Modulo 6

Duration e Immunizzazione finanziaria

INDICI TEMPORALI E INDICATORI DI SENSIBILITÀ

Argomenti

- Obiettivi.
- Introduzione.
- Indici temporali di un flusso di pagamenti: scadenza e vita a scadenza.
- Indici temporali di un flusso di pagamenti: la scadenza media aritmetica.
- Indici temporali di un flusso di pagamenti: la duration, la duration con struttura piatta.
- La duration come indice di sensibilità di un titolo.
- Duration e dispersione di portafogli.
- Indici di variabilità di un flusso di pagamenti.
- Appendice: Il caso di rendite a rate costanti.

Obiettivi

Gli *obiettivi* di questo modulo sono:

- conoscere gli indici temporali di un flusso di importi;
- conoscere i limiti e le peculiarità degli indici temporali, in relazione alla struttura dei tassi;
- saper individuare e interpretare la durata media finanziaria (duration);
- conoscere la definizione di duration di secondo ordine;
- saper interpretare gli indici di variabilità di un flusso di pagamenti per studiare la funzione andamento dei prezzi.

Introduzione

Nel valutare la **convenienza** di una operazione finanziaria, l'approccio più comune consiste nell'associare alle operazioni stesse una funzione di valore (anche detta funzione di **utilità**) che ne misuri la convenienza o meno.

→ il problema della valutazione e della scelta si traduce in un problema di programmazione matematica.

Le più note funzioni di utilità sono il **valore attuale**, il **montante**, il **TIR**, il **payback period** e la **durata media finanziaria** (d.m.f.).

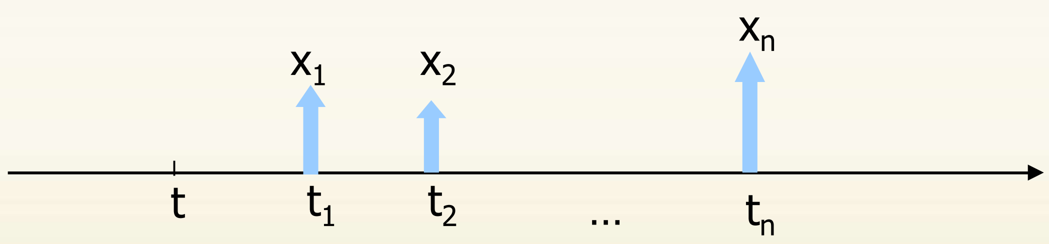
In questa sezione introdurremo la d.m.f. come la media ponderata delle scadenze di un'obbligazione. Vedremo come in regime di capitalizzazione composta la d.m.f. misura la sensibilità del valore di una obbligazione alle variazioni del tasso di valutazione.

Indici temporali di un flusso di pagamenti: scadenza e vita a scadenza

Consideriamo un flusso di importi non tutti nulli pagabili a determinate scadenze:

$$\mathbf{x/t} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \;/\; \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$$

Definiamo operazione finanziaria l'acquisto o la vendita in t ($t \le t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_n$) del titolo che garantisce il flusso **x/t**.



Si vogliono trovare alcuni indici temporali sintetici che possano aiutare a descrivere la natura dell'operazione finanziaria; il più semplice ed immediato è il valore t_n denominato "**scadenza**" o "***maturity***". Maggiore significato lo ha la quantità $t_n - t$, definita "***vita a scadenza***" o "***time to maturity***", che esprime la differenza tra t_n e l'epoca che indica l'istante di osservazione. Si tratta di indicatori che presentano molti limiti in quanto trascurano i pagamenti intermedi.

Indici temporali di un flusso di pagamenti: la scadenza media aritmetica

Un indicatore temporale più sofisticato è la "**scadenza media aritmetica**" definita come segue:

$$d = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k \cdot x_k}{\sum_{k=1}^{n} x_k}$$

Tale indicatore, seppur più significativo dei due precedenti, incontra un limite nel non considerare la legge finanziaria sottostante.

