ANALISI MATEMATICA I - CORSO DI LAUREA IN FISICA

# LA CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI

prof. Antonio Greco

20 NOVEMBRE –
3 DICEMBRE 2020

8 LEZIONI (16,7 %)

## LA CONTINUITà DELLE FUNZIONI

Ricordiamo innanzitutto che il limite

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

prescinde completamente dal valore di

$$f(x_0)$$

anzi, il punto $x_0$ può anche non appartenere al dominio della funzione $f$.

Se però tale punto appartiene al dominio della funzione, possiamo confrontare

$f(x_0)$ con il limite (se esiste)

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

Consideriamo separatamente il limite destro ed il limite sinistro.

---

CONSIDERIAMO UNA $f: [x_0, b) \to \mathbb{R}$

SE ESISTE FINITO IL LIMITE DESTRO

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x),$$

e se il limite destro coincide con il valore di

$f(x_0)$, si dice che la funzione è CONTINUA

DA DESTRA nel punto $x_0$.

ESEMPIO: $f(x) = [x]$, $x_0 \in \mathbb{R}$

SI TROVA CHE $\lim_{x \to x_0^+} [x] = [x_0]$.

INFATTI, SE $x_0 \in \mathbb{Z}$ SI HA CHE $[x] = [x_0] = x_0$ PER OGNI $x \in [x_0, x_0 + 1)$

SE, INVECE, $x_0 \notin \mathbb{Z}$, ALLORA SCRIVIAMO

$$[x_0] < x_0 < [x_0] + 1.$$

MA ALLORA, PER OGNI $x \in [x_0, [x_0] + 1)$ SI HA $[x] = [x_0]$ E LA TESI SEGUE.

---

CONSIDERIAMO UNA $f: (a, x_0] \to \mathbb{R}$

SE ESISTE FINITO IL LIMITE SINISTRO

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x),$$

e se il limite ~~destro~~ SINISTRO coincide con il valore di

$f(x_0)$, si dice che la funzione è CONTINUA

DA ~~DESTRA~~ SINISTRA nel punto $x_0$.

Problemi [203]

1) Per quanto visto nelle scorse lezioni, è immediato constatare che:

$$\lim_{x \to \pm\infty} 2x = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} (x^2 + 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} (x^2 - 4x^3) = \mp\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} (x^3 + 1) = \pm\infty$$

2) Per quanto visto la scorsa lezione, si riconosce immediatamente che:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{x^2+1} = 0.$$

A questo proposito ci si può chiedere se la funzione

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

assume valori positivi o negativi. Per rispondere, studiamo la disequazione

$$\frac{2x}{x^2+1} > 0.$$

Siccome il denominatore

$$x^2 + 1$$

soddisfa per ogni x reale la relazione

$$x^2 + 1 \geq 1 > 0,$$

la disuguaglianza

$$\frac{2x}{x^2+1} > 0$$

equivale a $x > 0$.

Quindi la funzione f(x) ha il segno di x, cioè è positiva per x > 0, nulla per x = 0, e negativa per x < 0, e perciò possiamo scrivere

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{x^2+1} = 0^{\pm}.$$

Cerchiamo ora il limite

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 4x^3}{x^2+1}.$$

Per quanto visto la scorsa lezione, si riconosce immediatamente che:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 4x^3}{x^2+1} = \mp\infty.$$

MA 24 NOV 2020

Infine, si trova:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 4x^3}{x^3 + 1} = -4$$

Infatti si ha che:

$$\frac{x^2 - 4x^3}{x^3 + 1} = \frac{\frac{1}{x} - 4}{1 + \frac{1}{x^3}}$$

PER OGNI $x \neq 0$:

SICCOME $\frac{1}{x} - 4 \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} -4$

E $1 + \frac{1}{x^3} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 1$,

LA TESI SEGUE.

ME 25 NOV 2020

3) Seguendo il suggerimento, scriviamo:

$$\sqrt{x^2+1} - mx = \left(\sqrt{x^2+1} - mx\right) \frac{\sqrt{x^2+1} + mx}{\sqrt{x^2+1} + mx}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - mx\right)\left(\sqrt{x^2+1} + mx\right)}{\sqrt{x^2+1} + mx}$$

ME 25 NOV 2020

$$= \frac{x^2+1 - (mx)^2}{\sqrt{x^2+1} + mx} = \frac{(1-m^2)x^2 + 1}{\sqrt{x^2+1} + mx}$$

Si vede fin dall'inizio che, se m è negativo o nullo, si ha

$$\sqrt{x^2+1} - mx \geq \sqrt{x^2+1} \quad \text{PER } x > 0$$

QUINDI

$$\sqrt{x^2+1} - mx > \sqrt{x^2} = |x| = x$$

E PERCIÒ $\sqrt{x^2+1} - mx \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

Pertanto prenderemo m positivo. Ma allora

$$\sqrt{x^2+1} + mx \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty.$$

In conclusione, prendendo m = 1 si ha

$$\sqrt{x^2+1} - mx = \sqrt{x^2+1} - x =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

Dunque il valore m = 1 risolva il problema.

