Modulo 7

Teoria classica delle opzioni

Definizioni generali

- Un **derivato** è un prodotto finanziario il cui valore dipende dal valore di un altro prodotto (chiamato **sottostante**). Esamineremo il caso di **opzioni** su azioni (ossia il sottostante è costituito da titoli azionari rischiosi).
- Definiamo un'opzione di tipo **call** (**put**) come un contratto finanziario che consente, dietro pagamento di un **premio** C, di acquistare (vendere) un titolo azionario predefinito (il nostro sottostante) a un prezzo predeterminato K (**strike price** o **prezzo d'esercizio**) a una **scadenza** T prefissata.
- Il sottostante, il prezzo d'esercizio e la scadenza fanno parte del contratto stesso.

Il pay-off

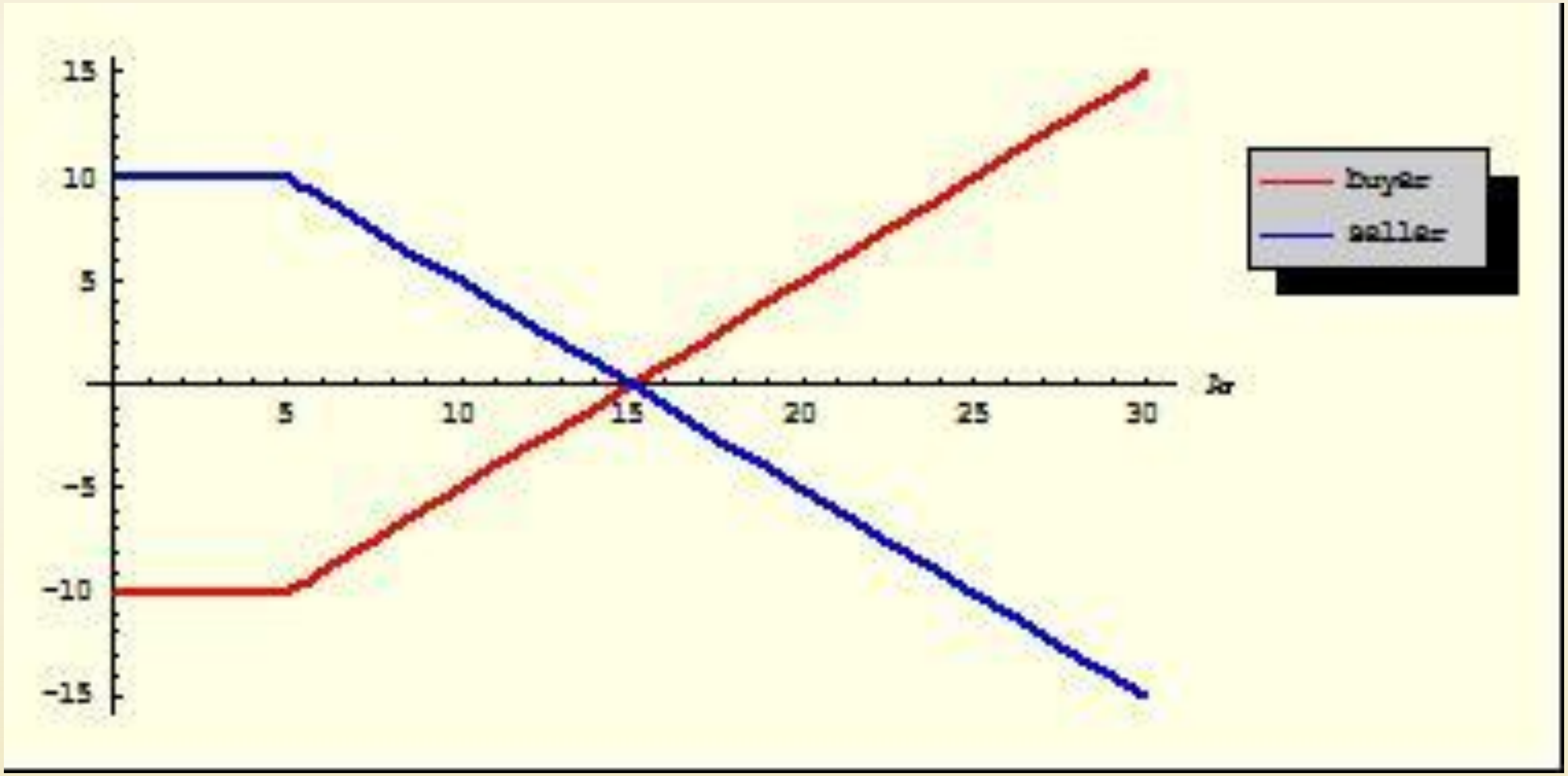
- Opzione di tipo **europeo** se il diritto può essere esercitato solo alla scadenza *T*, oppure di tipo **americano** se il diritto può essere esercitato anche entro la scadenza *T*.
- L'acquirente della call eserciterà il suo diritto solo se il valore a scadenza dell'azione A_T sarà maggiore rispetto allo strike price *K* (**rialzista**). In caso di esercizio, il profitto lordo a scadenza (**pay-off**) sarà uguale alla differenza positiva $A_T - K$, diversamente questa differenza vale zero.
- Si ha:

$$C_T = \text{Max}(A_T - K; 0)$$

- Il compratore della call ("**buyer**") ha potenzialità di guadagno molto elevato, la perdita è limitata.

Il pay-off

- Profitto netto: $C_T - C$. Esempio con $C = 10$ e $K = 5$.



Il pay-off

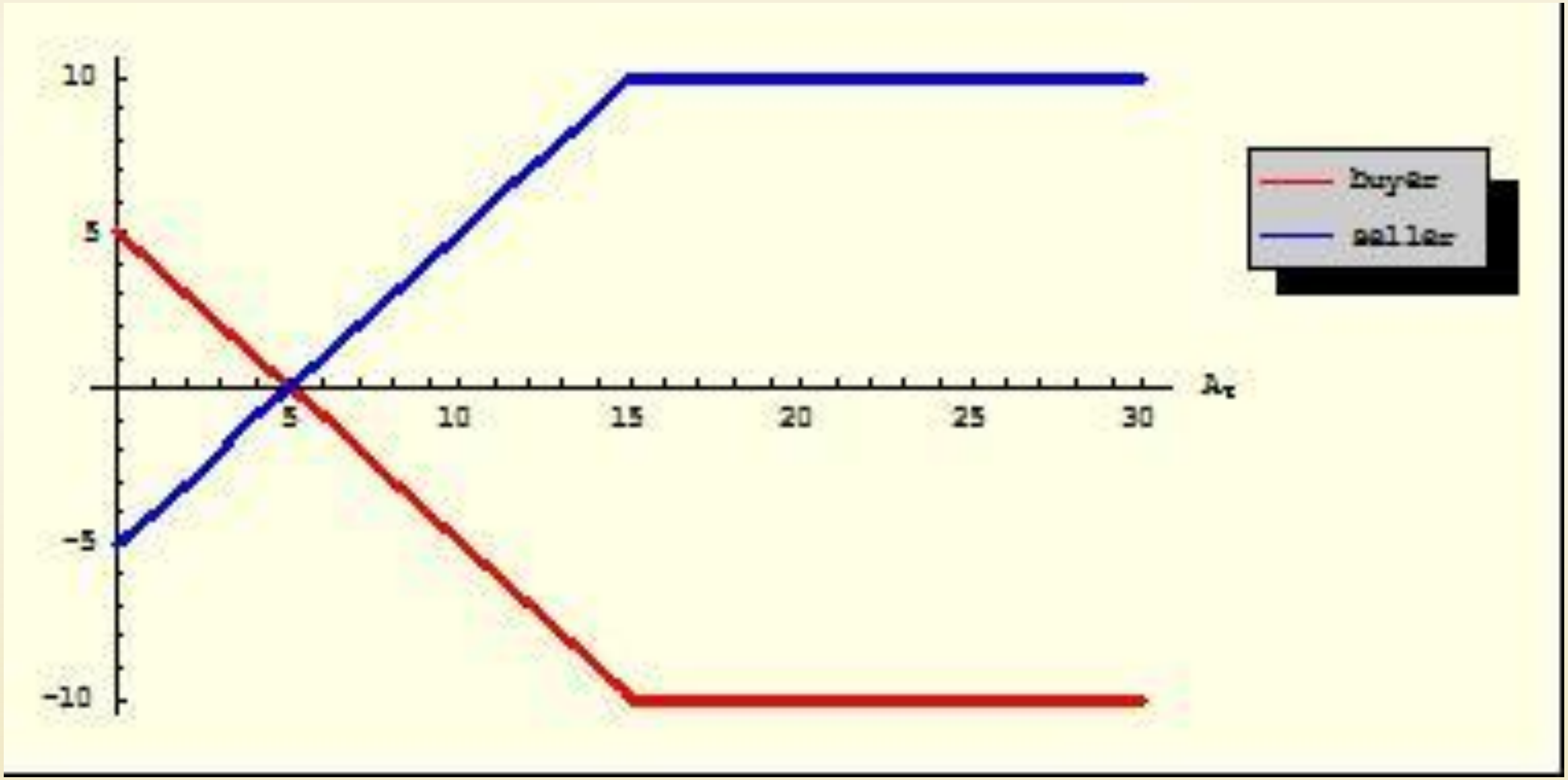
- L'acquirente della put eserciterà il suo diritto solo se il valore a scadenza dell'azione A_T sarà minore rispetto allo strike price *K* (**ribassista**). In caso di esercizio, il profitto lordo a scadenza (**pay-off**) sarà uguale alla differenza positiva $K - A_T$, diversamente questa differenza vale zero.
- Si ha:

$$P_T = \mathrm{Max}(K - A_T; 0)$$

- Il seller guadagna al massimo il prezzo pagato dal compratore. Per quanto riguarda il buyer, la perdita massima è il prezzo pagato ma ci sono notevoli possibilità di guadagno.

Il pay-off

- Profitto netto: $P_T - P$. Esempio con $P = 10$ e $K = 15$.



Esempio

- Sia un'opzione call a tre mesi sul titolo *alpha* con $A_0 = 4{,}9$ euro e $K = 5$ euro. Se il valore a scadenza dell'azione è $A_T = 6$, il pay-off vale

  $C_T = \mathrm{Max}(6 - 5; 0) = 1.$

  In questo caso l'esercizio dell'opzione conviene. Se il valore a scadenza dell'azione è $A_T = 4{,}5$ il pay-off vale $C_T = \mathrm{Max}(4{,}5 - 5; 0) = 0.$
  In questo caso l'esercizio dell'opzione non conviene.

Esempio

- Sia un'opzione put a un mese sul titolo *beta* con $A_0 = 3$ euro e $K = 3{,}5$ euro. Se il valore a scadenza dell'azione è $A_T = 2$, il pay-off vale

  $P_T = \mathrm{Max}(3{,}5 - 2; 0) = 1{,}5.$

  In questo caso l'esercizio dell'opzione conviene. Se il valore a scadenza dell'azione è $A_T = 4$ il pay-off vale $P_T = \mathrm{Max}(3{,}5 - 4; 0) = 0.$

  In questo caso l'esercizio dell'opzione non conviene.

Portfolio insurance

- Sia un portafoglio costituito da un’azione e un'opzione put che ha per sottostante quell'azione. Valore a scadenza:

$$V_T = A_T + \mathrm{Max}(K - A_T; 0)$$

- Esaminiamo le seguenti possibilità:

$$A_T \geq K \Rightarrow V_T = A_T + 0 = A_T$$
$$A_T < K \Rightarrow V_T = A_T + K - A_T = K$$

→ il valore a scadenza del nostro portafoglio non scende mai al di sotto dello strike price *K*. Abbiamo costruito in questo modo uno strumento di copertura del rischio chiamato **portfolio insurance**.

Relazione di parità

- Sia un portafoglio costituito da un’azione, un'opzione put e un’opzione call (con quota -1) che hanno per sottostante quell'azione. Valore a scadenza:

$$V_T = A_T + \mathrm{Max}(K - A_T; 0) - \mathrm{Max}(A_T - K; 0)$$

- Esaminiamo le seguenti possibilità:

$$A_T \geq K \Rightarrow V_T = A_T + 0 - A_T + K = K$$
$$A_T < K \Rightarrow V_T = A_T + K - A_T - 0 = K$$

→ Il valore a scadenza è sempre *K* (portafoglio non rischioso). Per evitare opportunità di arbitraggio, il valore attuale del portafoglio dovrà essere uguale al valore attuale di *K* al tasso risk free.

Relazione di parità

- Avremo perciò:

$$A + P - C = \frac{K}{r_f}$$

→ **relazione di parità call-put**.

- Possiamo dedurre il prezzo della put *P* da quello della call *C* (e viceversa).

Pricing

- Obiettivo della teoria delle opzioni: determinare il prezzo del contratto.
- Per questo, dovremo stabilire la dinamica del prezzo del sottostante.
- Vedremo a tal proposito due modelli di valutazione delle opzioni:

- modello discreto (**Cox-Ross-Rubinstein**)
- modello continuo (**Black&Scholes**)

