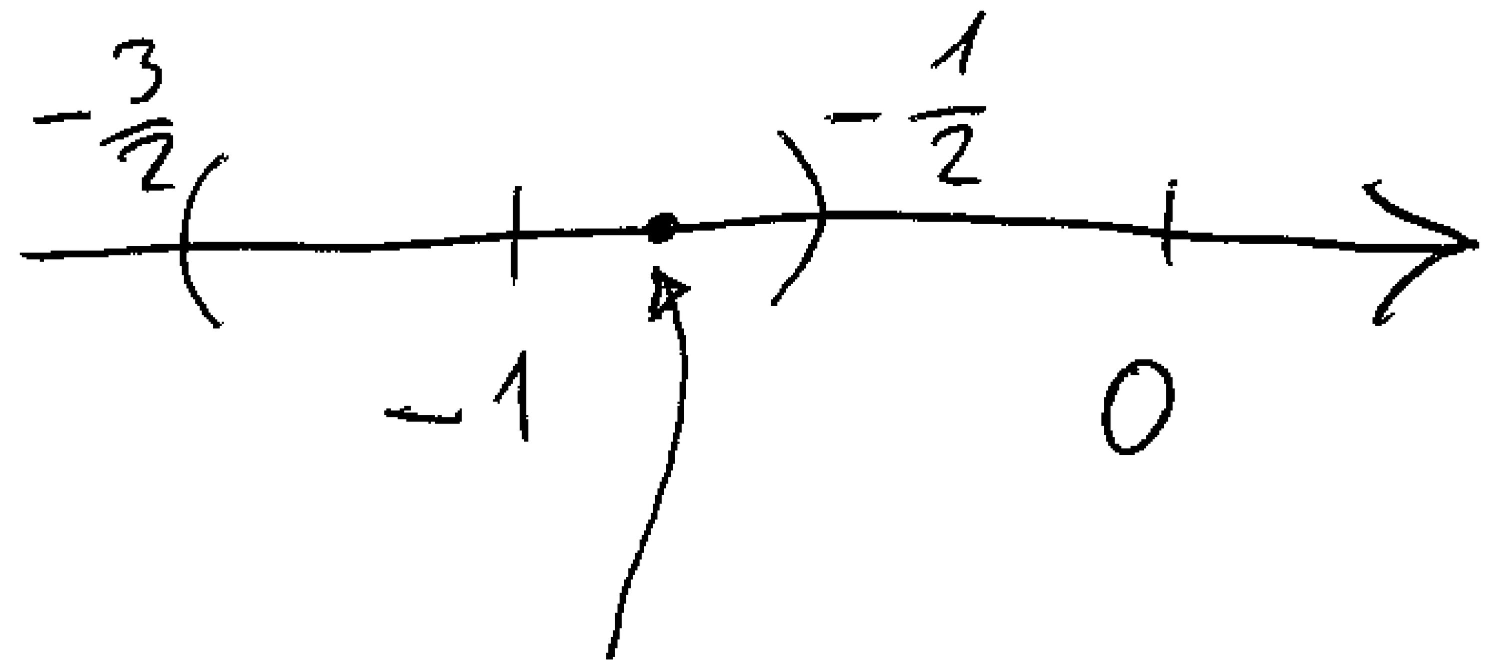
PER IL TEOREMA SUL LIMITE DELLA DIFFERENZA.

PONIAMO ALLORA $\varepsilon = \frac{1}{2}$

NELLA DEFINIZIONE DI LIMITE, E TROVIAMO CHE

$$\left| \frac{2}{\sqrt{n}} - 1 - (-1) \right| < \frac{1}{2}$$

DEFINITIVAMENTE:



$$\frac{2}{\sqrt{n}} - 1$$

$$\boxed{\text{QUINDI } \frac{2}{\sqrt{n}} - 1 < -\frac{1}{2} \text{ DEFINITIVAMENTE}}$$

MA ALLORA, MOLTIPLICANDO PER $n > 0$, SI TROVA

$$n \left(\frac{2}{\sqrt{n}} - 1 \right) < -\frac{n}{2}$$

E SICCOME SI VEDE CHE $-\frac{n}{2} \leq C$

DEFINITIVAMENTE PER OGNI $C < 0$, SI CONCLUDE CHE

$$\lim_{n \to +\infty} (2\sqrt{n} - n) = -\infty$$

15 OTT. 2020

· DISCUTIAMO IL TEST [103]

LA SUCCESSIONE $a_n = 2^n$ È DEL TIPO b^n CON $b = 2 > 1$ QUINDI DIVERGE A $+\infty$

SI HA CHE $\left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{1}{10^n}$, E 10^n DIVERGE PERCHÉ DELLA FORMA b^n CON $b = 10 > 1$.

SICCOME IL RAPPORTO TRA UN TERMINE LIMITATO ED UNO DIVERGENTE TENDE A ZERO, SI TROVA:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 0$$

IN GENERALE, PRESO c POSITIVO E MINORE DI 1, RISULTA CHE $b = \frac{1}{c} > 1$ E QUINDI

$$c^n = \frac{1}{b^n} \to 0$$

INOLTRE, SE PRENDO UNA BASE a SODDISFACENTE

$$-1 < a < 1$$

OVVERO $|a| < 1$, ALLORA, POSTO $c = |a|$ TROVIAMO

$$|a^n| = c^n \to 0$$

QUINDI, PER LA DEFINIZIONE DI LIMITE,

$$\lim_{n \to +\infty} a^n = 0$$

15 OTT. 2020

STUDIAMO $a_n = \frac{n+1}{n}$

E OSSERVIAMO CHE

$$n+1 \geq n$$

PER OGNI n.

SI NOTI CHE CIÒ VALE ANCHE PER

$$b_n = \frac{n+n}{n} = 2.$$

NEL NOSTRO CASO, POSSIAMO SCRIVERE

$$a_n = 1 + \frac{1}{n}$$ E

QUINDI

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

PER IL TEOREMA SUL LIMITE DELLA SOMMA.

16 OTT. 2020

VERIFICHIAMO CHE

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

IL CHE EQUIVALE A DIRE CHE

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n}{n+1} - 1 \right) = 0.$$

OVVIAMENTE VALE L'UGUAGLIANZA

$$\frac{n}{n+1} - 1 = \frac{n-(n+1)}{n+1}$$

$$= -\frac{1}{n+1} \to 0.$$

È PERFETTAMENTE LEGITTIMO SCRIVERE

$$\frac{n}{n+1} = \frac{n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \to 1$$

PER IL TEOREMA SUL LIMITE DEL RAPPORTO.

16 OTT. 2020

L'OSSERVAZIONE CHE

$$\frac{n}{n+1} < 1 \quad \text{PER OGNI } n$$

SI COMBINA COL RISULTATO CHE $\frac{n}{n+1} \to 1$

E SI PUÒ SCRIVERE

$$\frac{n}{n+1} \longrightarrow 1^-$$

UN ALTRO TIPICO ESEMPIO DI SUCCESSIONE TRATTABILE CON I METODI FIN QUI ILLUSTRATI È IL RAPPORTO FRA DUE COMBINAZIONI LINEARI DI POTENZE DI n

16 OTT. 2020

PROBLEMI [104]

1) OSSERVIAMO CHE

$$\lim_{n\to+\infty} \left(n^2 + 10^{10} n - \sqrt{2}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n^2 \left(1 + \frac{10^{10}}{n} - \frac{\sqrt{2}}{n^2}\right)$$

E CHE

$$1 + \frac{10^{10}}{n} - \frac{\sqrt{2}}{n^2} \to 1$$

QUINDI

$$1 + \frac{10^{10}}{n} - \frac{\sqrt{2}}{n^2} > \frac{1}{2}$$

DEFINITIVAMENTE: CIÒ DISCENDE DAL FATTO CHE

$$\frac{10^{10}}{n} - \frac{\sqrt{2}}{n^2} > -\frac{1}{2}$$

DEFINITIVAMENTE. MOLTIPLICANDO AMBO I MEMBRI PER n^2 TROVIAMO

$$n^2 + 10^{10} n - \sqrt{2} =$$

$$n^2 \left(1 + \frac{10^{10}}{n} - \frac{\sqrt{2}}{n^2}\right)$$

$$> \frac{n^2}{2}$$ DEFINITIVA-

MENTE. PER IL TEO-

REMA DEL CONFRONTO,

SI CONCLUDE CHE

$$n^2 + 10^{10} n - \sqrt{2} \to +\infty.$$

16 OTT. 2020

VISTO IL RIPETUTO UTILIZZO, CONVIENE ENUNCIARE LA SEGUENTE ESTENSIONE DEL TEOREMA SUL LIMITE DEL PRODOTTO:

SE $a_n \to +\infty$ E

$b_n \to B > 0$

ALLORA $a_n b_n \to +\infty$.

(È AMMESSO $B = +\infty$)

VALGONO ANALOGHI ENUNCIATI NEL CASO IN CUI

$a_n \to -\infty$ E/O

$b_n \to B < 0$.

SI APPLICA LA REGOLA DEI SEGNI.

SIMILMENTE SI TROVA CHE

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sqrt{3} - 7n^2\right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} n^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{n^2} - 7\right)$$

$$= -\infty.$$

SEGUENDO IL SUGGERIMENTO, SCRIVIAMO

$$a_n = \frac{1 + \frac{10^{10}}{n} - \frac{\sqrt{2}}{n^2}}{\frac{\sqrt{3}}{n^2} - 7}$$

QUINDI $a_n \to -\frac{1}{7}$

PER IL TEOREMA SUL LIMITE DEL RAPPORTO.

16 OTT. 2020

2) CERCHIAMO INNANZITUTTO IL $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+3n}$.

POSSIAMO OSSERVARE CHE

$$n^2+3n \geq n^2$$

QUINDI

$$\sqrt{n^2+3n} \geq n$$

PER OGNI n, E PERCIÒ

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+3n} = +\infty$$

PER IL TEOREMA DEL CONFRONTO.

POSSIAMO ANCHE OSSERVARE CHE $b_n \geq 0$

QUINDI, PER IL TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO, IL LIMITE

$\lim_{n\to+\infty} b_n$, SE ESISTE,

NON È NEGATIVO.