Osservazione: il procedimento seguito si basa sull'uguaglianza

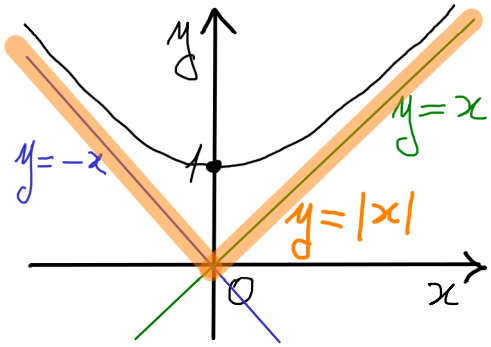
$$\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) =$$

$$= x^2 + 1 - x^2 = 1 \quad \text{E QUINDI}$$

$$\sqrt{x^2+1} + x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x}.$$

ME 25 NOV 2020

## Interpretazione grafica




$f(x) = \sqrt{x^2+1}$ È UNA FUNZIONE PARI PERCHÉ

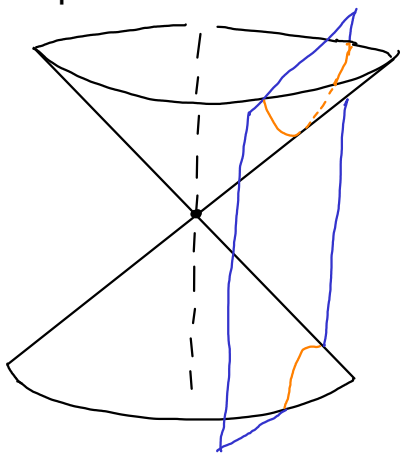
$$f(-x) = \sqrt{(-x)^2+1} = \sqrt{x^2+1} = f(x),$$

E INOLTRE $f(0) = 1$ E SI HA $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x|$

QUINDI $\sqrt{x^2+1} > |x| \geq x$

PER OGNI $x \in \mathbb{R}$: IL GRAFICO DI $f(x)$ GIACE AL DISOPRA DI QUELLO DI $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

Il grafico di f(x) è una curva nota dall'antichità: è un ramo di iperbole.



Il fatto che la differenza f(x) - y(x), dove y(x) = x, tenda a zero per $x \longrightarrow +\infty$ si esprime dicendo che la retta di equazione y = y(x) è un ASINTOTO per la funzione f(x) per $x \longrightarrow +\infty$

## ASINTOTI ALL'INFINITO

DATA UNA $f: (a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, OVVERO UNA $f: (-\infty, b) \longrightarrow \mathbb{R}$

CI CHIEDIAMO SE ESISTONO $m, q$ TALI CHE RISULTI

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - y(x)\right) = 0,$$

DOVE $y(x) = mx + q$. SCRIVIAMO ALLORA

$$f(x) - mx - q = x\left(\frac{f(x)}{x} - m - \frac{q}{x}\right)$$

E OSSERVIAMO CHE $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{q}{x} = 0$. QUINDI È NECESSARIO CHE IL RAPPORTO $\frac{f(x)}{x}$ ABBIA LIMITE FINITO: CONDIZIONE NECESSARIA AFFINCHÉ $f(x)$ ABBIA UN ASINTOTO PER $x \to \pm\infty$ È CHE IL LIMITE DI $\frac{f(x)}{x}$ PER $x \to \pm\infty$ ESISTA FINITO. IN TAL CASO, PONIAMO

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

A QUESTO PUNTO, È NECESSARIO E SUFFICIENTE CHE $f(x) - mx$ ABBIA LIMITE FINITO. SE ANCHE QUESTO AVVIENE, PONIAMO $q = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - mx\right)$ E LA RETTA $y = mx + q$ È L'ASINTOTO DI $f(x)$ PER $x \to \pm\infty$.

GI 26 NOV 2020

Esempio: nella lezione del 25 novembre abbiamo verificato che la retta di equazione y = x è un asintoto per la funzione $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ per $x \to +\infty$.

