Sulla compattezza degli insiemi di funzioni rispetto alla convergenza in media

del

Prof. **A. Kolmogoroff** a Mosca

Presentato da R. Courant nella seduta del 24 aprile 1931

Sia $\mathfrak{E}$ un insieme di funzioni $f(x)$, definite per ogni punto x di un insieme limitato F dello spazio euclideo n-dimensionale $\mathbb{R}^n$, e di potenza p-esima sommabile:

$$\int_F |f(x)|^p \, d\sigma < +\infty.$$

Si dice che $f_m(x)$ converge ad $f(x)$ in media se

$$\lim_{m \to +\infty} \int_F |f_m(x) - f(x)|^p \, d\sigma = 0. \tag{1}$$

L'insieme $\mathfrak{E}$ si dice compatto se ogni successione $\{ f_m(x) \}$ di funzioni di $\mathfrak{E}$ ammette una sottosuccessione $\{ f_{m_k}(x) \}$ convergente in media. In questo articolo vogliamo dare una condizione necessaria e sufficiente per la compattezza di $\mathfrak{E}$.

Se si pone

$$\rho(f, g) = \left(\int_F |f(x) - g(x)|^p \, d\sigma \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2}$$

si può riscrivere la (1) nella forma

$$\lim_{m \to +\infty} \rho(f_m, f) = 0.$$

L'insieme di tutte le funzioni di potenza p-esima sommabile, con la "distanza" (2), costituisce notoriamente uno spazio metrico completo.

Poniamo $f(x) = 0$ in ogni punto di $\mathbb{R}^n$ non appartenente ad F. Si definisce

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{V(\varepsilon)} \int_{S(x,\varepsilon)} f(y) \, d\sigma,$$

dove $S(x,\varepsilon)$ denota la palla di centro x e raggio ε, e $V(\varepsilon)$ il suo volume. Si vede facilmente che

$$\rho(f_\varepsilon, g_\varepsilon) \leq \rho(f,g). \tag{3}$$

Vogliamo ora dimostrare che per ogni funzione f risulta

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \rho(f_\varepsilon, f) = 0. \tag{4}$$

Infatti, per ogni $\delta > 0$ esiste notoriamente una funzione $u(x)$ uniformemente continua in tutto lo spazio $\mathbb{R}^n$ con la proprietà che

$$\rho(u,f) \leq \delta.$$

Per una funzione uniformemente continua si ha, evidentemente,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \rho(u_\varepsilon, u) = 0,$$

e poiché per la (3) si ha

$$\rho(u_\varepsilon, f_\varepsilon) \leq \rho(u,f) \leq \delta,$$

si ottiene in conclusione

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\ \rho(f_\varepsilon, f) \leq 2\delta.$$

Poiché $\delta > 0$ era arbitrario, la nostra tesi è dimostrata.

Teorema. *Per la compattezza di $\mathfrak{E}$ è necessario e sufficiente che siano soddisfatte entrambe le seguenti condizioni:*

I. Esiste una costante K tale che, per ogni funzione di $\mathfrak{E}$,

$$\int_F |f(x)|^p \, d\sigma \leq K.$$

II.[1] *Per ogni $\delta > 0$ esiste un ε tale che, per tutte le funzioni di $\mathfrak{E}$,*

$$\int_F |f_\varepsilon(x) - f(x)|^p \, d\sigma \leq \delta.$$

Dimostrazione che le condizioni sono necessarie. Supponiamo che la condizione I non sia soddisfatta; esiste allora una successione

$$f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_m,\ \ldots$$

[1] La condizione II ha preso questa forma in seguito ad un suggerimento del sig. prof. Courant.

di funzioni di $\mathfrak{E}$ per le quali la distanza dallo zero

$$\rho(f_m, 0) = \left(\int_F |f_m(x)|^p \, d\sigma \right)^{\frac{1}{p}}$$

e, di conseguenza, anche la distanza

$$\rho(f_m, f) \geq \rho(f_m, 0) - \rho(0, f)$$

da ogni altro punto fissato f diventa arbitrariamente grande al crescere di m. Ma allora la successione $\{ f_m \}$ non è compatta, e di conseguenza nemmeno $\mathfrak{E}$ lo è.