NOTA: IL TEOREMA ILLUSTRATO IL 09/10 IMPLICA CHE SE

$b_n \geq 0$ DEFINITIVAMENTE, E $b_n \to B$,

ALLORA $B \geq 0$.

CI CHIEDIAMO ADESSO: COSA SUCCEDE SE SCRIVIAMO

$$b_n = n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}} - 1\right)?$$

IL TEOREMA SUL PRODOTTO NON È APPLICABILE!

SCRIVIAMO ALLORA $b_n =$

$$= n\frac{\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}-1\right)\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1\right)}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1}$$

$$= n\frac{\left(1+\frac{3}{n}\right)-1}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1} \to \frac{3}{2}$$

16 OTT. 2020

DEFINIZIONE: UNA SUCCESSIONE (a_n) SI DICE CRESCENTE SE RISULTA

$$a_n < a_{n+1}$$

PER OGNI n. A VOLTE SI DICE « STRETTAMENTE CRESCENTE » NEL SUDDETTO CASO, E CRESCENTE DEBOLMENTE SE $a_n \leq a_{n+1}$ PER OGNI n. IN QUEST'ULTIMO CASO SI DICE ANCHE « NON DECRESCENTE »

ANALOGHE ESPRESSIONI SI USANO PER LE SUCCESSIONI DECRESCENTI.

ESEMPIO: $a_n = n$ È CRESCENTE STRETTAMENTE, $b_n = \frac{1}{n}$ È DECRESCENTE STRETTAMENTE, $(-1)^{2n}$ È CRESCENTE E DECRESCENTE NEL SENSO DEBOLE DEL TERMINE, PERCHÉ È COSTANTE.

$(-1)^n$ NON È NÉ CRESCENTE, NÉ DECRESCENTE.

LA COMPLETEZZA

È LA PROPRIETÀ PIÙ IMPORTANTE DELL'INSIEME DEI NUMERI REALI, ED È ANCHE LA MENO CONOSCIUTA.

ESSA AMMETTE VARIE FORMULAZIONI EQUIVALENTI, UNA DELLE QUALI È LA SEGUENTE:

TUTTE LE SUCCESSIONI MONOTONE AMMETTONO LIMITE. PIÙ PRECISAMENTE, LE SUCCESSIONI MONOTONE E LIMITATE CONVERGONO AD UN LIMITE FINITO, MENTRE QUELLE MONOTONE E ILLIMITATE DIVERGONO.

OSSERVAZIONE: SAPPIAMO DAL 14/10 CHE LA SUCCESSIONE

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

CONVERGE A ZERO, E VEDIAMO CHE NON È MONOTONA.

DUNQUE LA MONOTONIA È CONDIZIONE SUFFICIENTE MA NON NECESSARIA PER L'ESISTENZA DEL LIMITE.

20 OTT. 2020

OSSERVAZIONE: SE UNA SUCCESSIONE (a_n) È MONOTONA NON DECRESCENTE, ALLORA, PER LA PROPRIETÀ TRANSITIVA DELLA DISUGUAGLIANZA, SI HA

$$a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n$$

QUINDI a_0 È UN MINORANTE, E LA SUCCESSIONE È INFERIORMENTE LIMITATA.

OSSERVAZIONE: LE SUCCESSIONI MONOTONE NON DECRESCENTI POSSONO ESSERE SUPERIORMENTE LIMITATE, COME $a_n = 1$, OPPURE ILLIMITATE, COME $a_n = n$.

PER LE SUCCESSIONI NON CRESCENTI, CIOÈ TALI CHE $a_n \geq a_{n+1}$ PER OGNI n, SI PUÒ DIRE CHE SONO SUPERIORMENTE LIMITATE, E POSSONO ESSERE INFERIORMENTE LIMITATE, COME $a_n = 1$, OPPURE ILLIMITATE COME $a_n = -n$.

OSSERVAZIONE: LE SUCCESSIONI STRETTAMENTE CRESCENTI, COME $a_n = n$, POSSONO DIRSI NON DECRESCENTI PERCHÉ LA DISUGUAGLIANZA $a_n < a_{n+1}$ IMPLICA $a_n \leq a_{n+1}$.

20 OTT. 2020

APPLICAZIONI

LA COMPLETEZZA ASSICURA LA BUONA POSITURA DELLA DEFINIZIONE DEL NUMERO DI NEPERO,

L'ESISTENZA DELLE RADICI QUADRATE,

L'ESISTENZA DEI LOGARITMI DEI NUMERI REALI POSITIVI,

E CONSENTE DI DIMOSTRARE IL TEOREMA DI WEIERSTRASS SULL'ESISTENZA DEI MASSIMI E DEI MINIMI.

IL NUMERO DI NEPERO

È UN NUMERO IRRAZIONALE COMPRESO FRA 2,718 E 3, INDICATO CON LA LA LETTERA e, INIZIALE DEL NOME DI EULERO.

PER DEFINIRLO, PARTIAMO DALLE SUCCESSIONI

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{E}$$

$$b_n = a_n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

SI DIMOSTRA CHE (a_n) È STRETTAMENTE CRESCENTE, E (b_n) È STRETTAM. DECRESCENTE.

SAPENDO CHE TALI SUCCESSIONI SONO MONOTÒNE, SI TROVA CHE

$$a_1 = 2 \leq a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n \leq b_1 = 4$$

QUINDI SONO ANCHE LIMITATE, E PERCIÒ AMMETTONO LIMITE FINITO.

POSTO $a = \lim_{n\to+\infty} a_n$

E $b = \lim_{n\to+\infty} b_n$,

APPLICANDO IL TEOREMA SUL LIMITE DEL PRODOTTO ALLA SUCCESSIONE

$$b_n = a_n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)$$

SI TROVA

$$b = a.$$

IL COMUNE VALORE DEI LIMITI DI a_n E b_n SI CHIAMA NUMERO DI NEPERO (EULER'S NUMBER) E SI INDICA CON LA LETTERA e.

$$e = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

20 OTT. 2020

FORME INDETERMINATE

SI SUOLE DIRE CHE « $\infty - \infty$ È UNA FORMA INDETERMINATA »

LO STESSO SI DICE PER $0 \cdot \infty$: « $0 \cdot \infty$ È UNA FORMA INDETERMINATA », COME PURE PER $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 1^∞, 0^0, ∞^0.

QUANDO SI DICE CHE $\infty - \infty$ È UNA FORMA INDETERMINATA SI INTENDE QUANTO SEGUE:

SE ABBIAMO DUE SUCCESSIONI (a_n) E (b_n) ENTRAMBE DIVERGENTI A $+\infty$, LA SUCCESSIONE $(a_n - b_n)$ PUÒ:

1) NON AVERE LIMITE;
2) DIVERGERE A $+\infty$;
3) DIVERGERE A $-\infty$;
4) CONVERGERE AD UN QUALUNQUE NUMERO REALE ℓ,

A SECONDA DI COME SONO FATTE LE SUCCESSIONI (a_n) E (b_n).

20 OTT. 2020

PER VERIFICARE QUANTO SOPRA DOBBIAMO, PER CIASCUNO DEI QUATTRO CASI, TROVARE DUE SUCCESSIONI (a_n) E (b_n) CHE COSTITUISCANO UN VALIDO ESEMPIO.

1) PONIAMO $a_n = n + (-1)^n$ E $b_n = n$. CHIARAMENTE $b_n \to +\infty$. SI HA, INOLTRE, CHE $a_n \geq n-1$ PER OGNI n. POICHÉ $n-1 \geq M$ PER OGNI $n \geq M+1$, SI CONCLUDE CHE

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty.$$

CERCHIAMO ADESSO IL LIMITE

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n - b_n)$$

SICCOME $a_n - b_n = n + (-1)^n - n = (-1)^n$ PER OGNI n, SI CONCLUDE CHE LA DIFFERENZA $a_n - b_n$ NON AMMETTE LIMITE:

DUNQUE IL CASO N. 1 PUÒ VERIFICARSI!

20 OTT. 2020

2) PRENDIAMO $a_n = 2n$ E $b_n = n$. SAPPIAMO CHE $b_n \to +\infty$, E, SICCOME $2n \geq M$ PER OGNI $n \geq \frac{1}{2}M$, POSSIAMO SCRIVERE

$$a_n \to +\infty.$$

STUDIAMO IL LIMITE

$$\lim_{n \to +\infty} (a_n - b_n) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} (2n - n)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} n = +\infty,$$

QUINDI IL CASO N. 2 PUÒ VERIFICARSI!

3) PRENDIAMO $a_n = \frac{n}{2}$ E $b_n = n \to +\infty$. SICCOME $\frac{n}{2} \geq M$ PER OGNI $n \geq 2M$, POSSIAMO SCRIVERE

$$a_n \to +\infty.$$

STUDIAMO IL LIMITE

$$\lim_{n \to +\infty} (a_n - b_n) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n}{2} - n\right) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{-n}{2} = -\infty$$

COME SI VEDE DALLA DEFINIZIONE DI LIMITE, IN QUANTO $-\frac{n}{2} \leq M$ PER $n \geq -2M$.

4) FISSIAMO ARBITRARIAMENTE UN NUMERO REALE ℓ E CONSIDERIAMO LE SUCCESSIONI $a_n = n + \ell$ E $b_n = n \to +\infty$.

POICHÉ RISULTA $n + \ell \geq M$ PER OGNI $n \geq M - \ell$, POSSIAMO SCRIVERE $a_n \to +\infty$.

STUDIAMO ALLORA IL LIMITE $\lim_{n \to +\infty} (a_n - b_n)$

$$= \lim_{n \to +\infty} (n + \ell - n) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \ell = \ell.$$

DUNQUE IL SOLO FATTO DI SAPERE CHE (a_n) E (b_n) DIVERGONO A $+\infty$ NON CONSENTE DI STABILIRE SE LA SUCCESSIONE $(a_n - b_n)$ AMMETTA LIMITE, NÉ TANTOMENO DI <u>DETERMINARNE</u> IL LIMITE QUALORA ESSO ESISTA.

20 OTT. 2020

IL SIGNIFICATO DELLE ALTRE ESPRESSIONI, CHE UTILIZZANO, CON ABUSO DI NOTAZIONE, I SIMBOLI DELL'ALGEBRA, È ANALOGO.