Esempio: per parità, si può affermare che la retta y = -x è un asintoto per la stessa f(x) per $x \to -\infty$

## ASINTOTI ORIZZONTALI

L'ASINTOTO SI DICE ORIZZONTALE SE $m=0$.
CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE AFFINCHÉ $f(x)$ ABBIA UN ASINTOTO ORIZZONTALE PER $x \to \pm\infty$ È CHE IL LIMITE DI $f(x)$ ESISTA FINITO. IN TAL CASO L'ASINTOTO HA EQUAZIONE $y=q$ CON $q = \lim_{x \to \pm\infty} f(x)$.

ESEMPIO: la retta di equazione y = 0 (l'asse x) è un asintoto orizzontale per la funzione f(x) = 1/x per $x \to +\infty$ E PER $x \to -\infty$ (VEDERE LA LEZIONE DEL 10 NOVEMBRE)

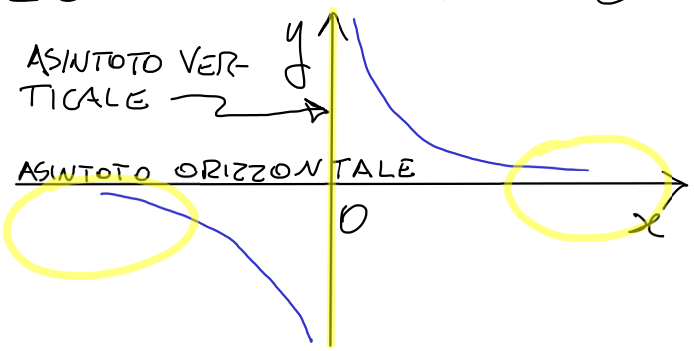
## ASINTOTI VERTICALI

SE RISULTA, CON UNA QUALUNQUE SCELTA DEI SEGNI,

$$\lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = \pm\infty$$

SI DICE CHE LA RETTA $x = x_0$ È UN ASINTOTO VERTICALE.

ESEMPIO: LA FUNZIONE $f(x)=\frac{1}{x}$ HA UN ASINTOTO VERTICALE DI EQUAZIONE $x = 0$




## Problema n. 4, serie [203]

PER QUANTO VISTO IL 20/11,

SE $x_0 \in \mathbb{Z}$, ALLORA $[x] = x_0 - 1$ PER OGNI $x \in [x_0-1, x_0)$ QUINDI

$$\lim_{x \to x_0^-} [x] = x_0 - 1 \neq [x_0]$$

QUINDI LA FUNZIONE $[x]$ È DISCONTINUA DA SINISTRA IN $x_0 \in \mathbb{Z}$.

GI 26 NOV 2020

RESTA DA STUDIARE IL CASO $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
IN TAL CASO SI HA

$$[x_0] < x_0 < [x_0] + 1$$

MA ALLORA, PER OGNI $x \in [[x_0], x_0)$ RISULTA $[x] = [x_0]$
E PERCIÒ:

$$\lim_{x \to x_0^-} [x] = [x_0]$$

IN CONCLUSIONE, LA FUNZIONE $f(x) = [x]$ È CONTINUA DA SINISTRA IN UN PUNTO $x_0$ SE E SOLO SE $x_0 \notin \mathbb{Z}$, DOVE IL SIMBOLO $\mathbb{Z}$ VIENE DA TEDESCO ZAHLEN, CHE VUOL DIRE NUMERI, ED È STATO SCELTO DAL GRUPPO BOURBAKI PER DENOTARE L'INSIEME DEI NUMERI INTERI (RELATIVI).

In generale, le rappresentazioni grafiche sono utili ed efficaci, ma non costituiscono dimostrazione nel senso moderno del termine.

INSIEME AL SIMBOLO $\mathbb{Z}$, SI DEVONO AL GRUPPO BOURBAKI ANCHE I SIMBOLI $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\emptyset$, CHE DENOTANO, RISPETTIVAMENTE, L'INSIEME DEI NUMERI NATURALI, RAZIONALI, REALI, COMPLESSI, E L'INSIEME VUOTO, CHE È L'INSIEME CHE NON HA ELEMENTI.

MA 24 NOV 2020

# LA CONTINUITA' DELLE FUNZIONI DI UNA VARIABILE REALE

Gli studi sulla continuità, e perfino la definizione, sono stati sviluppati nell'Ottocento, in particolare ad opera di Karl Weierstrass. Si tenga presente che, invece, il calcolo differenziale fu inventato nel Seicento.