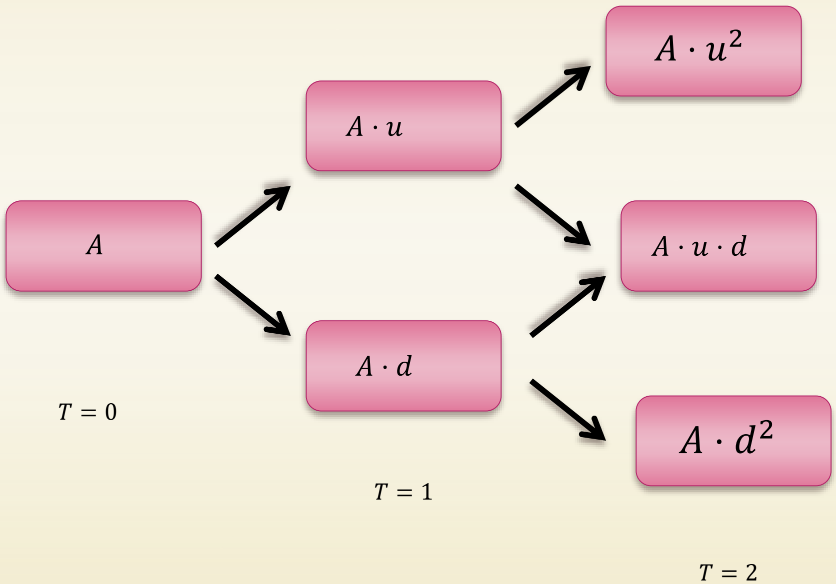
Valutazione delle opzioni: modello Cox-Ross-Rubinstein

Ipotesi del modello

- Il modello di pricing più semplice, chiamato **modello binomiale** di **Cox-Ross-Rubinstein** (modello "*CRR*", 1979) ipotizza che in un singolo periodo il corso azionario con prezzo iniziale *A* possa avere solamente due movimenti: a rialzo ($A_T = A \cdot u$ con il fattore di rialzo $u > 1$), o a ribasso ($A_T = A \cdot d$ con il fattore di ribasso $d < 1$).
- Dopo due periodi potremo avere due rialzi, due ribassi oppure un rialzo e un ribasso (o viceversa).
- Dopo *n* periodi potremo avere *n+1* possibili valori a scadenza per il sottostante.

Albero binomiale

- Evoluzione del sottostante:



Pay-off

- A ogni possibile valore del sottostante potremo associare un pay-off.
- Per l'opzione call avremo dopo un periodo:

$$C_u = \mathrm{Max}(A \cdot u - K; 0)$$
$$C_d = \mathrm{Max}(A \cdot d - K; 0)$$

- Dopo due periodi avremo tre possibili payoff:

$$C_{uu} = \mathrm{Max}\left(A \cdot u^2 - K; 0\right)$$
$$C_{dd} = \mathrm{Max}\left(A \cdot d^2 - K; 0\right)$$
$$C_{ud} = \mathrm{Max}(A \cdot u \cdot d - K; 0).$$

- Dopo *n* periodi avremo *n+1* pay-off.

Portafoglio replicante

- Sia un titolo risk free che rende il tasso *i*, con scadenzario $(1; 1+i)/(0; T)$

- Costruiamo un portafoglio Π costituito da una quota *a* di titoli azionari e da una quota *b* di titoli risk free.

→ Imponiamo che il valore del portafoglio alla scadenza *T* abbia lo stesso valore di un'opzione call (scritta sullo stesso titolo azionario) in caso di rialzo e ribasso:

$$\begin{cases} a \cdot A \cdot u + b \cdot (1+i) = C_u \\ a \cdot A \cdot d + b \cdot (1+i) = C_d \end{cases}$$

- Un portafoglio con questa proprietà è chiamato **portafoglio replicante**.

Portafoglio replicante

- Le soluzioni del sistema sono:

$$a = \frac{C_u - C_d}{A \cdot (u - d)} \qquad b = \frac{u \cdot C_d - d \cdot C_u}{(1+i) \cdot (u - d)}$$

- Per la legge dell'unico prezzo, il prezzo dell'opzione dovrà coincidere con quello del portafoglio:

$$C = a \cdot A + b \cdot 1 = \frac{C_u - C_d}{A \cdot (u - d)} \cdot A + \frac{u \cdot C_d - d \cdot C_u}{(1+i) \cdot (u - d)} =$$

$$= \frac{(C_u - C_d) \cdot (1+i) + u \cdot C_d - d \cdot C_u}{(1+i) \cdot (u - d)}$$

Pricing

- Poniamo: $\pi = \dfrac{1+i-d}{u-d}$

- La formula precedente si può riscrivere:

$$C = \frac{\pi \cdot C_u + (1-\pi) \cdot C_d}{1+i}$$

→ il prezzo dell'opzione è la media ponderata dei pay-off, attualizzata al tasso risk free.

- Stesso procedimento per la put (adattando i pay-off).
- Il coefficiente π è compreso tra zero e uno, perciò lo possiamo interpretare come una probabilità.