20 OTT. 2020

CONSIDERIAMO AD ESEMPIO «$0 \cdot \infty$ È UNA FORMA INDETERMINATA». CIÒ SIGNIFICA CHE, SE ABBIAMO DUE SUCCESSIONI (a_n) E (b_n), DI CUI (a_n) È INFINITESIMA, CIOÈ TENDE A ZERO, E (b_n) È DIVERGENTE, PUÒ ACCADERE CHE IL PRODOTTO $a_n \cdot b_n$

1) NON ABBIA LIMITE;

2) DIVERGA A $+\infty$;

3) DIVERGA A $-\infty$;

4) CONVERGA AD UN QUALUNQUE NUMERO REALE l,

A SECONDA DI COME SONO FATTE LE SUCCESSIONI (a_n) E (b_n).

TEST [105]

21 OTT. 2020

LA SUCCESSIONE 1^n ASSUME IDENTICAMENTE IL VALORE 1, CIOÈ È COSTANTE, E QUINDI CONVERGE AD 1.

SI PUÒ SCRIVERE $n^2 - 10^{10} n = n^2 \left(1 - \frac{10^{10}}{n}\right)$ E DEDURRE CHE DIVERGE A $+\infty$.

SI PUÒ SCRIVERE $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+70} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{70} \to e$

PER TROVARE IL LIMITE DI

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

SEGUIAMO IL SUGGERIMENTO.

POSTO $k = n-1$, OVVERO $n = k+1$,

SI TROVA $1 + \frac{1}{k} =$

$$= 1 + \frac{1}{n-1} =$$

$$= \frac{n-1+1}{n-1} = \frac{n}{n-1}$$

QUINDI $\frac{1}{1+\frac{1}{k}} =$

$$= \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}.$$

MA ALLORA $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n =$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}} =$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{k}}$$

PER OGNI $n \geq 2$

SCRIVIAMO I PRIMI TERMINI DELLA SUCCESSIONE

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

n	k	$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$	$\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k-1}$
1	0	0	
2	1	$1/4$	$1/4$
3	2	$(2/3)^3$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$
		...	...

LA SUCCESSIONE $a_n = [n]$ COINCIDE CON $b_n = n$, QUINDI DIVERGE A $+\infty$.

PER CONCLUDERE, CERCHIAMO LA PARTE INTERA DI

$$\frac{n^2+(-1)^n}{10^{-10}n-\sqrt{3}+n^2}$$

SICCOME

$$n^2+(-1)^n \geq n^2-1,$$

RISULTA $n^2+(-1)^n > 0$ PER OGNI $n > 1$.

INOLTRE $n^2-\sqrt{3}+10^{-10}n > n^2-3 > 0$ PER OGNI $n \geq 2$.

MA ALLORA, PER LA REGOLA DEI SEGNI,

$$a_n = \frac{n^2+(-1)^n}{10^{-10}n-\sqrt{3}+n^2} > 0 \text{ PER } n \geq 2.$$

INOLTRE, PER EFFETTO DEL TERMINE $10^{-10}n$, RISULTA $10^{-10}n-\sqrt{3}+n^2 > n^2+(-1)^n$ DEFINITIVAMENTE.

BASTA PRENDERE n IN MODO TALE CHE $10^{-10}n - \sqrt{3} > (-1)^n$, E

CIOÈ CHE

$$10^{-10}n > \sqrt{3} + (-1)^n$$

E QUESTO È POSSIBILE PRENDENDO

$$n > 4 \cdot 10^{10}.$$

INFATTI, SE PRENDO $n > 4 \cdot 10^{10}$, HO CHE

$$10^{-10}n > 4 > \sqrt{3} + 1 \geq$$
$$\geq \sqrt{3} + (-1)^n.$$

QUINDI, PER $n > 4 \cdot 10^{10}$ SI HA CHE

$$0 < a_n < 1$$

RICORDIAMO CHE, SE $x, y > 0$ E $x < y$, ALLORA

$$0 < \frac{x}{y} < 1,$$

QUINDI $\left[\frac{x}{y}\right] = 0.$

MA ALLORA $[a_n] = 0$ PER OGNI $n > 4 \cdot 10^{10}$, E QUINDI

$$\lim_{n \to +\infty} [a_n] = 0$$

21 OTT. 2020

SI NOTI CHE È CORRETTO SCRIVERE

$$a_n = \frac{1 + \frac{(-1)^n}{n^2}}{\frac{10^{10}}{n} - \frac{\sqrt{3}}{n^2} + 1}$$

DA CUI SEGUE IMMEDIATAMENTE CHE

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 1.$$

QUINDI SI HA

$$1 - \varepsilon < a_n < 1$$

DEFINITIVAMENTE, QUALUNQUE SIA $\varepsilon > 0$.

LE CONSIDERAZIONI PRECEDENTI MOSTRANO CHE, SE UNA SUCCESSIONE (a_n) TENDE AD 1, NON È DETTO CHE

$$[a_n] \longrightarrow [1] = 1$$

21 OTT. 2020

IL VALORE ASSOLUTO E LA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

SOLITAMENTE, SI DEFINISCE IL VALORE ASSOLUTO DI $x \in \mathbb{R}$ DISTINGUENDO DUE CASI:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{SE } x \geq 0 \\ -x, & \text{SE } x < 0 \end{cases}$$

L'ERRORE TIPICO È QUELLO DI RITENERE CHE SE SCRIVO $|x|$ VUOL DIRE CHE $x > 0$. QUESTO NON È VERO: SI PENSI, AD ESEMPIO, CHE $|-3| = 3$ BENCHÉ $-3 < 0$.

È VERO, INVECE, CHE $|x| \geq 0$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$.

FINORA ABBIAMO USATO IL VALORE ASSOLUTO PER:

1) DEFINIRE $\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$ DICENDO CHE $|a_n - \ell| < \varepsilon$ DEFINITIVAMENTE, QUALUNQUE SIA $\varepsilon > 0$.

2) DEFINIRE (a_n) LIMITATA DICENDO CHE ESISTE $C \geq 0$ TALE CHE $|a_n| \leq C$ PER OGNI n

3) STABILIRE L'UGUAGLIANZA $\sqrt{x^2} = |x|$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$.

È UTILE OSSERVARE CHE LA DISUGUAGLIANZA

$$|a_n| \leq C$$

EQUIVALE A

$$-C \leq a_n \leq C$$

SIMILMENTE, LA DISUGUAGLIANZA

$$|a_n - l| < \varepsilon$$

EQUIVALE A

$$-\varepsilon < a_n - l < \varepsilon$$

LA QUALE FORMULA, A SUA VOLTA, SI PUÒ SCRIVERE

$$l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$$

LA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE SI PUÒ SCRIVERE NELLA FORMA

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

OPPURE NELLA FORMA EQUIVALENTE

$$|x-z| \leq |x| + |z|.$$

SI PASSA DALL'UNA ALL'ALTRA PONENDO $z = -y$

E RICORDANDO CHE

$$|-y| = |y|$$

LE DISUGUAGLIANZE SUDDETTE VALGONO PER OGNI $x, y, z \in \mathbb{R}$.

È ANCHE UTILE OSSERVARE CHE $|xy| = |x| \cdot |y|$, QUINDI

$$x^2 = |x^2| = |x|^2 \quad (x^2 \geq 0)$$

21 OTT. 2020

PER VERIFICARE CHE

$$|x+y| \leq |x| + |y|,$$

SAPENDO CHE AMBO I MEMBRI SONO NON NEGATIVI, SI PUÒ ELEVARE AL QUADRATO E VERIFICARE CHE

$$|x+y|^2 \leq \left(|x| + |y|\right)^2$$

PER IL PRIMO MEMBRO, ABBIAMO $|x+y|^2 =$
$= (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

PER IL SECONDO, TROVIAMO $\left(|x| + |y|\right)^2 =$

$$x^2 + 2|xy| + y^2$$

QUINDI DOBBIAMO VERIFICARE CHE

$$x^2 + 2xy + y^2 \leq$$
$$\leq x^2 + 2|xy| + y^2$$

E CIOÈ CHE

$$xy \leq |xy|$$

E QUESTO È VERO PERCHÉ $t \leq |t|$ PER OGNI $t \in \mathbb{R}$. PIÙ PRECISAMENTE, SI HA

$$t = |t|$$

SE $t \geq 0$, ALTRIMENTI $t < |t|$.

21 OTT. 2020

CON LA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE SI PUÒ DIMOSTRARE IL TEOREMA SUL LIMITE DELLA SOMMA:

SUPPONIAMO CHE $a_n \to a$ E $b_n \to b$, CON $a, b \in \mathbb{R}$.

VOGLIAMO DIMOSTRARE CHE $a_n + b_n \to a + b$.

PER IPOTESI, PRESO $\varepsilon > 0$ RISULTA

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

DEFINITIVAMENTE, CIOÈ PER $n \geq n_1$. INOLTRE RISULTA

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

PER $n \geq n_2$

PONGO $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

E LE DUE DISUGUAGLIANZE VALGONO PER $n \geq n_0$.

PER LA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE SI HA

$$|a_n + b_n - (a+b)| =$$

$$= |a_n - a + b_n - b| \leq$$

$$\leq |a_n - a| + |b_n - b|$$

$$< \varepsilon \quad \text{PER } n \geq n_0$$

COSTRUIAMO UNA SEMPLICE SUCCESSIONE (a_n) TALE CHE

$$a_n \to 1 \quad \text{E}$$

$$[a_n] \not\to [1] = 1$$

PONIAMO $a_n = 1 - \frac{1}{n}$,

COSICCHÉ $a_n \to 1$

E $0 \leq a_n < 1$

PER OGNI $n \geq 1$.

QUINDI $[a_n] = 0$

PER OGNI n, E PERCIÒ $\lim_{n \to +\infty} [a_n] = 0$.

L'ESTREMO SUPERIORE

LA DEFINIZIONE SI FONDA SULLA PROPRIETÀ DI COMPLETEZZA: ESSA GARANTISCE CHE, SE UNA SUCCESSIONE AMMETTE UN MAGGIORANTE C, ALLORA NE ESISTE UNO CHE È PIÙ PICCOLO DI TUTTI GLI ALTRI MAGGIORANTI.