DEFINIZIONE: UNA FUNZIONE $f:(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ SI DICE CONTINUA IN UN PUNTO $x_0 \in (a,b)$ SE IN TALE PUNTO ESSA È CONTINUA SIA DA DESTRA CHE DA SINISTRA, OVVERO SE RISULTA

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

Esempio.
Per quanto visto nella lezione del 20 novembre, la funzione f(x) = [x] (parte intera di x) è discontinua in tutti i punti di ascissa intera.

Le funzioni di uso corrente risultano continue per effetto dei teoremi sui limiti.

Esempio: la funzione f(x) = x è continua in ogni punto.

VERIFICA (CON LA DEFINIZIONE DI LIMITE):

FISSATO UN PUNTO $x_0$, SI HA CHE

$$\lim_{x \to x_0} x = x_0$$

PERCHÉ $|f(x) - l| = |x - x_0| < \varepsilon$ PER OGNI $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ CON $\delta = \varepsilon$

Esempio: la funzione f(x) = x^2 è continua perché possiamo scrivere:

$$\lim_{x \to x_0} x^2 = \lim_{x \to x_0} x \cdot x = x_0^2$$

Per una ragione analoga, tutte le funzioni potenza f(x) = x^n sono continue per ogni n intero positivo:

$$\lim_{x \to x_0} x^n = \lim_{x \to x_0} x \cdot \ldots \cdot x = x_0^n = f(x_0)$$

Più in generale, qualunque polinomio

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

è una funzione continua su tutto l'asse reale.

DEFINIZIONE: una funzione f(x) si dice CONTINUA NELL'INTERVALLO (a,b) se essa è continua in ciascun punto di tale intervallo.

Se P(x) è un qualunque polinomio, la funzione f(x) = 1/P(x) è continua in tutti i punti del suo insieme di definizione, cioè in tutti i punti x_0 tali che $P(x_0) \neq 0$. INFATTI SI HA CHE

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{P(x)} = \frac{1}{P(x_0)}$$

per la continuità del polinomio P(x) e per il teorema sul limite del rapporto.

Per una ragione analoga, le funzioni razionali Q(x)/P(x) risultano continue in ciascun punto che non sia una radice di P(x).



Teorema: date due funzioni f(x) e g(x), continue in un punto x_0, la funzione somma f(x) + g(x), la funzione differenza f(x) - g(x) e la funzione prodotto f(x) g(x) sono anch'esse continue in x_0. Inoltre, se g(x_0) è diversa da 0, allora anche la funzione f(x)/g(x) è continua in x_0.
Infine, se g(x_0) > 0, allora anche la funzione

$$\left(g(x)\right)^{f(x)}$$

È CONTINUA NEL PUNTO $x_0$.

QUESTO TEOREMA DISCENDE DAI TEOREMI SUI LIMITI ENUNCIATI IL 12 NOVEMBRE. VERIFICHIAMO, AD ESEMPIO, LA CONTINUITA' DELLA FUNZIONE

$$f(x) + g(x).$$

PER IPOTESI, SI HA CHE

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = l_1 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0) = l_2 \in \mathbb{R}$$

QUINDI, PER IL TEOREMA SUL LIMITE DELLA SOMMA, POSSIAMO SCRIVERE

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) + g(x)\right) = l_1 + l_2$$

$$= \left(f + g\right)(x_0).$$

GI 26 NOV 2020

LA PROPRIETÀ DI CONTINUITÀ DELLA FUNZIONE $(g(x))^{f(x)}$, CON $f$ E $g$ CONTINUE E $g>0$, CONTIENE COME CASI PARTICOLARI MOLTE IMPORTANTI PROPRIETÀ DI CONTINUITÀ. VEDIAMONE ALCUNE.

1) LA CONTINUITÀ DELLA FUNZIONE ESPONENZIALE: POSTO $g(x)=e$ (COSTANTE) E $f(x)=x$, SI HA CHE LA FUNZIONE $(g(x))^{f(x)}=e^x$ È CONTINUA IN OGNI $x_0 \in \mathbb{R}$.

PER INCISO, SI NOTI CHE LA CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI COSTANTI $f(x)=c$ SEGUE IMMEDIATAMENTE DAL FATTO CHE $\lim_{x\to x_0} f(x) = c$ PER OGNI $x_0 \in \mathbb{R}$.

