

Registro delle lezioni

Calcolo delle Probabilità

a.a. 2020/2021

09/10/2020 Introduzione al corso e definizioni base

- Introduzione al corso;
- Definizione di algebra e σ -algebra;
- σ -algebra generata da un insieme, definizione e dimostrazione d'esistenza;
- σ -algebra di Borel, definizione e caratterizzazione;
- Definizione di probabilità;
- Sommabilità contabile implica sommabilità finita.

12/10/2020 Proprietà fondamentali della probabilità

- Probabilità del complementare;
- Caratterizzazione della probabilità per successioni crescenti e decrescenti di sottoinsiemi;
- Funzione indicatrice di un insieme;
- Convergenza di sottoinsiemi e di probabilità;
- Probabilità uniforme (finita);
- Definizione di probabilità condizionata.

13/10/2020 Eventi indipendenti e probabilità condizionata

- Definizione di eventi indipendenti;
- Misura di probabilità condizionata;
- Formula di Bayes;
- Schema di Bernoulli;
- Caratterizzazione delle misure di probabilità su spazi al più contabili tramite i suoi valori sugli atomi.

16/10/2020 Calcolo combinatorio

- Cardinalità del prodotto cartesiano, disposizioni, e combinazioni;
- Urna di Polya e probabilità ipergeometrica;
- Esempi ed esercizi.

19/10/2020 Variabili aleatorie

- Definizioni di variabile aleatoria e di legge;
- Variabili aleatorie discrete e densità;
- Variabili binomiali, di Bernoulli, e geometriche.

20/10/2020 Variabili aleatorie e valore atteso

- La distribuzione ipergeometrica converge alla distribuzione binomiale all'infinito;
- Proprietà di perdita di memoria delle v.a. geometriche;
- V.a. Binomiali negative e di Poisson;
- La distribuzione di Poisson converge alla distribuzione binomiale all'infinito;
- Definizione di funzione di ripartizione;
- Definizione di valore atteso e di spazio L^1 .

23/10/2020 Disuguaglianze di Markov e Chebyshev

- Proprietà dello spazio L^1 ;
- Dimostrazione che $L^2 \subset L^1$;
- Definizione di varianza;
- Disuguaglianze di Markov e Chebyshev;
- Calcolo del valore atteso per variabili di Poisson, Binomiali, e geometriche;
- Definizione di v.a. multidimensionale e di densità marginali e congiunte.

26/10/2020 Variabili aleatorie m -dimensionali

- Calcolo delle densità marginali a partire dalla densità congiunta;
- Definizione di indipendenza di variabili aleatorie;
- Definizione di densità condizionale di X dato Y ;
- Dimostrazione del fatto che una qualunque funzione di variabili aleatorie discrete è una variabile aleatoria;
- Dimostrazione del fatto che una funzioni di variabili aleatorie indipendenti sono indipendenti;
- Densità della somma di variabili aleatorie;
- Densità della somma di due Poisson indipendenti.

27/10/2020 Spazi L^k

- Densità del massimo e del minimo di variabili aleatorie geometriche;
- Dimostrazione che se X e Y sono indipendenti allora $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$;
- Definizione degli spazi L^k ;
- Dimostrazione che $L^r \subseteq L^k$ per $k \geq r$ e che L^k è uno spazio vettoriale;
- Proprietà della varianza;
- Definizione di covarianza;
- Proprietà della covarianza;
- Definizione del coefficiente di correlazione e dimostrazione che è invariante per riscature.

2/11/2020 Teorema dei Grandi numeri e retta di regressione

- Dimostrazione del fatto che $\mathbb{E}(|XY|)^2 \geq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$ e che il coefficiente di correlazione ha modulo più piccolo o uguale a 1;
- Teorema dei Grandi Numeri (con dimostrazione);
- Costruzione della retta di regressione;
- Utilizzo della retta di regressione per il denoising di segnali rumorosi.

3/11/2020 Teorema di Shannon-McMillan

- Teorema di Shannon-McMillan, significato intuitivo e dimostrazione;
- Definizione di funzione generatrice delle probabilità;
- Calcolo della funzione generatrice delle probabilità per binomiali, Poisson, e geometriche.