Indici temporali di un flusso di pagamenti: la duration, la duration con struttura piatta

Si vuole calcolare la scadenza media aritmetica del titolo

x/t = {100; 150; 200} / {1; 1,5; 2,5}

Per calcolare la scadenza media:

$$\boxed{d = \frac{100}{450} \cdot 1 + \frac{150}{450} \cdot 1{,}5 + \frac{200}{450} \cdot 2{,}5 = 1{,}8\overline{3}}$$

Indici temporali di un flusso di pagamenti: la duration, la duration con struttura piatta

Consideriamo l'operazione finanziaria **x/t** così come definita in precedenza, nonché la struttura dei tassi a pronti $v(t_0, t_n)$. La "durata media finanziaria", o ***duration***, o d.m.f., ipotizzando l'istante di valutazione l'epoca iniziale ($t_0=0$); di **x/t** è definita come:

$$D = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k \cdot x_k \cdot v(0,t_k)}{\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot v(0,t_k)}$$

La durata media finanziaria o duration, è la media ponderata delle scadenze, utilizza come pesi i valori attuali degli importi corrispondenti alle scadenze predette, pertanto il risultato è una scadenza.

Indici temporali di un flusso di pagamenti: la duration, la duration con struttura piatta

La stessa formula può essere riscritta :

$$D = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k \cdot x_k \cdot [1 + i(0,t_k)]^{-t_k}}{\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot [1 + i(0,t_k)]^{-t_k}}$$

La durata media finanziaria è espressa in unità di tempo, quindi se le generiche epoche sono espresse in anni, anche la duration sarà espressa in anni.
È detta anche duration di primo ordine.

Indici temporali di un flusso di pagamenti: la duration, la duration con struttura piatta

Nell’ipotesi in cui si abbia una struttura dei tassi piatta, quindi tutti i tassi sono uguali e pari ad i, la duration assume la seguente formula:

$$\hat{D} = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k \cdot x_k \cdot (1+i)^{-t_k}}{\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot (1+i)^{-t_k}}$$

Oppure utilizzando il tasso istantaneo:

$$\hat{D} = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k \cdot x_k \cdot e^{-\delta \cdot t_k}}{\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot e^{-\delta \cdot t_k}}$$

Le due equazioni rappresentano
La **flat yield curve duration**

Indici temporali di un flusso di pagamenti: la duration, la duration con struttura piatta

Prima di passare ad alcuni esempi numerici sul calcolo della durata media finanziaria, elenchiamone alcune proprietà notevoli.

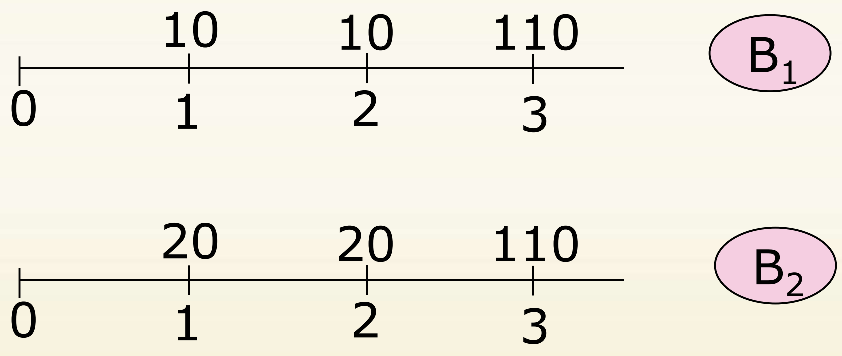
La duration di uno zcb è pari alla sua vita residua e non dipende (se non eccezionalmente) dal tasso di valutazione i (i titoli a duration più elevata sono gli zcb).

Per un titolo con cedole la d.m.f è inferiore alla vita residua e tanto più piccola quanto maggiore è il peso delle cedole rispetto al valore di rimborso.

Se il tasso cresce, il valore attuale diminuisce e anche i pesi, di conseguenza anche la duration.