SIMILMENTE, SI RICAVA LA CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI $2^x$, $10^x$, E, IN GENERALE, $b^x$ CON UN QUALUNQUE $b>0$.

2) PONENDO $f(x)=\alpha \in \mathbb{R}$ (COSTANTE) E $g(x)=x$ SI HA LA CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI POTENZA $x^\alpha$ COME AD ESEMPIO $x^2$ MA ANCHE $x^{-1}=\frac{1}{x}$ E $x^{-n}=\frac{1}{x^n}$ PER $n$ INTERO POSITIVO E $x>0$. LA CONTINUITÀ PER $x<0$ SI PUÒ VERIFICARE COL CAMBIAMENTO DI VARIABILE $x=-t$.

ESEMPIO: CERCHIAMO IL LIMITE

$$\lim_{x \to x_1} \frac{1}{x}, \quad \text{CON } x_1 < 0.$$

POSTO $x = -t$, E $t_1 = -x_1 > 0$

IL LIMITE DIVENTA

$$\lim_{t \to t_1} \frac{1}{-t} = -\lim_{t \to t_1} \frac{1}{t} = -\frac{1}{t_1} =$$

$$= \frac{1}{x_1},$$ RISULTATO CHE SI PUÒ ANCHE RICAVARE DIRETTAMENTE DAL TEOREMA SUL LIMITE DEL RAPPORTO.

NELLA FAMIGLIA DELLE FUNZIONI POTENZA $x^\alpha$ RIENTRANO ANCHE $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ E, PIÙ IN GENERALE, $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.

PROBLEMA: $x^\alpha$, $\alpha > 0$, È CONTINUA IN $x_0 = 0$?



Possiamo rispondere affermativamente applicando le conoscenze in nostro possesso. Possiamo infatti verificare che, posto

$$f(x) = x^\alpha,$$ SI HA:

$$f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$$



Il primo membro si scrive immediatamente:

$$f(0) = 0^\alpha = 0,$$ PER $\alpha > 0$.

Resta da verificare che

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha = 0.$$

Usiamo la definizione di limite: preso $\varepsilon > 0$, CERCHIAMO $\delta > 0$ TALE CHE LE DISUGUAGLIANZE

$$-\varepsilon < x^\alpha < \varepsilon$$

VALGANO PER OGNI $x \in (0, \delta)$.

LA PRIMA DISUGUAGLIANZA È OVVIAMENTE SODDISFATTA PERCHÉ

$$-\varepsilon < 0 < x^\alpha$$

PER OGNI $x > 0$.

INOLTRE, LA DISUGUAGLIANZA $x^\alpha < \varepsilon$ EQUIVALE A $x < \varepsilon^{1/\alpha}$ PER LA STRETTA MONOTONIA DELLE FUNZIONI POTENZA CON ESPONENTE POSITIVO (17 NOVEMBRE). QUINDI BASTA PRENDERE $\delta = \varepsilon^{1/\alpha}$.

VE 27 NOV 2020

# Teoremi sulla continuità legati alla completezza dell'insieme $\mathbb{R}$

## 1 E 2: TEOREMA DEGLI ZERI E TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI.

TEOREMA DEGLI ZERI:

CONSIDERIAMO UNA FUNZIONE $f \in C^0([a,b])$, ESSENDO $C^0([a,b])$ L'INSIEME DI TUTTE LE FUNZIONI $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ CONTINUE IN OGNI $x_0 \in [a,b]$.

SE I VALORI DI $f(x)$ AGLI ESTREMI SONO DISCORDI, CIOÈ SE

$$f(a) \cdot f(b) < 0,$$

ALLORA LA FUNZIONE $f$ POSSIEDE ALMENO UNO ZERO, CIOÈ ESISTE ALMENO UN PUNTO $x_0 \in (a,b)$ TALE CHE $f(x_0) = 0$.

TALI PUNTI SI DICONO ZERI DELLA FUNZIONE $f$.

TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

SE $f \in C^0([a,b])$, E SE $f(a) < f(b)$, ALLORA PER OGNI $y \in (f(a), f(b))$ ESISTE ALMENO UN $x \in (a,b)$ TALE CHE $f(x) = y$.

ME 2 DIC 2020

OSSERVAZIONE: IL TEOREMA DEGLI ZERI È UN CASO PARTICOLARE DEL TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI: INFATTI, SE $f \in C^0([a,b])$ SODDISFA $f(a) \cdot f(b) < 0$, ALLORA IL VALORE $y = 0$ È UN VALORE INTERMEDIO FRA $f(a)$ E $f(b)$ E QUINDI, PER IL TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI, ESISTE ALMENO UN $x_0 \in (a,b)$ TALE CHE $f(x_0) = 0$ E QUINDI SI DEDUCE LA TESI DEL TEOREMA DEGLI ZERI.