6/11/2020 Funzione generatrice delle probabilità

- Dimostrazione che la funzione generatrice delle probabilità caratterizza la densità;
- Funzione generatrice delle probabilità della somma di due variabili aleatorie indipendenti;
- Distribuzione della somma di due geometriche indipendenti;
- Calcolo dei momenti a partire dalla funzione generatrice delle probabilità;
- Media e varianza della geometrica;
- Somme aleatorie e loro distribuzioni.

9/11/2020 Esercizi e introduzione al pacchetto R

- Esercizi;
- Introduzione al pacchetto R;
- Verifica empirica del teorema dei grandi numeri.

10/11/2020 Esercizi e introduzione al pacchetto R

- Esercizi;
- Introduzione al pacchetto R.

13/11/2020 Esercizi e introduzione al pacchetto R

- Esercizi;
- Introduzione al pacchetto R.

16/11/2020 Variabili aleatorie continue

- Definizione di variabile aleatoria continua;
- Proprietà caratterizzanti della funzione di ripartizione;
- Calcolo di $\mathbb{P}(X = x)$ tramite la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria continua;
- Definizione di densità per variabili aleatorie assolutamente continue;
- Costruzione della distribuzione uniforme;

- Variabili aleatorie con legge esponenziale.

17/11/2020 Variabili aleatorie continue

- Proprietà di perdita di memoria delle variabili esponenziali;
- Definizione di quantile e mediana;
- Dimostrazione che se X è una variabile aleatoria e Φ è continua allora $\Phi(X)$ è una variabile aleatoria;
- Calcolo della densità di $\Phi(X)$;
- Massimo e minimo di variabili aleatorie esponenziali indipendenti;
- Densità congiunte e marginali di variabili aleatorie assolutamente continue;
- Calcolo della densità marginale a partire dalla congiunta per variabili aleatorie assolutamente continue.

18/11/2020 Variabili aleatorie continue

- Densità uniforme su insiemi misurabili;
- Dimostrazione del fatto che X e Y variabili aleatorie assolutamente continue sono indipendenti se e solo se la densità congiunta fattorizza nel prodotto delle marginali quasi ovunque;
- Indipendenza di variabili aleatorie multi-dimensionali;
- Dimostrazione che funzioni di variabili aleatorie multi-dimensionali indipendenti sono indipendenti;
- Densità condizionale;
- Densità congiunta mista di X e Y con X assolutamente continua e Y discreta.

20/11/2020 Speranza matematica di variabili aleatorie assolutamente continue

- Densità della somma di variabili aleatorie assolutamente continue;
- Speranza matematica di variabili aleatorie assolutamente continue;
- Calcolo della speranza matematica di uniformi ed esponenziali;
- Speranza matematica di funzioni di variabili aleatorie assolutamente continue (senza dimostrazione);
- Spazio L^1 per variabili aleatorie assolutamente continue;
- Momenti e momenti centrati di variabili aleatorie assolutamente continue;
- Speranza matematica del prodotto di due variabili aleatorie assolutamente continue indipendenti;
- Matrice di covarianza.

23/11/2020 Variabili normali e Gamma

- Definizione di variabile aleatoria normale;
- Media e varianza di variabili aleatorie normali;
- Distribuzione della somma di due variabili aleatorie normali indipendenti (senza dimostrazione);
- Funzione di ripartizione di variabili aleatorie normali e tavole;

- Quantili di variabili normali (e simmetriche);
- Definizione di variabile aleatoria Gamma;
- Momenti, valore atteso, e varianza della Gamma.

24/11/2020 Variabili aleatorie Gamma

- Distribuzione della somma di variabili aleatorie Gamma indipendenti;
- Esercizi;
- Tasso istantaneo di guasto.

27/11/2020 Variabili Beta e speranza condizionale

- Costruzione della densità associata ad un tasso istantaneo di guasto;
- Densità, momenti della Beta;
- Speranza condizionale di una variabile aleatoria X dato $Y = y$;
- Dimostrazione che per ogni funzione G si ha $\mathbb{E}(G(Y)H(Y)) = \mathbb{E}(G(Y)X)$ con $H(Y)$ speranza condizionale di una variabile aleatoria X dato Y .