Supponiamo adesso che la condizione II non sia soddisfatta; allora esistono un $\delta > 0$, una successione

$$f_1, \ f_2, \ \ldots, \ f_m, \ \ldots$$

ed una successione di $\varepsilon_m > 0$ con

$$\lim_{m \to +\infty} \varepsilon_m = 0,$$

tali che

$$\rho((f_m)_{\varepsilon_m}, f_m) \geq \delta$$

per ogni m.

Si ha, evidentemente*

$$\delta \leq \rho((f_m)_{\varepsilon_m}, f_m) \leq \rho((f_m)_{\varepsilon_m}, f_{\varepsilon_m}) + \rho(f_{\varepsilon_m}, f) +$$
$$+ \rho(f, f_m) \leq 2\,\rho(f, f_m) + \rho(f_{\varepsilon_m}, f).$$

Poiché per la (4) si ha

$$\lim \rho(f_{\varepsilon_m}, f) = 0,$$

si ricava

$$\underline{\lim}\, \rho(f_m, f) \geq \tfrac{1}{2}\, \delta.$$

Quindi la successione $\{ f_m \}$ non è compatta, e con essa l'insieme $\mathfrak{E}$.

Dimostrazione che le condizioni sono sufficienti.

Indichiamo con $\mathfrak{E}_\varepsilon$ l'insieme delle funzioni $f_\varepsilon(x)$ che corrispondono alle funzioni $f(x)$ di $\mathfrak{E}$.

Le funzioni $f_\varepsilon(x)$ sono uniformemente limitate ed equicontinue. Infatti per ogni insieme J di volume $V(J)$

(5) $$\int_J f(x)\, d\sigma = \int_J 1 \cdot f(x)\, d\sigma \leq$$
$$\leq \left(\int_J 1\, d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_J |f(x)|^p \, d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} \leq (V(J))^{\frac{1}{q}}\, K^{\frac{1}{p}}, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1.$$

*NdT: qui f può essere, con notazione moderna, un qualunque elemento di $L^p(F)$.

Applicando la disuguaglianza (5) all'insieme $J = S(x, \varepsilon)$, si ottiene

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{V(\varepsilon)} \int_{S(x,\varepsilon)} f(y)\, d\sigma \leq (V(\varepsilon))^{\frac{1}{q}-1} K^{\frac{1}{p}},$$

che dimostra l'equilimitatezza delle $f_\varepsilon(x)$. Similmente, per

$$J = \big(S(x', \varepsilon) \setminus S(x'', \varepsilon)\big) \cup \big(S(x'', \varepsilon) \setminus S(x', \varepsilon)\big)$$

si ottiene la disuguaglianza

$$|f_\varepsilon(x'') - f_\varepsilon(x')| = \left| \frac{1}{V(\varepsilon)} \int_J f(y)\, d\sigma \right| \leq (V(J))^{\frac{1}{q}} (V(\varepsilon))^{-1} K^{\frac{1}{p}}.$$

Poiché $V(J)$ tende uniformemente a zero con $|x' - x''|$, resta dimostrata anche l'uniforme equicontinuità delle $f_\varepsilon(x)$.

Di conseguenza $\mathfrak{E}_\varepsilon$ è compatto nel senso della convergenza uniforme; a fortiori è compatto per la convergenza in media, poiché, se una successione di funzioni converge uniformemente, allora converge in media su F.

In virtù della condizione II, gli insiemi $\mathfrak{E}_\varepsilon$ approssimano l'insieme $\mathfrak{E}$ bene quanto si vuole: cioè, prendendo ε opportunamente piccolo, l'insieme $\mathfrak{E}$ è contenuto nella palla $S(\mathfrak{E}_\epsilon, \rho)$ di raggio ρ piccolo a piacere. Ne segue immediatamente la compattezza di $\mathfrak{E}$.

Gottinga, 6-2-1931.

Titolo originale:
Über Kompaktheit der Funktionenmengen bei der Konvergenz im Mittel,
Nachrichten Göttingen **1931** (1931), 60–63 (cfr. www.DigiZeitschriften.de)
Trad. it. A. Greco, Università di Cagliari, 1-1-2021