VICEVERSA, SI PUÒ RICAVARE IL TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI DAL TEOREMA DEGLI ZERI: PRESA $f \in C^0([a,b])$ CON $f(a) < f(b)$ E FISSATO $y \in (f(a), f(b))$, APPLICHIAMO IL TEOREMA DEGLI ZERI ALLA FUNZIONE $f(x) - y$: SI HA $f(a) - y < 0$ E $f(b) - y > 0$ QUINDI ESISTE $x_0 \in (a,b)$ TALE CHE $f(x_0) - y = 0$, CIOÈ $f(x_0) = y$.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DEGLI ZERI: PRENDIAMO $f \in C^0([a,b])$ E SUPPONIAMO CHE $f(a) < 0 < f(b)$. DEFINIAMO PER RICORRENZA LE SUCCESSIONI $(a_n)$, $(b_n)$ E $(\mu_n)$ (MI) PONENDO: $a_0 = a$, $b_0 = b$ E, PER OGNI $n \geq 0$, $\mu_n = \frac{a_n + b_n}{2}$,

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n, & \text{SE } f(\mu_n) \geq 0, \\ \mu_n, & \text{SE } f(\mu_n) < 0 \end{cases}$$

COSICCHÉ $f(a_n) < 0$ PER OGNI $n$;

$$b_{n+1} = \begin{cases} \mu_n, & \text{SE } f(\mu_n) \geq 0 \\ b_n, & \text{SE } f(\mu_n) < 0 \end{cases}$$

COSICCHÉ RISULTA $f(b_n) \geq 0$ PER OGNI $n$ (PROCEDIMENTO PER BISEZIONE). ESSENDO $a_n \leq a_{n+1}$ E $b_{n+1} \leq b_n$, PER LA COMPLETEZZA ESISTONO I LIMITI

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = l_1, \qquad \lim_{n \to +\infty} b_n = l_2.$$

MA SICCOME $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$ VUOL DIRE CHE $l_1 = l_2$. VERICHIAMO CHE, POSTO $x_0 = l_1$, SI HA $f(x_0) = 0$.

ME 2 DIC 2020

ESSENDO $f$ CONTINUA, SI HA

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

DAL FATTO CHE $a_n \longrightarrow x_0$ SEGUE ALLORA $f(a_n) \longrightarrow f(x_0)$ MA SICCOME $f(a_n) < 0$ PER OGNI $n$, PER IL TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO POSSIAMO SCRIVERE $f(x_0) \leq 0$.

ANALOGAMENTE, DA $b_n \longrightarrow x_0$ SEGUE $f(b_n) \longrightarrow f(x_0)$ E SICCOME $f(b_n) \geq 0$ SI HA $f(x_0) \geq 0$. QUINDI DEVE AVERSI $f(x_0) = 0$ COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

3. CON LA STESSA TECNICA DI BISEZIONE SI PUÒ DIMOSTRARE IL TEOREMA DI WEIERSTRASS: SE $f \in C^0([a,b])$ ALLORA ESISTONO ALMENO UN PUNTO $x_1 \in [a,b]$ ED ALMENO UN PUNTO $x_2 \in [a,b]$ TALI CHE $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ PER OGNI $x \in [a,b]$. SI SCRIVE: $\max_{[a,b]} f(x) = f(x_2)$ E $\min_{[a,b]} f(x) = f(x_1)$.

OSSERVAZIONE: LA FORMULA

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

SI DIMOSTRA PER INDUZIONE. BASE DELL'INDUZIONE È IL CASO $n = 0$: IN TAL CASO SI HA

$$b_0 - a_0 = b - a$$

E QUESTO È VERO PER LA DEFINIZIONE DI $a_0 = a$ E $b_0 = b$.

PASSO INDUTTIVO: SUPPONIAMO CHE RISULTI $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ PER UN PARTICOLARE VALORE DI $n$, E OSSERVIAMO CHE PER COSTRUZIONE SI HA

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{1}{2}\frac{b-a}{2^n} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

## Applicazione: definizione della funzione logaritmica.

RICORDIAMO INNANZITUTTO CHE

$$\lim_{x \to +\infty} e^x \geq \lim_{x \to +\infty} 2^x = +\infty$$

(LEZIONE DEL 18 NOVEMBRE).