LA COSA NON È OVVIA PERCHÉ ALCUNI <u>INSIEMI</u> NUMERICI, COME QUELLO DEI REALI POSITIVI $x > 0$, NON <u>HANNO</u> UN <u>ELEMENTO</u> PIÙ PICCOLO DI TUTTI GLI ALTRI.

DEFINIZIONE: DATA UNA SUCCESSIONE NUMERICA (a_n), SI DISTINGUONO DUE CASI:

1) SE NON ESISTONO MAGGIORANTI, CIOÈ SE LA SUCCESSIONE È ILLIMITATA SUPERIORMENTE, SI DEFINISCE

$$\sup a_n = +\infty.$$

2) SE ESISTONO MAGGIORANTI, CIOÈ SE LA SUCCESSIONE È LIMITATA SUPERIORMENTE, SI INDICA CON

$$\sup a_n$$

IL MAGGIORANTE PIÙ PICCOLO.

OSSERVIAMO CHE LA PROPRIETÀ DI COMPLEZZA SI PUÒ ANCHE FORMULARE DICENDO CHE

« OGNI SOTTOINSIEME NON VUOTO $S \subset \mathbb{R}$ HA UN ESTREMO SUPERIORE »

LA TESI VALE ANCHE PER L'ESTREMO INFERIORE, IL QUALE SI DEFINISCE IN MODO ANALOGO.

ESEMPIO: PONIAMO $S = \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.

ALLORA

$$\sup \mathbb{N} = +\infty$$
$$\inf \mathbb{N} = 0$$

È VERO CHE

$$\lim_{n \to +\infty} a_n \leq$$

$$\leq \sup a_n \text{ ?}$$

SÌ, PERCHÉ RISULTA

$$a_n \leq \underbrace{\sup a_n}_{\text{COSTANTE}}$$

PER OGNI n

E LA TESI SEGUE DAL TEOREMA DEL CONFRONTO.

ALTRO ESEMPIO:

$$\sup \frac{1}{n} = 1$$

$$\inf \frac{1}{n} = 0$$

22 OTT. 2020

DEFINIZIONE: QUANDO ESISTE UN ELEMENTO

$$x_0 \in S$$

TALE CHE

$$x_0 = \sup S$$

SI PONE

$$x_0 = \max S$$

22 OTT. 2020

CI PREFIGGIAMO DI STUDIARE IL COSIDDETTO

« BINOMIO DI NEWTON »

CIOÈ LA FORMULA

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

DOVE $\sum$ (SIGMA) È IL SIMBOLO DI SOMMATORIA IL CUI SIGNIFICATO VEDIAMO SUBITO.

DATI n TERMINI $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, LA LORO SOMMA SI PUÒ SCRIVERE

$$a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

a_k RAPPRESENTA IL GENERICO TERMINE TRA a_1 E a_n, E k È UNA VARIABILE CHE ASSUME VALORI NELL'INSIEME $\{1, \dots, n\}$.

LA SITUAZIONE È ANALOGA AL COSTRUTTO

for

COMUNE A MOLTI LINGUAGGI DI PROGRAMMAZIONE. SUPPONIAMO DI AVERE MEMORIZZATO n VALORI NUMERICI NELLE VARIABILI $a[1], \dots, a[n]$, E VOGLIAMO CALCOLARNE LA SOMMA.

PONIAMO INIZIALMENTE

$$S = 0$$

E USIAMO L'ISTRUZIONE

```
for ((k=1; k<=n; ++k))
do
  S = S + a[k]
done
```

SI PUÒ SCRIVERE, SE SERVE,

$$\sum_{k=2}^{n} a_k = a_2 + \ldots + a_n$$

$$\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1$$

SI NOTI CHE

$$\sum_{k=1}^{n} a_n = n \cdot a_n = $$

$$= a_n + \ldots + a_n ;$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_n = (n+1) a_n$$

$$= \underbrace{a_n + \ldots + a_n}_{n+1 \text{ ADDENDI}}$$

$k=0$ $k=1, \ldots, k=n-1$ $k=n$

$$\sum_{k=0}^{1} 3 = 3+3 = 6$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_n = $$

$$= a_n + \sum_{k=1}^{n} a_n$$

ADDITIVITÀ

IN GENERALE, PRENDO TRE INTERI $z_1 \leq z_2 < z_3$

ED HO CHE

$$\sum_{k=z_1}^{z_2} a_k + \sum_{k=z_2+1}^{z_3} a_k = $$

$$= \sum_{k=z_1}^{z_3} a_k$$

23 OTT. 2020

PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA:

PER OGNI λ (LAMBDA) $\in \mathbb{R}$ SAPPIAMO CHE

$$\lambda a_1 + \dots + \lambda a_n =$$
$$= \lambda (a_1 + \dots + a_n),$$

QUINDI

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k$$

TALVOLTA SI CONVIENE CHE $\sum_{k=z_1}^{z_2} a_k = 0$

PER $z_2 < z_1$.

LA SCELTA DELLA LETTERA PER L'INDICE DI SOMMA È ARBITRARIA:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + \dots + a_n$$

QUINDI

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

PROPRIETÀ COMMUTATIVA:

$$a_1 + \dots + a_n = a_n + \dots + a_1$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_{n+1-i}$$

TRASLAZIONE DELL'INDICE DI SOMMA

$$a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}$$

DUNQUE SI PUÒ FARE IL CAMBIAMENTO $i = k-1$, O CHE È LO STESSO

$$k = i+1$$

COMBINANDO FRA LORO QUESTE PROPRIETÀ SI OTTIENE, AD ESEMPIO,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{n+1-k}$$

$$= a_n + \dots + a_1;$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} =$$

$$= a_1 + \dots + a_n$$

PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA

DATI $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ E $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ (MI),

SI HA CHE:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k + \sum_{k=1}^{n} \mu_k a_k$$

$$= \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n +$$

$$+ \mu_1 a_1 + \dots + \mu_n a_n =$$

$$= (\lambda_1 + \mu_1) a_1 + \dots + (\lambda_n + \mu_n) a_n$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k + \mu_k) a_k$$

SOMME NOTEVOLI

LA SOMMA $\sum_{k=0}^{n} q^k =$

$= 1 + q + \dots + q^n$ SI

PUÒ SCRIVERE BREVEMENTE (EUCLIDE):

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1, & \text{SE } q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}, & \text{SE } q \neq 1 \end{cases}$$

ESEMPIO: $q=1$, $n=3$:

$$\sum_{k=0}^{3} 1^k = 1+1+1+1$$
$$=4$$

ESEMPIO: $q=2$, $n=63$

1	2	4	8	16	32		

$$\sum_{k=0}^{63} 2^k = 1+2+\dots+$$
$$+2^{63}$$

$$= \frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64}-1$$

$$= \frac{1-2^{64}}{-1}$$

ESEMPIO: PONIAMO

$q=\frac{1}{2}$, COSICCHÉ

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$$

$$= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}}$$

$$= 2-\frac{1}{2^n} < 2$$

VERIFICHIAMO CHE, SE $q \neq 1$, ALLORA

$$1+q+\dots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$= \sum_{k=0}^{n} q^k$. BASTA MOLTIPLICARE PER $1-q$ E VERIFICARE CHE

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k =$$

$$=(1-q)(1+\dots+q^n)=$$

$= 1-q^{n+1}$. QUESTA UGUAGLIANZA SUSSISTE PERCHÉ $(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k =$

$$= \sum_{k=0}^{n} q^k - q\sum_{k=0}^{n} q^k$$

$$= 1+q+\dots+q^n +$$

$$- q\left(1+q+\dots+q^n\right)$$

$$= 1+q+\dots+q^n +$$

$$-\left(q+q^2+\dots+q^{n+1}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} =$$

$= 1-q^{n+1}$, COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

<u>OSSERVAZIONE</u>: SE $q=0$ SI HA $\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $=1$ E $\sum_{k=0}^{n} q^k =$

$$= 0^0 + 0^1 + \dots + 0^n$$

$$= 1$$

TORNANDO AL BINOMIO DI NEWTON, OSSERVIAMO CHE $(a+b)^2$

$= (a+b)(a+b) =$

$= a(a+b) + b(a+b)$

$= a^2 + ab + ba + b^2$

$= a^2 + 2ab + b^2.$

SIMILMENTE, $(a+b)^3 =$

$= (a+b)(a+b)^2 =$

$= a(a+b)^2 + b(a+b)^2$

$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

PER DEFINIRE I COEFFICIENTI BINOMIALI $\binom{n}{k}$

SERVE INTRODURRE LA SUCCESSIONE DEI FATTORIALI, INDICATI CON $n!$ E CHE SI POSSONO DEFINIRE COME SEGUE:

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{SE } n = 0 \\ 1 \cdot \ldots \cdot n, & \text{SE } n > 0 \end{cases}$$

<u>ESEMPIO:</u> $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$

EQUIVALENTEMENTE, SI PUÒ <u>DEFINIRE</u> $n!$ PER <u>RECURSIONE</u>, PONENDO:

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ (n+1)! = n!\,(n+1), \end{cases}$$

PER $n \geq 0$

POSSIAMO FINALMENTE DEFINIRE $\binom{n}{k}$ PER $n \geq 0$ E $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ PONENDO

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

COSÌ FACENDO, LA FORMULA DI NEWTON PER $n = 2$ DIVENTA:

$$(a+b)^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} a^{2-k} b^k$$

$$= \binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} ab + \binom{2}{2} b^2$$

E SI HA CHE

$$\binom{2}{0} = \frac{2!}{0!\,(2-0)!} = \frac{2}{2}$$

$$= 1$$

$$\binom{2}{1} = \frac{2!}{1!\,(2-1)!} = \frac{2}{1}$$

$$= 2$$

$$\binom{2}{2} = \frac{2!}{2!\,(2-2)!} = \frac{2}{2}$$

$$= 1$$

PROBLEMI [106]

1) USANDO LA DEFINIZIONE (1), TROVIAMO:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

E

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!\;k!}$$

QUINDI L'UGUAGLIANZA (2) VALE PER OGNI $n \geq 0$ ED OGNI $k \in \{0, \dots, n\}$

2) INTRODUCIAMO L'INDICE $i = n-k$, DAL QUALE SI RICAVA $k = n-i$.