30/11/2020 Trasformata di Laplace

- Dimostrazione che la speranza condizionale di X dato Y è la migliore approssimazione di X come funzione di Y ;
- Definizione della trasformata di Laplace (o funzione generatrice dei momenti);
- Trasformata di Laplace della Binomiale, Poisson, geometrica, Gamma, e Normale;
- Legame fra la trasformata di Laplace e la funzione generatrice delle probabilità per variabili aleatorie a valori interi;
- Trasformata di Laplace della somma di variabili aleatorie indipendenti;
- Due variabili aleatorie con la stessa trasformata di Laplace allora hanno la stessa legge (senza dimostrazione);
- Calcolo dei momenti di una variabile aleatoria a partire dalla trasformata di Laplace.

01/12/2020 Trasformata di Fourier

- Definizione di trasformata di Fourier;
- Proprietà della trasformata di Fourier;
- Calcolo dei momenti tramite la trasformata di Fourier (senza dimostrazione);
- Proprietà caratterizzante della trasformata di Fourier (senza dimostrazione);
- Anti-trasformata di Fourier (senza dimostrazione).

02/12/2020 Convergenza di successioni di variabili aleatorie

- Definizione di convergenza in probabilità, quasi certa, in legge, e in L^p ;
- Dimostrazione che $X_n \xrightarrow{P} X$ se e solo se $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|} \right) = 0$;
- Dimostrazione che se $X_n \xrightarrow{q.c.} X$ allora $X_n \xrightarrow{P} X$;
- Dimostrazione che se $X_n \xrightarrow{L^p} X$ allora $X_n \xrightarrow{P} X$;

- Dimostrazione che se $X_n \xrightarrow{P} X$ allora esiste una sottosuccessione $(X)_{n_k}$ tale che $X_{n_k} \xrightarrow{q.c.} X$;
- Costruzione di un esempio di successione $(X_n)_n$ che converge in probabilità, ma non quasi certamente.

04/12/2020 Convergenza di successioni di variabili aleatorie

- Costruzione di un esempio di successione $(X_n)_n$ che converge quasi certamente, ma non in L^p ;
- Dimostrazione che se $X_n \xrightarrow{P} X$ e $|X_n| \geq Y$ con $Y \in L^p$ allora $X_n \xrightarrow{L^p} X$;
- Dimostrazione che se $X_n \xrightarrow{q.c.} X$ allora $f(X_n) \xrightarrow{q.c.} f(X)$ se f è continua;
- Dimostrazione che se $X_n \xrightarrow{P} X$ allora $f(X_n) \xrightarrow{P} f(X)$ se f è continua;
- Enunciato che se $X_n \xrightarrow{P} X$ allora $X_n \xrightarrow{L^1} X$ (senza dimostrazione).

07/12/2020 Teorema del limite centrale

- Teorema del limite centrale con dimostrazione;
- Esempi di stima della probabilità tramite il teorema del limite centrale (in \mathbb{R});
- Procedura di correzione di continuità.

11/12/2020 Intervallo di fiducia

- Calcolo dell'intervallo di fiducia per il teorema dei grandi numeri con varianza nota;
- Stima della varianza empirica;
- Variabile t di Student.

14/12/2020 Numeri pseudo-random e metodi Montecarlo

- Numeri pseudo-Random;
- Derivazione di una variabile aleatoria generale a partire dall'uniforme su $[0, 1]$;
- Metodi Montecarlo per l'integrazione numerica;
- Legge di Cauchy;
- Indice di skewness.

15/12/2020 Esercizi in preparazione dello scritto

- Esercizi in preparazione dello scritto con l'ausilio del pacchetto R.

17/12/2020 Esercizi in preparazione dello scritto

- Esercizi in preparazione dello scritto con l'ausilio del pacchetto R.

21/12/2020 Esercizi in preparazione dello scritto

- Esercizi in preparazione dello scritto con l'ausilio del pacchetto R.