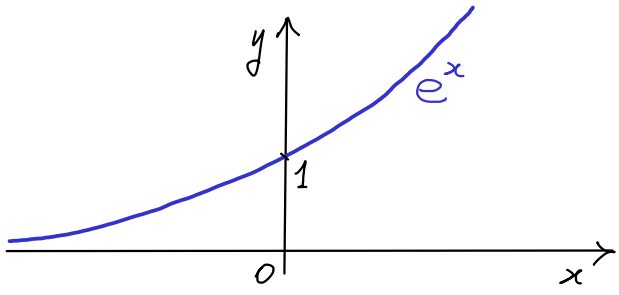
INOLTRE SI HA

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = \lim_{t \to +\infty} e^{-t} =$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{e^t} = 0$$

(VEDERE LA LEZIONE DEL 17/11), E SAPPIAMO CHE LA FUNZIONE $f(x) = e^x$ È STRETTAMENTE CRESCENTE: LEZIONE DI MERCOLEDÌ 11 NOVEMBRE.

VE 27 NOV 2020




SAPPIAMO ANCHE CHE $e^x > 0$ PER OGNI $x$. PRESO DUNQUE $y > 0$, CI CHIEDIAMO SE ESISTE UN $x \in \mathbb{R}$ TALE CHE $e^x = y$ (VEDERE LA LEZIONE DEL 10/11).

LA RISPOSTA È AFFERMATIVA IN VIRTÙ DEL TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI. PRESO $y > 0$, SICCOME $e^x \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$, RISULTA $e^x < y$ PER OGNI $x < N_1$ FISSO QUINDI UN PUNTO $a < N_1$ COSICCHÉ $f(a) = e^a < y$. SICCOME $e^x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$, RISULTA $e^x > y$ PER OGNI $x > N_2$ E PERCIÒ PRENDO $b > N_2$ COSICCHÉ $f(b) = e^b > y$. LA FUNZIONE $f(x) = e^x$ SODDISFA IN $[a,b]$ LE IPOTESI DEL TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI:

$f \in C^0([a,b])$ E

$$f(a) < y < f(b).$$

IL TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI ASSICURA L'ESISTENZA DI ALMENO UN $x \in [a,b]$ TALE CHE

$$e^x = y.$$

QUANTE SONO LE SOLUZIONI DISTINTE DI QUESTA EQUAZIONE? UNA SOLA. PUÒ ESSERE

$$e^{x_1} = e^{x_2}$$

CON $x_1 < x_2$? NO PERCHÉ $f(x)$ È STRETTAMENTE CRESCENTE.

RIEPILOGO: PER OGNI $y > 0$ ESISTE UN UNICO $x \in \mathbb{R}$ TALE CHE

$$e^x = y$$

QUINDI RESTA DEFINITA UNA FUNZIONE $g: (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

NEL RISPETTO DELLA DEFINIZIONE DI FUNZIONE. QUESTA FUNZIONE SI CHIAMA FUNZIONE LOGARITMICA E SI INDICA CON $g(y) = \log y$.

ESSA È CONTINUA IN VIRTÙ DEL TEOREMA SULLA CONTINUITÀ DELLA FUNZIONE INVERSA DI UNA DATA FUNZIONE CONTINUA E STRETTAMENTE CRESCENTE SU DI UN DATO INTERVALLO.

VE 27 NOV 2020

## FUNZIONE INVERSA DI UNA FUNZIONE DATA

ATTENZIONE: NON TUTTE LE FUNZIONI HANNO UNA FUNZIONE INVERSA!

CONSIDERIAMO UNA FUNZIONE $f$ AVENTE PER DOMINIO UN INTERVALLO $I$, E CONSIDERIAMO L'INSIEME $\mathrm{Im} f = f(I)$ DEI VALORI ASSUNTI DALLA FUNZIONE. SE PER OGNI $y \in \mathrm{Im} f$ ESISTE UN UNICO $x \in I$ TALE CHE $f(x) = y$ ALLORA $f$ SI DICE INIETTIVA, O INVERTIBILE, E RESTA DEFINITA LA FUNZIONE $x = g(y)$ DETTA INVERSA DI $f$. PERCIÒ SI PUÒ SCRIVERE

$$f(g(y)) = y.$$

OVVERO

$$f \circ g = \mathrm{id}$$

GI 3 DIC 2020

PRENDENDO A PRESTITO LA NOTAZIONE DALL'ALGEBRA, LA FUNZIONE INVERSA $g(y)$ DI UNA FUNZIONE INVERTIBILE $f(x)$ SI PUÒ INDICARE CON $g(y) = f^{-1}(y)$

O SEMPLICEMENTE $g = f^{-1}$.