SI TROVA CHE

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{n-i} a^{n-(n-i)} b^{n-i}$$

OSSERVIAMO CHE I VALORI DI $k = 0, \dots, n$ CORRISPONDONO AI VALORI $i = n$, $i = n-1, \dots, i = 0$.

RICORDIAMO INOLTRE CHE

$$\binom{n}{n-i} = \binom{n}{i} \qquad (2)$$

QUINDI TROVIAMO CHE

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{i} b^{n-i} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k} b^{n-k}$$

L'UGUAGLIANZA VALE PER OGNI $n \geq 0$.

27 OTT. 2020

LA NOTAZIONE

$$\sum_{i=n-k}^{n} \dots$$

NON SI PUÒ USARE PERCHÉ

SI USA SCRIVERE

$$\sum_{i=i_1}^{i_2} \dots$$

DOVE i_1 E i_2 SONO DA INTENDERSI COME VALORI DATI: SONO IL PRIMO E E L'ULTIMO VALORE DELL'INDICE DI SOMMA.

<u>NOTA</u>: LA SOMMATORIA

$$\sum_{i=i_1}^{i_2}$$

SI LEGGE « SOMMATORIA PER i CHE VA DA i_1 A i_2 »

28 OTT. 2020

3) OSSERVIAMO CHE

$$n! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-k)\cdot(n-k+1)\cdot \ldots \cdot n$$

$$(n-k)! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-k)$$

PER $0<k<n$, E QUINDI

$$\frac{n!}{(n-k)!} = (n-k+1)\cdot \ldots \cdot n.$$

QUEST'ULTIMA UGUAGLIANZA VALE ANCHE SE $n=k>0$.

QUINDI L'UGUAGLIANZA (3) SUSSISTE PER OGNI $n \geq 1$ ED OGNI $k \in \{1, \ldots, n\}$.

ESEMPIO: $n=5$, $k=2$.

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5$$

$$(n-k)! = 1\cdot 2\cdot 3$$

$$\frac{n!}{(n-k)!} = 4\cdot 5 = (n-k+1)\cdot n$$

QUI $n-k+1 = 4$

28 OTT. 2020

4) CALCOLIAMO $\binom{100}{2}$

PONIAMO $n = 100$, $k = 2$

COSICCHÉ $\binom{100}{2} =$

$$= \frac{100!}{2!\,(100-2)!}$$

OSSERVIAMO CHE

$100! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100$

$98! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 97 \cdot 98$

QUINDI

$$\frac{100!}{98!} = 99 \cdot 100 = 9.900$$

OSSERVIAMO CHE $n-k+1 =$
$= 99$. SIMILMENTE SI HA CHE $\frac{100!}{97!} = 98 \cdot 99 \cdot 100$.

POSSIAMO CONCLUDERE CHE $\binom{100}{2} = \frac{9.900}{2!} =$

$$= \frac{9.900}{2} = 4.950$$

5) PONENDO $a = b = 1$ NELLA FORMULA DI NEWTON TROVIAMO

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k},$$

CHE ESPRIME UNA NOTEVOLE PROPRIETÀ DEI COEFFICIENTI BINOMIALI.

SI NOTI CHE L'UGUAGLIANZA

$$(n+1)! = n!\,(n+1),$$

CHE ESPRIME LA PROPRIETÀ PIÙ IMPORTANTE DEI FATTORIALI, SI SPIEGA MOLTO FACILMENTE PENSANDO CHE

$$(n+1)! = (1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n) \cdot (n+1)$$

E $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$

(SI INTENDE CHE $n \geq 1$)

DI CONSEGUENZA SI HA CHE

$$\frac{(n+1)!}{n!} = n+1$$

QUESTO VALE ANCHE CON $n=0$.

27 OTT. 2020

UN'ULTIMA SEMPLICE OSSERVAZIONE: PER OGNI $n \geq 1$ SI HA CHE

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n!}{(n-1)!} = n$$

IN PARTICOLARE $\binom{2}{1} = 2$

27 OTT. 2020

ABBIAMO VISTO CHE SUSSISTE L'UGUAGLIANZA

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

OSSERVIAMO ADESSO CHE

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n}$$

$$= \frac{n!}{0!(n-0)!}$$

$$= \frac{n!}{n!} = 1.$$

MA LA PROPRIETÀ PIÙ IMPORTANTE DEI COEFFICIENTI BINOMIALI È CHE

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

PER OGNI $n \geq 1$ ED OGNI $k \in \{1, \dots, n\}$

LA SI PUÒ DIMOSTRARE APPLICANDO LA DEFINIZIONE. SI HA CHE:

$$\binom{n}{k-1} = \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!}$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!}$$

E $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$,

QUINDI $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} =$

$$= n! \, \frac{k + n + 1 - k}{k!(n+1-k)!} =$$

$$= \frac{n!(n+1)}{k!(n+1-k)!} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$$

27 OTT. 2020

IN VIRTÙ DELLE SUDDETTE PROPRIETÀ, I COEFFICIENTI BINOMIALI SI POSSONO DISPORRE IN UNO SCHEMA DETTO TRIANGOLO DI TARTAGLIA O TRIANGOLO DI PASCAL.

n \ k	$k=0$	1	2	3 ...	
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	$\boxed{3}$	3	1	
...	1	4	6	4	1

28 OTT. 2020

SVOLGIAMO UNA DIMOSTRAZIONE DELLA FORMULA DI NEWTON

SAPPIAMO CHE LA FORMULA È CORRETTA NEL CASO $n = 2$. PONIAMO TALE CASO ALLA BASE DEL RAGIONAMENTO (BASE DELL'INDUZIONE).

SVOLGIAMO IL PASSO INDUTTIVO, CIOÈ VERIFICHIAMO CHE, QUALUNQUE SIA $n \geq 2$, A PARTIRE DALL'UGUAGLIANZA $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ SI PUÒ RICAVARE $(a+b)^{n+1} =$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k$$

PER RICAVARE L'UGUAGLIANZA

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k$$

SCRIVIAMO INNANZITUTTO

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n$$

E POI SFRUTTIAMO L'UGUAGLIANZA $(a+b)^n =$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

OTTENENDO $(a+b)^{n+1} =$

$$(a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k =$$

$$= a\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k +$$

$$+ b\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

QUINDI $(a+b)^{n+1} =$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k$$

$$+ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}$$

PONIAMO $i = k+1$ NELLA SECONDA SOMMATORIA E TROVIAMO $(a+b)^{n+1} =$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} a^{n+1-i} b^i =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k$$

OSSERVIAMO CHE

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k =$$

$$= \binom{n}{0} a^{n+1} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k$$

$$= a^{n+1} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k$$

E CHE

$$\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k +$$

$$+ \binom{n}{n} b^{n+1}$$

QUINDI POSSIAMO SCRIVERE

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k +$$

$$+ b^{n+1} = a^{n+1} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^{n+1-k} b^k +$$

$$+ b^{n+1} = a^{n+1} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k +$$

$$+ b^{n+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k$$

METTENDO INSIEME LA BASE DELL'INDUZIONE, CIOÈ IL CASO $n=2$, CIOÈ LA FORMULA

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2,$$

CON IL PASSO INDUTTIVO, CIOÈ IL FATTO CHE DALL'UGUAGLIANZA

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

SI PUÒ RICAVARE

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k$$

SI DEDUCE, PER IL PRINCIPIO DI INDUZIONE MATEMATICA, CHE L'UGUAGLIANZA $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ VALE PER OGNI $n \geq 2$.

SERIE NUMERICHE

DATA UNA SUCCESSIONE NUMERICA (a_k) SI PUÒ CERCARE LA SOMMA DI TUTTI I TERMINI, CHE SI INDICA CON $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$, FACENDO INTERVENIRE IL CONCETTO DI LIMITE.

SI CONSIDERANO LE SOMME RIDOTTE, DETTE ANCHE SOMME PARZIALI, DATE DA

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

LE SOMME COSÌ DEFINITE COSTITUISCONO UNA SUCCESSIONE NUMERICA.

29 OTT. 2020

ESEMPIO: PRENDIAMO $a_k = 1$ PER OGNI k, E VOGLIAMO CALCOLARE

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{+\infty} 1$$

CONSIDERIAMO LE SOMME RIDOTTE

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$$

IN PARTICOLARE, SI HA

$$S_0 = a_0 = 1,$$

$$S_1 = a_0 + a_1 = 2,$$

$$S_2 = a_0 + a_1 + a_2 = 3.$$

UNA VOLTA INTRODOTTE (SUL PIANO TEORICO) LE SOMME RIDOTTE S_n, SI DICE CHE LA SERIE

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$$

È CONVERGENTE SE IL

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$$

ESISTE FINITO, E SI SCRIVE

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = S.$$

IL NUMERO S SI CHIAMA SOMMA DELLA SERIE.

29 OTT. 2020

SE RISULTA, INVECE,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \pm\infty$$

ALLORA LA SERIE

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$$

SI DICE DIVERGENTE, E SI SCRIVE

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \pm\infty$$

AD ESEMPIO, SE $a_k = 1$ PER OGNI k, SI HA $S_n = n+1$ E QUINDI

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty,$$

E SI PUÒ SCRIVERE

$$\sum_{k=0}^{+\infty} 1 = +\infty.$$

LA SERIE È DIVERGENTE.

INFINE, SE LA SUCCESSIONE (S_n) NON HA LIMITE, SI DICE CHE LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$

È INDETERMINATA.

L'IMPORTANZA DELLE SERIE STA NEL FATTO CHE CONSENTONO DI RAPPRESENTARE NUMERI IMPORTANTI. SI HA, AD ESEMPIO:

$$e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} +$$

$$+ \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots$$

CONDIZIONE NECESSARIA PER LA CONVERGENZA

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$$

DIMOSTRAZIONE: SUPPONIAMO CHE LA SERIE

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$$

SIA CONVERGENTE.

VOGLIAMO DIMOSTRARE CHE $a_n \to 0$.