Indici temporali di un flusso di pagamenti: la duration, la duration con struttura piatta

All'aumentare del valore delle cedole la D diminuisce.
Se consideriamo le seguenti operazioni finanziarie B_1 e B_2 e indichiamo le corrispondenti duration D_1 e D_2



$D_2 < D_1$

Indici temporali di un flusso di pagamenti: la duration, la duration con struttura piatta

Calcolare la duration del seguente titolo:

b_1 = (-99; 5; 5; 105) / (0; 1; 2; 3)
se v(0, 1) = 0,95; v(0, 2) = 0,90 e v(0, 3) = 0,85

$$D = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k \cdot x_k \cdot v(0, t_k)}{\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot v(0, t_k)} \rightarrow$$

$$D = \frac{1 \cdot 5 \cdot v(0{,}1) + 2 \cdot 5 \cdot v(0{,}2) + 3 \cdot 105 \cdot v(0{,}3)}{5 \cdot v(0{,}1) + 5 \cdot v(0{,}2) + 105 \cdot v(0{,}3)} = \frac{281{,}5}{98{,}5} = 2{,}8579$$

Indici temporali di un flusso di pagamenti: la duration, la duration con struttura piatta

Esempio di calcolo della duration con struttura dei tassi piatta. Consideriamo un'obbligazione:

b = (-700; 320; 500)/(0; 1; 3)

con i =*10,5%.*

Calcolare la d.m.f

$$D = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k \cdot x_k \cdot (1+i)^{-t_k}}{\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot (1+i)^{-t_k}}$$

$$D = \frac{1 \cdot 320 \cdot (1+0{,}105)^{-1} + 3 \cdot 500 \cdot (1+0{,}105)^{-3}}{320 \cdot (1+0{,}105)^{-1} + 500 \cdot (1+0{,}105)^{-3}} = \frac{1.401{,}34}{660{,}17} = 2{,}1227$$

La duration come indicatore di sensibilità del valore del titolo

Osserviamo che nella formula della duration il denominatore rappresenta il prezzo del titolo, infatti, è la somma dei valori attuali degli importi del titolo, ad un certo tasso di valutazione. Indichiamolo con *V(i)*:

$$\boxed{V(i) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot (1+i)^{-t_k}}$$

oppure

$$\boxed{V(\delta) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot e^{-\delta \cdot t_k}}$$

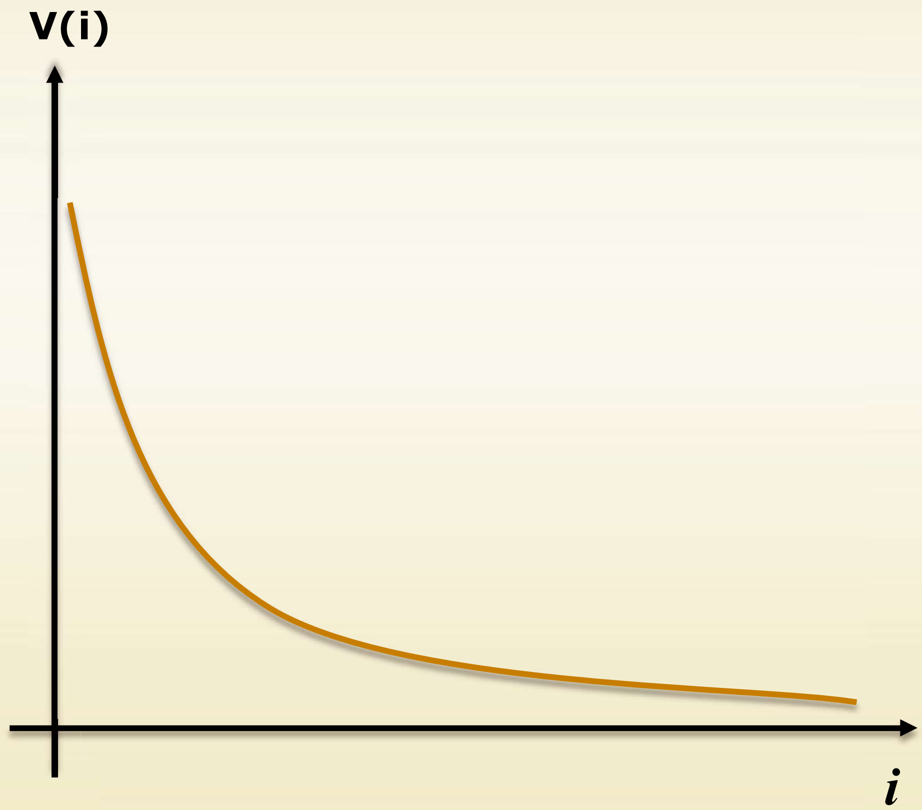
Rappresenta il valore di mercato del titolo.