MA 1 DIC 2020

## LE PRINCIPALI PROPRIETÀ DEL LOGARITMI

1) PRENDIAMO $y_1, y_2 > 0$.

ESISTONO $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ TALI CHE

$$e^{x_1} = y_1 \quad \text{E} \quad e^{x_2} = y_2.$$

MOLTIPLICANDO MEMBRO A MEMBRO LE DUE UGUAGLIANZE, TROVIAMO

$$e^{x_1 + x_2} = y_1 y_2.$$

PER LA DEFINIZIONE DEL LOGARITMO, POSSIAMO SCRIVERE

$$\log y_1 y_2 = x_1 + x_2 = \log y_1 + \log y_2$$

SIMILMENTE, DIVIDENDO MEMBRO A MEMBRO SI TROVA

$$e^{x_1 - x_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

QUINDI, PER LA DEFINIZIONE DEL LOGARITMO, POSSIAMO SCRIVERE

$$\log \frac{y_1}{y_2} = x_1 - x_2 = \log y_1 - \log y_2$$

2) PRENDIAMO $y > 0$. SAPPIAMO CHE ESISTE UN UNICO $x \in \mathbb{R}$ TALE CHE

$$e^x = y.$$

PER OGNI $\alpha \in \mathbb{R}$ RISULTA QUINDI $(e^x)^\alpha = e^{\alpha x} = y^\alpha$.

PER LA DEFINIZIONE DEL LOGARITMO, POSSIAMO SCRIVERE

$$\log y^\alpha = \alpha x = \alpha \log y$$

## PROBLEMI [204]

1) IL DOMINIO DELLA FUNZIONE

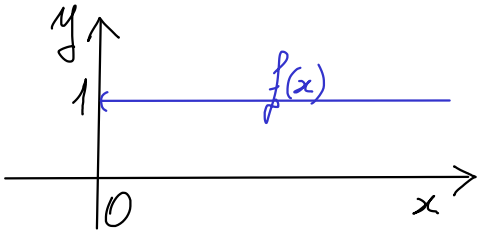
$$f(x) = x + 1 - e^{\log x}$$

È L'INTERVALLO $(0, +\infty)$.
PER OGNI $x \in (0, +\infty)$ SUSSISTE L'UGUAGLIANZA

$$e^{\log x} = x$$

IN VIRTÙ DI QUESTA UGUAGLIANZA, POSSIAMO SCRIVERE

$f(x) = x + 1 - x$ PER OGNI $x > 0$, E QUINDI $f(x) = 1$ PER OGNI $x > 0$.

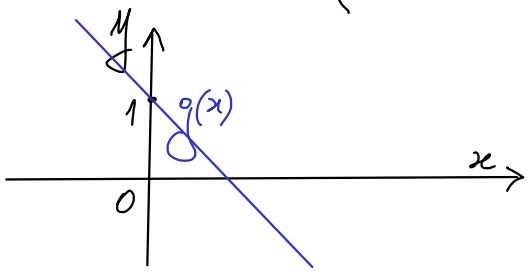





2) IL DOMINIO DELLA FUNZIONE $g(x) = 1 - \log(e^x)$ È L'INTERVALLO $(-\infty, +\infty)$. INOLTRE IL $\log(e^x)$ È UGUALE AD $x$ PER LA DEFINIZIONE DEL LOGARITMO. QUINDI POSSIAMO SCRIVERE $g(x) = 1 - x$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$.



IL GRAFICO DI $g(x) = 1 - x$ È IL SEGUENTE (È UNA RETTA)






3) POSTO $t = e^x > 0$,
L'UGUAGLIANZA DATA DIVENTA

$$\frac{t - \frac{1}{t}}{2} = y$$

CHE SI PUÒ RISCRIVERE NELLA FORMA

$$t^2 - 2yt - 1 = 0$$

E QUESTA È UN'EQUAZIONE DI SECONDO GRADO LA CUI UNICA SOLUZIONE POSITIVA È

$$e^x = t = y + \sqrt{y^2 + 1} > y + \sqrt{y^2} = y + |y| \geq 0$$

E DA QUI RICAVIAMO

$$x = \log\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right) = \operatorname{settsenh} y = \operatorname{senh}^{-1} y$$

CON NOTAZIONE ISPIRATA ALL'ALGEBRA.