SAPPIAMO PER IPOTESI CHE $S_n \to S \in \mathbb{R}$

QUINDI SI HA ANCHE

$$\lim_{n \to +\infty} S_{n-1} = S$$

SOTTRAENDO L'UGUAGLIANZA

$$S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

DA

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} a_k + a_n$$

TROVIAMO CHE

$$S_n - S_{n-1} = a_n$$

PER OGNI $n \geq 1$. MA ALLORA, PER IL TEOREMA SUL LIMITE DELLA DIFFERENZA, SI HA

$$\lim_{n \to +\infty} a_n =$$

$$= S - S = 0$$

COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

29 OTT. 2020

ESEMPIO: LA SERIE

$$\sum_{k=0}^{+\infty} 1$$

NON SODDISFA LA CONDIZIONE NECESSARIA PER LA CONVERGENZA, IN QUANTO

$$\lim_{n \to +\infty} 1 = 1$$

ESEMPIO: LA SERIE

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$$

È DIVERGENTE, BENCHÉ LA CONDIZIONE

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

SIA SODDISFATTA. DUNQUE IL FATTO CHE $a_n \to 0$ NON È SUFFICIENTE PER LA CONVERGENZA DELLA SERIE.

IL TEOREMA DEL CONFRONTO PER LE SERIE

DATE DUE SERIE

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$$

SE RISULTA $a_k \leq b_k$ PER OGNI k, O ANCHE SOLO DEFINITIVAMENTE,

E SE

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = +\infty$$

ALLORA

$$\sum_{k=0}^{+\infty} b_k = +\infty.$$

29 OTT. 2020

DIMOSTRAZIONE: SE $a_k \leq b_k$ PER OGNI k, ALLORA POSSIAMO ANCHE SCRIVERE

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \leq \sum_{k=0}^{n} b_k$$

PER OGNI n. IL PRIMO MEMBRO TENDE PER IPOTESI A $+\infty$. MA ALLORA SI HA

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} b_k = +\infty$$

PER IL TEOREMA DEL CONFRONTO PER LE SUCCESSIONI NUMERICHE. LA TESI SEGUE.

29 OTT. 2020

IL RAGIONAMENTO PUÒ ESSERE RIFORMULATO SCRIVENDO

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

E

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} b_k .$$

DAL FATTO CHE $a_k \leq b_k$ PER OGNI k SEGUE $S_n \leq T_n$.

DALL'IPOTESI CHE

$S_n \to +\infty$ SEGUE

CHE $T_n \to +\infty$,

CIOÈ LA TESI.

03 NOV. 2020

TEST [107]

PER STABILIRE IL CARATTERE DELLA SERIE

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k$$

CERCHIAMO LA SUCCESSIONE DELLE SOMME PARZIALI

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k .$$

SI TROVA CHE $S_0 = 1$,

$$S_1 = \sum_{k=0}^{1} (-1)^k = 1 - 1 = 0,$$

$$S_2 = 1 - 1 + 1 = 1,$$

$$S_3 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0,$$

$$S_n = \begin{cases} 1, & \text{SE } n \text{ È PARI} \\ 0, & n \text{ DISPARI} \end{cases}$$

QUINDI LA SERIE È INDETERMINATA.

SI NOTI CHE ALLO STESSO RISULTATO SI PERVIENE APPLICANDO LA FORMULA

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

VISTA IL 23/10. INFATTI, PONENDO $q=-1$, SI TROVA:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k =$$

$$= \frac{1-(-1)^{n+1}}{1-(-1)} =$$

$$= \frac{1-(-1)\cdot(-1)^n}{2} =$$

$$= \frac{1+(-1)^n}{2} =$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{SE } n \text{ È PARI} \\ 0, & n \text{ DISPARI} \end{cases}$$

03 NOV. 2020

OSSERVAZIONE IMPORTANTE: <u>LE SERIE A TERMINI NON NEGATIVI NON SONO INDETERMINATE.</u> CIOÈ, SE $a_k \geq 0$ PER OGNI k, ALLORA LA SERIE

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$$

CONVERGE AD UNA SOMMA $S \in \mathbb{R}$ OPPURE È DIVERGENTE A $+\infty$.

<u>APPLICAZIONE:</u> CONSIDERIAMO LA SERIE

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left[2+(-1)^k\right].$$

POICHÉ $2+(-1)^k \geq 0$ PER OGNI k, ESSA

NON È INDETERMINATA.

POICHÉ IL TERMINE GENERALE $b_k = 2+(-1)^k$

NON TENDE A ZERO, NON È SODDISFATTA LA CONDIZIONE NECESSARIA PER LA CONVERGENZA.

SE NE DEDUCE, PER ESCLUSIONE, CHE

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(2+(-1)^k\right) = +\infty.$$

ALLA STESSA CONCLUSIONE SI GIUNGE PER CONFRONTO CON LA SERIE

$$\sum_{k=0}^{+\infty} 1 = +\infty.$$

DIMOSTRIAMO CHE, SE $a_k \geq 0$ PER OGNI k, LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$

NON È INDETERMINATA.

SFRUTTIAMO LA COMPLETEZZA DELL'INSIEME DEI NUMERI REALI, APPLICATA ALLA SUCCESSIONE

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

SICCOME SI HA CHE

$$S_n - S_{n-1} = a_n \geq 0,$$

CIOÈ $S_n \geq S_{n-1}$

PER OGNI n, LA SUCCESSIONE (S_n) AMMETTE LIMITE, COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

03 NOV. 2020

CONSIDERIAMO ALLORA LA SERIE ARMONICA:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

SICCOME $\frac{1}{k} > 0$ PER OGNI k, LA SERIE NON È INDETERMINATA IN QUANTO LA SUCCESSIONE DELLE SOMME PARZIALI

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

È STRETTAMENTE CRE- CRESCENTE.

OSSERVIAMO CHE $S_1 = 1$,

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2},$$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$S_8 = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{8} >$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

SI DIMOSTRA PER INDUZIONE CHE

$$S_{2^m} \geq 1 + \frac{1}{2} m$$

PER OGNI $m \geq 0$

0 3 NOV. 2020

NE SEGUE CHE

$$S_{2^m} \geq M$$

DEFINITIVAMENTE, CIOÈ PER m SUFFICIENTEMENTE GRANDE, DICIAMO CHE

$$S_{2^m} \geq M$$

PER OGNI $m \geq m_0$.

MA ALLORA RISULTA

$$S_n \geq S_{2^{m_0}} \geq M$$

PER OGNI $n \geq 2^{m_0}$, QUINDI

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$$

OVVERO $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$.

0 4 NOV. 2020

<u>OSSERVAZIONE</u>: SOMMANDO A DUE A DUE I TERMINI DELLA SERIE

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k,$$

CHE È INDETERMINATA, SI TROVA

$$\sum_{k \text{ PARI}} \left((-1)^k + (-1)^{k+1} \right) =$$

$$= \sum_{k \text{ PARI}} 0 = 0$$

QUEST'ULTIMA SERIE È CONVERGENTE, QUINDI, IN GENERALE, LE SERIE NON GODONO DELLA PROPRIETÀ ASSOCIATIVA.

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE PER LE SERIE CHE NON SONO INDETERMINATE VALE LA PROPRIETÀ ASSOCIATIVA.

TEST [107]

PER STABILIRE CHE

$$\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k = +\infty$$

APPLICHIAMO LA FORMULA

LA $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$

$$= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \text{ CON}$$

$q = 2$ E TROVIAMO

$$S_n = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} =$$

$$= 2^{n+1} - 1$$

E SAPPIAMO DAL 14/10

CHE $b^n \geq (b-1)n + 1$

E LA CONCLUSIONE SEGUE.

OSSERVIAMO CHE DALLA FORMULA

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

PONENDO $y = 1$ SI TROVA

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

ORA, SE $x \geq 0$, POSSIAMO SCRIVERE

$$(1+x)^n \geq \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} x^k$$

PER OGNI $n \geq 1$, QUINDI

$$\boxed{(1+x)^n \geq 1 + nx.}$$

POSTO $b = 1 + x \geq 1$, OTTENIAMO

$$b^n \geq 1 + n(b-1)$$

GIÀ OTTENUTA PER ALTRA VIA IL 14/10

DISPONIAMO ORA DEGLI STRUMENTI PER VERIFICARE CHE LE SUCCESSIONI

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{E}$$

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

SONO MONOTONE, COME AFFERMATO IL 20/10.

VERIFICHIAMO CHE

$$b_n < b_{n-1}$$

CIOÈ

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$$

PER OGNI $n \geq 2$. LA RISCRIVIAMO NELLA FORMA

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$$

E CIOÈ

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) < \left(\frac{n}{n-1}\right)^n$$

MA QUESTA EQUIVALE A

$$1+\frac{1}{n} < \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

OVVERO

$$1+\frac{1}{n} < \left(\frac{n^2-1+1}{n^2-1}\right)^n =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n$$

PER VERIFICARE CHE VALE QUESTA DISUGUAGLIANZA, PONGO $x = \frac{1}{n^2-1} > 0$

IN $(1+x)^n \geq 1+nx$

E TROVO

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \geq 1+\frac{n}{n^2-1}$$

SICCOME MI INTERESSA VERIFICARE CHE

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1+\frac{1}{n}$$

È SUFFICIENTE CONTROLLARE CHE

$$1+\frac{n}{n^2-1} > 1+\frac{1}{n}$$

MA QUESTO È VERO, PERCHÉ EQUIVALE A

$$n^2 > n^2-1.$$

DUNQUE b_n È STRETTAMENTE DECRESCENTE, COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

SI NOTI CHE IL FATTO CHE

$$\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k = +\infty$$

SI PUÒ ANCHE DEDURRE DAL FATTO CHE $2^k \geq 1$ PER OGNI k. SAPENDO CHE

$$\sum_{k=0}^{+\infty} 1 = +\infty \quad (29/10)$$

LA CONCLUSIONE SEGUE DAL TEOREMA DEL CONFRONTO.

ALLA STESSA CONCLUSIONE SI PERVIENE ANCHE OSSERVANDO CHE $2^k \geq 0$ PER OGNI k, DUNQUE LA SERIE NON È INDETERMINATA, E NON È NEANCHE CONVERGENTE PERCHÉ $2^k \not\to 0$ QUINDI NON È SODDISFATTA LA CONDIZ. NEC.