La duration come indicatore di sensibilità del valore del titolo

Determiniamo l'andamento di V rispetto al tasso i.

$$V(i) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot (1+i)^{-t_k}$$

Se il tasso aumenta, V diminuisce
Se il tasso diminuisce, V aumenta



La duration come indicatore di sensibilità del valore del titolo

Sia l’obbligazione: b = (V; 5; 5; 105)/(0; 1; 2; 3) e un tasso *i=5%.*
Calcoliamo il prezzo del titolo:

$$V(5\%) = \frac{5}{1{,}05} + \frac{5}{1{,}05^2} + \frac{105}{1{,}05^3} = 100$$

Ipotizziamo ora un aumento del tasso, che dal 5% passa al 6%:

$$V(6\%) = \frac{5}{1{,}06} + \frac{5}{1{,}06^2} + \frac{105}{1{,}06^3} = 97{,}33$$

Vediamo che il valore del titolo è diminuito.
Se *i=4%*, V(4%) = 102,78 ossia il prezzo aumenta.

La duration come indicatore di sensibilità del valore del titolo

Consideriamo

$$V(i) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot (1+i)^{-t_k} \qquad\qquad V(\delta) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot e^{-\delta \cdot t_k}$$

Se deriviamo *V* rispetto al tasso il risultato è:

$$\frac{dV}{di} = -\frac{\widehat{D}}{1+i} \cdot V$$

$$\frac{dV}{d\delta} = -\widehat{D} \cdot V$$

La derivata esprime che a seguito di una variazione del tasso, avremo una variazione del prezzo V, la duration si configura come un fattore di proporzionalità che lega la variazione del prezzo a quella del tasso effettivo i o del tasso istantaneo δ

La duration come indicatore di sensibilità del valore del titolo

A parità di valore tra due titoli aventi diversa duration, quello con duration più elevata sarà più volatile, ovvero cambiamenti nei tassi si ripercuoteranno maggiormente sul suo valore.

La duration è una misura di rischiosità del titolo (o di sensibilità del valore del titolo)

La duration come indicatore di sensibilità del valore del titolo

Esempio.
Consideriamo due obbligazioni b_1 e b_2 che hanno prezzo e duration pari a:

$V_1 = 100 \longrightarrow D_1 = 2$

$V_2 = 100 \longrightarrow D_2 = 3$

$\boxed{i = 5\%}$

Ipotizziamo un aumento del tasso: $i' = 6\%$

$$\Delta V = -\frac{\widehat{D}}{1+i} \cdot V \cdot \Delta i \qquad \Delta i = 1\%$$

$$\Delta V_1 = -\frac{2}{1+0{,}05} \cdot 100 \cdot 0{,}01 = -1{,}905$$

$$\Delta V_2 = -\frac{3}{1+0{,}05} \cdot 100 \cdot 0{,}01 = -2{,}857$$

La duration come indicatore di sensibilità del valore del titolo

$$V_1(6\%) = V_1(5\%) + \Delta V_1 = 100 + (-1{,}905) = 98{,}095$$

$$V_2(6\%) = V_2(5\%) + \Delta V_2 = 100 + (-2{,}857) = 97{,}143$$

Il titolo con duration maggiore ha subito una variazione più alta (a parità di prezzo).