Probabilità risk-neutral

- Dalla definizione di π si deduce:

$$u \cdot \pi + d \cdot (1 - \pi) = 1 + i$$

→ π è tale da rendere il valore atteso del rendimento azionario (il primo membro) pari al tasso risk free (il secondo membro).

Esempio

- Determinare il prezzo di un'opzione call nel caso uniperiodale con i dati seguenti: *A = 80*, *K = 79,5*, *i = 10%*, *u = 1,20* e *d = 0,90*.
- Determiniamo i pay-off:

$$C_u = \text{Max}(80 \cdot 1{,}20 - 79{,}5; 0) = 16{,}5$$
$$C_d = \text{Max}(80 \cdot 0{,}90 - 79{,}5; 0) = 0$$

→ l'esercizio dell'opzione è conveniente solo in caso di rialzo.

- Probabilità risk neutral:

$$\pi = \frac{1 + 0{,}10 - 0{,}90}{1{,}20 - 0{,}90} = 0{,}6667$$

Esempio

- Avremo perciò:

$$C = \frac{0{,}66 \cdot 16{,}5 + 0}{1{,}10} = 10$$

- Quote del portafoglio replicante:

$$a = \frac{C_u - C_d}{A \cdot (u - d)} = \frac{16{,}5 - 0}{80 \cdot 0{,}30} = 0{,}6875$$

$$b = \frac{u \cdot C_d - d \cdot C_u}{(1 + i) \cdot (u - d)} = \frac{0 - 0{,}90 \cdot 16{,}5}{1{,}10 \cdot 0{,}30} = -45$$

- Prezzo dell'opzione (formula equivalente):

$$C = 0{,}6875 \cdot 80 - 45 = 10$$

Caso multiperiodale

- Caso biperiodale: tre possibili valori a scadenza del corso azionario.
  - π^2 probabilità di un doppio rialzo;
  - $(1-\pi)^2$ probabilità di un doppio ribasso;
  - $2\pi \cdot (1-\pi)$ probabilità di rialzo/ribasso.
- Prezzo dell'opzione call:

$$C = \frac{\pi^2 \cdot C_{uu} + 2\pi \cdot (1-\pi) \cdot C_{ud} + (1-\pi)^2 \cdot C_{dd}}{(1+i)^2}$$

- Opzione call "**in the money**" se il corso azionario è superiore allo strike (possibilità di guadagnare); "**out of the money**" se il corso azionario è inferiore allo strike (non è conveniente); "**at the money**" se sono identici corso azionario e strike. Caso della put: le definizioni "in the money" e "out of the money" sono invertite.

Caso multiperiodale

- Dopo *n* periodi, il valore del sottostante è $A_n = A \cdot u^h \cdot d^{n-h}$ con *h* rialzi e *n-h* ribassi ($0 \leq h \leq n$).

- Possibili pay-off a scadenza:

$$C_h = \mathrm{Max}\left(A \cdot u^h \cdot d^{n-h} - K; 0\right)$$
$$P_h = \mathrm{Max}\left(K - A \cdot u^h \cdot d^{n-h}; 0\right)$$

- Possibili traiettorie che collegano il nodo di partenza con il generico nodo finale (con *h* rialzi e *n-h* ribassi) sono pari al numero di combinazioni di *h* oggetti in un insieme di *n*, ossia il **coefficiente binomiale**:

$$\binom{n}{h} = \frac{n!}{h!\,(n-h)!}$$

Caso multiperiodale

- Numero di traiettorie dopo 6 periodi:

1
1, 1
1, 2, 1
1, 3, 3, 1
1, 4, 6, 4, 1
1, 5, 10, 10, 5, 1
1, 6, 15, 20, 15, 6, 1

Caso multiperiodale

- Probabilità di ottenere *h* rialzi e *n-h* ribassi pari a

$$\pi^h \cdot (1-\pi)^{n-h}$$

- Valore dell'opzione dato dal valore atteso dei payoff, attualizzato per *n* periodi al tasso risk free (generalizzazione del caso biperiodale):

$$C = \frac{\sum_{h=0}^{n} \mathrm{Max}\left(A \cdot u^h \cdot d^{n-h} - K; 0\right) \cdot \binom{n}{h} \cdot \pi^h \cdot (1-\pi)^{n-h}}{(1+i)^n}$$

$$P = \frac{\sum_{h=0}^{n} \mathrm{Max}\left(K - A \cdot u^h \cdot d^{n-h}; 0\right) \cdot \binom{n}{h} \cdot \pi^h \cdot (1-\pi)^{n-h}}{(1+i)^n}$$