04 NOV. 2020

TEST [107]

PER VERIFICARE CHE

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2$$

UTILIZZIAMO LA FORMULA $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^n$

$$= \frac{1-q^{n+1}}{1-q},$$ STUDIATA IL 23/10. POSTO

$q = \frac{1}{2}$, TROVIAMO

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k =$$

$$= \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

SAPENDO CHE $\frac{1}{2^n} \to 0$,

DEDUCIAMO CHE

$$S_n = 2 - \frac{1}{2^n} \to 2$$

COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

PER VERIFICARE CHE

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{9},$$ PONIAMO

$q = \frac{1}{10}$ E TROVIAMO CHE

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{10^k} = \frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{10}} =$$

$$= \frac{10}{9} - \frac{1}{9 \cdot 10^n}$$

SAPENDO CHE

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{10^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^k} +$$

$$+ 1$$

POSSIAMO RICAVARE CHE

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{9} - \frac{1}{9 \cdot 10^n}$$

E QUINDI

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{9}$$

POSSIAMO ANCHE OSSERVARE

CHE $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{10} +$

$$+ \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots =$$

$$= 0,1 + 0,01 +$$

$$+ 0,001 + \dots$$

SERIE GEOMETRICA

LA SERIE

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k$$

CONVERGE SE $|q| < 1$

ALLA SOMMA $\dfrac{1}{1-q}$,

DIVERGE A $+\infty$ SE

$q \geq 1$, ED È INDE-

TERMINATA SE $q \leq -1$.

05 NOV. 2020

ANCHE LA SERIE

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_0 q^k$$

È DETTA SERIE GEOME-

TRICA: POSTO $a_k = a_0 q^k$

SI HA $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} = \dfrac{a_0 q^{k+1}}{a_0 q^k} = q$

05 NOV. 2020

IN GENERALE, DATA UNA SERIE CONVERGENTE

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = S \in \mathbb{R},$$

CIOÈ TALE CHE

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = S \in \mathbb{R},$$

DOVE $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$,

SE PRENDIAMO UN QUALUNQUE λ (LAMBDA) $\in \mathbb{R}$

E STUDIAMO LA SERIE

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda a_k$$

TROVIAMO CHE È CONVERGENTE E SI HA CHE

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda a_k = \lambda S = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$$

COME LO VEDIAMO? APPLICANDO LA DEFINIZIONE ALLA SERIE

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda a_k.$$

CONSIDERIAMO LE SOMME RIDOTTE

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=0}^{n} a_k = \lambda S_n$$

E USIAMO IL TEOREMA SUL LIMITE DEL PRODOTTO:

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = \lambda S$$

COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

NE SEGUE CHE LA SERIE

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_0 q^k$$

È CONVERGENTE SE $|q| < 1$ E LA SUA SOMMA È

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_0 q^k = \frac{a_0}{1-q}.$$

ANCHE LA SERIE

$$\sum_{k=k_0}^{+\infty} q^k$$

È DETTA SERIE GEOMETRICA, QUANDO k_0 È UN DATO NUMERO NATURALE.

PER TROVARNE LA SOMMA, BASTA OSSERVARE CHE $q^k = q^{k_0} q^{k-k_0}$

MA ALLORA

$$\sum_{k=k_0}^{+\infty} q^k = \sum_{k=k_0}^{+\infty} q^{k_0} q^{k-k_0}$$

$$= q^{k_0} \sum_{k=k_0}^{+\infty} q^{k-k_0}$$

POSTO $i = k - k_0$, L'ULTIMA SERIE DIVENTA

$$\sum_{i=0}^{+\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$$

SE $|q| < 1$. SI CONCLUDE CHE

$$\sum_{k=k_0}^{+\infty} q^k = \frac{q^{k_0}}{1-q}$$

LA SERIE GEOMETRICA

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k$$

CON $q \neq 0$, HA LA PROPRIETÀ CHE

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \text{COSTANTE}$$

DOVE $a_k = q^k$, E LA COSTANTE È q.

UN'ALTRA IMPORTANTE PROPRIETÀ È CHE

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \text{COSTANTE}$$

$$= |q|$$

ANDIAMO A STUDIARE ALTRE SERIE, LEGATE ALLA SERIE GEOMETRICA DAL FATTO CHE

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = L$$

OPPURE DAL FATTO CHE

$$\lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = L$$

UTILIZZIAMO LE PROPRIETÀ DELLE SERIE PER TROVARE LA FRAZIONE GENERATRICE DEL NUMERO $1,2\overline{7}$

$= 1,27777\ldots$

CIOÈ TROVIAMO DUE INTERI $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ TALI CHE $\dfrac{z_1}{z_2} = 1,2\overline{7}$

SCRIVIAMO INNANZITUTTO

$$1,2\overline{7} = 1,2 + 0,0\overline{7}$$

$$= \frac{12}{10} + 0,0\overline{7}$$

E OSSERVIAMO CHE

$$0,0\overline{7} = \frac{7,\overline{7}}{100} =$$

$$= \frac{1}{100}\Big(7 + 0,7 + 0,07 + 0,007 + \ldots\Big)$$

DUNQUE $0,0\overline{7} =$

$$= \frac{1}{100} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{7}{10^k}$$

$$= \frac{7}{100} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k$$

$$= \frac{7}{100} \, \frac{1}{1-\frac{1}{10}}$$

$$= \frac{7}{100} \, \frac{10}{9} = \frac{7}{90}$$

MA ALLORA $1,2\overline{7} =$

$$= \frac{12}{10} + \frac{7}{90} =$$

$$= \frac{108+7}{90} = \frac{115}{90}$$

$$= \frac{23}{18}$$

0 5 NOV. 2020

LA CONVERGENZA ASSOLUTA

SI DICE CHE LA SERIE

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$$

CONVERGE ASSOLUTAMENTE SE RISULTA

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| < +\infty.$$

IN TAL CASO, LA SERIE DATA È CONVERGENTE PERCHÉ POSSIAMO SCRIVERE

$$a_k = a_k + |a_k| - |a_k|$$

LA SERIE

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(a_k + |a_k|\right)$$

È UNA SERIE A TERMINI NON NEGATIVI PERCHÉ

$$a_k + |a_k| \geq 0$$

IN QUANTO $a_k \geq -|a_k|$

MA IN PIÙ SODDISFA

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(a_k + |a_k|\right) \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{+\infty} 2|a_k| =$$

$$= 2\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| < +\infty$$

CONSIDERIAMO ALLORA

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

SI TROVA CHE $S_n =$

$$\sum_{k=0}^{n}\left(a_k + |a_k| - |a_k|\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(a_k + |a_k|\right) - \sum_{k=0}^{n}|a_k|$$

AVENDO VISTO CHE LA PRIMA SOMMATORIA CONVERGE, E CONVERGENDO PER IPOTESI LA SECONDA SOMMATORIA, SI CONCLUDE CHE S_n AMMETTE LIMITE FINITO.

NON VALE IL VICEVERSA, CIOÈ ESISTONO SERIE CONVERGENTI, COME

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

CHE NON GODONO DELLA PROPRIETÀ DELL'ASSOLUTA CONVERGENZA, INFATTI

$$\left|\frac{(-1)^k}{2k+1}\right| = \frac{1}{2k+1}$$

E $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \geq$

$$\geq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i} = +\infty$$

05 NOV. 2020

CRITERIO DEL RAPPORTO

SI APPLICA ALLE SERIE A TERMINI NON NULLI

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k, \quad a_k \neq 0$$

SUPPONIAMO CHE

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = L$$

ALLORA, SE $|L| < 1$,

LA SERIE CONVERGE ASSOLUTAMENTE.

TIPICA APPLICAZIONE:

POSTO $a_k = \frac{1}{k!}$ SI

TROVA $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}}$

$$= \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{k!}{k!\,(k+1)} = \frac{1}{k+1}$$

QUINDI $\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 0$

E POSSIAMO AFFERMARE

CHE $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} < +\infty$

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE SE $|L| > 1$ LA SERIE NON CONVERGE PERCHÉ $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > q > 1$

DEFINITIVAMENTE,

QUINDI $|a_{k+1}| > q|a_k|$

DA CUI SEGUE PER INDUZIONE CHE

$$|a_{k+n}| > q^n |a_k|$$

E QUINDI

$$\lim_{n\to+\infty} |a_{k+n}| = +\infty$$

05 NOV. 2020

LA DIMOSTRAZIONE DELLA CONVERGENZA NEL CASO

$$|L| < 1$$

È ANALOGA: SI TROVA

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < q < 1$$

DEFINITIVAMENTE, QUINDI $|a_{k+1}| < q\,|a_k|$ E

PER INDUZIONE

$$|a_{k+n}| < |a_k| \cdot q^n$$

DA CUI SEGUE CHE

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_{k+n}| <$$

$$< \sum_{n=0}^{+\infty} |a_k| \cdot q^n$$

$$< +\infty$$

COSA SUCCEDE SE $L = 1$?

DATA $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$

SE $\lim_{k \to +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$

LA SERIE CONVERGE ?

06 NOV. 2020

STUDIAMO LA SERIE DI MENGOLI

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

PER RAGIONI ALGEBRICHE SI HA $a_k = \frac{1}{k(k+1)} =$

$= \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ PER OGNI k

QUINDI

$$a_1 = 1 - \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$a_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

....

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

E DI CONSEGUENZA

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

PERCIÒ TROVIAMO

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = 1$$

E POSSIAMO SCRIVERE

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

RICORDIAMO CHE (29/10)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

PER STUDIARE IL CRITERIO DEL RAPPORTO, LO APPLICHIAMO A QUESTE SERIE, IL CUI CARATTERE È BEN NOTO.

POSTO $a_k = \dfrac{1}{k(k+1)}$, SI

HA CHE $\dfrac{a_k}{a_{k-1}} = \dfrac{\frac{1}{k(k+1)}}{\frac{1}{(k-1)k}}$

$$= \frac{k-1}{k+1} = \frac{k+1-2}{k+1} =$$

$$= 1 - \frac{2}{k+1} \longrightarrow 1$$

ABBIAMO TROVATO UNA SERIE CONVERGENTE TALE CHE $\dfrac{a_k}{a_{k-1}} \to 1$.

APPLICHIAMO IL CRITERIO DEL RAPPORTO ALLA SERIE ARMONICA. POSTO

$$b_k = \frac{1}{k}, \quad \text{SI HA}$$

$$\frac{b_k}{b_{k-1}} = \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k-1}} =$$

$$= \frac{k-1}{k} = 1 - \frac{1}{k} \to 1$$

ABBIAMO TROVATO UNA SERIE DIVERGENTE TALE CHE $\frac{b_k}{b_{k-1}} \longrightarrow 1$.

QUINDI FRA QUELLE SERIE $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ TALI CHE $\frac{a_k}{a_{k-1}} \to 1$ ALCUNE CONVERGONO E ALTRE DIVERGONO.

06 NOV. 2020

APPLICHIAMO IL CRITERIO DEL RAPPORTO ALLA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k$,

CHE È INDETERMINATA.

POSTO $a_k = (-1)^k$, SI HA CHE $\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{(-1)^k}{(-1)^{k-1}}$

$$= \frac{(-1)(-1)^{k-1}}{(-1)^{k-1}} = -1$$

PER OGNI $k \geq 1$,

QUINDI $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_k}{a_{k-1}} =$

$= L = -1$. CONSTATIAMO CHE FRA QUELLE SERIE TALI CHE $|L| = 1$ VE NE SONO DI INDETERMINATE.

SIMILE AL CRITERIO DEL RAPPORTO È IL CRITERIO DELLA RADICE: DATA UNA SERIE NUMERICA

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\,,$$

SE ESISTE IL LIMITE

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = L \geq 0$$

ALLORA, SE $L<1$ LA SERIE CONVERGE ASSOLUTAMENTE; SE, INVECE, $L>1$, LA SERIE NON SODDISFA LA CONDIZIONE NECESSARIA PER LA CONVERGENZA.

06 NOV. 2020

SERIE A TERMINI DI SEGNO ALTERNO:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k$$

CON $a_k > 0$ PER OGNI k, COSICCHÉ $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k$

$$= a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots$$

ESEMPI:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^k}$$

06 NOV. 2020

CRITERIO DI LEIBNIZ

SE RISULTA $a_k \geq a_{k+1}$

PER OGNI k, E SE

$$\lim_{k \to +\infty} a_k = 0$$

(CONDIZIONE NECESSARIA)

ALLORA LA SERIE

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k$$

È CONVERGENTE.

ESEMPI:

POSTO $a_k = 1$ PER OGNI k, RISULTA

$$a_k \geq a_{k+1}$$

PER OGNI k, MA

$$\lim_{k \to +\infty} a_k \neq 0$$

QUINDI IL CRITERIO NON SI PUÒ APPLICARE

POSTO $a_k = \frac{1}{2k+1} >$

$$> \frac{1}{2(k+1)+1} = a_{k+1}$$

RISULTA $\lim_{k \to +\infty} a_k = 0$

QUINDI LA SERIE

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

È CONVERGENTE. ALLA STESSA CONCLUSIONE SI GIUNGE PONENDO

$$a_k = \frac{1}{k} \searrow 0$$

COME PURE

$$a_k = \frac{1}{2^k} \searrow 0$$

0 6 NOV. 2020

IL MOTIVO PER CUI, SE

$$a_k \searrow 0,$$

LA SERIE

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k$$

CONVERGE, STA NEL FATTO CHE

$$S_0 = a_0$$

$$S_2 = a_0 - a_1 + a_2$$

$$= a_0 - (a_1 - a_2)$$

$$\leq a_0 = S_0$$

E, IN GENERALE, LA SUCCESSIONE (S_{2k})

È MONOTONA NON CRESCENTE.

SIMILMENTE, SI HA

$$S_1 = a_0 - a_1$$

$$S_3 = S_1 + a_2 - a_3$$

$$\geq S_1$$

IN GENERALE, LA SUCCESSIONE (S_{2k+1})

È MONOTONA NON DECRESCENTE. QUINDI SIA S_{2k} CHE S_{2k+1} AMMETTONO LIMITE (COMPLETEZZA). SICCOME

$$S_{2k+1} - S_{2k} = a_{2k+1},$$

I DUE LIMITI SONO UGUALI, LI POSSIAMO INDICARE CON S E SCRIVERE

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k = S.$$

0 6 NOV. 2020

STUDIAMO LA SERIE

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k = 1+2+3+\dots$$

CHE DIVERGE PERCHÉ $k \geq 1$ PER OGNI k, E $\sum_{k=1}^{+\infty} 1 = +\infty$.

È NOTEVOLE IL FATTO CHE $S_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. IN PARTICOLARE $S_1 = 1 = \frac{1\cdot 2}{2}$, $S_2 = 3 = \frac{2\cdot 3}{2}$. LA FORMULA LA SI VERIFICA PER INDUZIONE, CIOÈ, A BASE DELL'INDUZIONE SI PRENDE $S_1 = 1 = \frac{1\cdot 2}{2}$

E POI SI SVOLGE IL PASSO INDUTTIVO: DALLA FORMULA $S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{2}$

RICAVIAMO

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} k + n = \frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{(n-1)n + 2n}{2} = \frac{n(n-1+2)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

PER IL PRINCIPIO DI INDUZIONE, LA TESI SEGUE.

SI NOTI, CON RIFERIMENTO AD UNA POPOLARE FALSA NOTIZIA CHE CIRCOLA SULLA RETE, CHE LA DEFINIZIONE

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k$$

È MAL POSTA, IN QUANTO IL SECONDO MEMBRO È UNA SERIE INDETERMINATA, DUNQUE NON DEFINISCE ALCUNCHÉ.

ALTRI ESEMPI: SIA M IL PIÙ GRANDE NUMERO INTERO, OPPURE: SIA σ IL PIÙ PICCOLO NUMERO REALE POSITIVO.

LA DEFINIZIONE

$$T = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} k$$

È MAL POSTA PERCHÉ

$$(-1)^{k-1} k \not\to 0,$$

ANZI, $\left|(-1)^{k-1} k\right| = k \longrightarrow +\infty$, QUINDI LA SERIE NON CONVERGE. INOLTRE:

$$T_1 = 1$$

$$T_3 = 1 - 2 + 3 = 2$$

$$T_5 = T_3 - 4 + 5 = 3$$

IN GENERALE

$$T_{2k+1} = k + 1 \to +\infty$$

MENTRE $T_2 = 1 - 2 = -1$

$T_4 = T_2 + 3 - 4 = -2$

$T_6 = -3$ E IN GENERALE $T_{2k} = -k \to -\infty$

E PERCIÒ LA SUCCESSIONE (T_n) NON HA LIMITE.

10 NOV. 2020

PROBLEMA $\boxed{108}$

PER $x = 0$ LA SERIE DATA SI RIDUCE ALLA SERIE NULLA, LA QUALE CONVERGE E LA SUA SOMMA È NULLA.

PER $x = 1$ LA SERIE DATA SI RIDUCE ALLA SERIE ARMONICA, E SAPPIAMO CHE

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$$

(LEZIONE DEL 3 NOVEMBRE).

PER $x > 1$ RISULTA $x^k > 1$ PER OGNI k,

QUNDI

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = +\infty$$

PER IL TEOREMA DEL CONFRONTO (29/10).

CONSIDERIAMO ADESSO I VALORI DI x TALI CHE

$$0 < |x| < 1.$$

IN QUESTO CASO, POSTO

$$a_k = \frac{x^k}{k},$$

SI HA CHE $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} =$

$$\frac{x^{k+1}}{k+1} \cdot \frac{k}{x^k} = \frac{x}{1 + \frac{1}{k}}$$

QUINDI $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} \longrightarrow x$

SICCOME $|x| < 1$, LA SERIE CONVERGE PER IL CRITERIO DEL RAPPORTO (LEZIONE DEL 5/11, PAG. 439 DEL TESTO)

PER $x = -1$ LA SERIE SI RIDUCE A

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

LA QUALE CONVERGE PER IL CRITERIO DI LEIBNIZ IN QUANTO $\frac{1}{k} \searrow 0$.

PER $x < -1$, I CALCOLI PRECEDENTI MOSTRANO CHE, POSTO $a_k = \dfrac{x^k}{k}$,

SI HA $\lim_{n \to +\infty} \left| \dfrac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1$

QUINDI LA SERIE NON CONVERGE (PER IL CRITERIO DEL RAPPORTO), ANZI SI HA CHE

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|x|^k}{k} = +\infty.$$

10 NOV. 2020

OSSERVIAMO, PER INCISO, CHE IL LIMITE APPENA STABILITO:

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{b^k}{k} = +\infty}$$

DOVE $b > 1$, È NOTEVOLE PERCHÉ $b^k \to +\infty$ (14 OTTOBRE). SI USA TALVOLTA DIRE, METAFORICAMENTE PARLANDO, CHE « L'ESPONENZIALE TENDE ALL'INFINITO PIÙ RAPIDAMENTE DELL'ESPONENTE ».

POSSIAMO VERIFICARE CHE LE SOMME PARZIALI (S_{2k}) E (S_{2k+1}) COSTITUISCONO SUCCESSIONI MONOTONE. CI CHIEDIAMO SE $S_{n+1} = -\lambda_n^2 S_n$. SI HA:

$$S_{2k+2} - S_{2k} =$$

$$= \frac{x^{2k+2}}{2k+2} + \frac{x^{2k+1}}{2k+1} =$$

$$= \frac{x^{2k+2}}{2k+2} \cdot \left(1 + \frac{2k+2}{2k+1} \frac{1}{x}\right)$$

E $\lim_{k \to +\infty} 1 + \frac{2k+2}{2k+1} \cdot \frac{1}{x} =$

$= 1 + \frac{1}{x} > 0$ PERCHÉ $x < -1$ $\left(\text{QUINDI } 1 > \frac{-1}{x}\right)$

10 NOV. 2020

QUINDI $S_{2k+2} - S_{2k} \to +\infty$

E PERCIÒ RISULTA

$$S_{2k+2} - S_{2k} > 0$$

DEFINITIVAMENTE, QUINDI

ESISTE $\lim_{k \to +\infty} S_{2k+2} > -\infty$

PER UNA RAGIONE SIMILE,

$$\lim_{k \to +\infty} S_{2k+1} < +\infty$$

PERCIÒ LA SUCCESSIONE

(S_n) NON PUÒ DIVERGERE NÉ A $+\infty$, NÉ A $-\infty$. QUINDI PER $x < -1$ LA SERIE È INDETERMINATA.