La duration come indicatore di sensibilità del valore del titolo

Esempio.
Un titolo obbligazionario possiede duration pari a 4,1; quota sul mercato 102,1 ed il tasso $i(0,t)$ è riassunto da una struttura piatta con $i(0,t) = i = 0{,}045$. Calcolare la variazione del prezzo a seguito della variazione negativa di un punto percentuale del tasso.

$$V = V(i)$$

$$\Delta V = -\frac{\widehat{D}}{1+i} \cdot V \cdot \Delta i$$

$$\Delta V = -\frac{4{,}1}{1+0{,}045} \cdot 102{,}1 \cdot (-0{,}01) = +4{,}0058$$

$$V' = V + \Delta V = 102{,}1 + 4{,}0058 = 106{,}1058$$

Duration e dispersione di portafogli

Nell’attuazione di una strategia di portafoglio composto da obbligazioni, è molto utile osservare il comportamento della “duration di secondo ordine”, così definita:

$$D^{(2)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k^2 \cdot x_k \cdot v(0,t_k)}{\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot v(0,t_k)}$$

La duration di secondo ordine è, quindi, definita come quella “semplice” (di primo ordine), con la sostanziale differenza che al numeratore troviamo i quadrati delle scadenze.

Duration e dispersione di portafogli

Oppure utilizzando una struttura dei tassi piatta:

$$D^{(2)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k^2 \cdot x_k \cdot (1+i)^{-t_k}}{\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot (1+i)^{-t_k}}$$

$$D^{(2)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k^2 \cdot x_k \cdot e^{-\delta \cdot t_k}}{\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot e^{-\delta \cdot t_k}}$$

Duration e dispersione di portafogli

La duration di 2° ordine è una *misura di dispersione temporale* del flusso x rispetto a t.

Nel caso di un solo valore $x_k \neq 0$ la duration di 2° ordine coinciderebbe col quadrato della scadenza. L'approfondimento dell'interpretazione di questo indice avverrà più avanti.

Duration e dispersione di portafogli

Esempio.
Calcolare la duration di secondo ordine (dispersione) del seguente titolo:

b_1 = (-99; 5; 5; 105) / (0; 1; 2; 3)

se v(0; 1) = 0,95; v(0; 2) = 0,90 e v(0; 3) = 0,85

$$D^{(2)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k^2 \cdot x_k \cdot (1+i)^{-t_k}}{\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot (1+i)^{-t_k}}$$

$$D^{(2)} = \frac{1 \cdot 5 \cdot v(0{,}1) + 4 \cdot 5 \cdot v(0{,}2) + 9 \cdot 105 \cdot v(0{,}3)}{5 \cdot v(0{,}1) + 5 \cdot v(0{,}2) + 105 \cdot v(0{,}3)} = \frac{826}{98{,}5} = 8{,}3858$$

Indici di variabilità di un flusso di pagamenti

In un mercato in cui la struttura dei tassi è piatta al livello *i*, il prezzo di un titolo

$$x/t = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \,/\, \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$$

oltre che dalle caratteristiche del titolo e dal tempo t, dipende dal parametro *i*. Assumendo che x/t non abbia pagamenti negativi, al tempo t=0 la funzione valore

$$V(i) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot (1+i)^{-t_k} \qquad V(\delta) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot e^{-\delta \cdot t_k}$$

può essere considerata come funzione di *i*, oppure del tasso istantaneo δ.

Indici di variabilità di un flusso di pagamenti

Ipotizzando che il mercato evolve per strutture piatte, ossia successivamente ad un tempo t la struttura cambia livello rimanendo sempre piatta. Vogliamo studiare i prezzi $V(i)$ oppure $V(\delta)$ ed altri indici ad essi collegati. Innanzitutto valgono le seguenti condizioni:

$$\boxed{V(i) > 0 \qquad V(0) = \sum_{k=1}^{n} x_k \qquad \lim_{i \to \infty} V(i) = 0}$$

$$\boxed{V(\delta) > 0 \qquad V(0) = \sum_{k=1}^{n} x_k \qquad \lim_{i \to \infty} V(\delta) = 0}$$

Indici di variabilità di un flusso di pagamenti

Scriviamo ora le derivate prima e seconda rispetto alle variabili *i* e δ:

$$V'(i) = \sum_{k=1}^{n} \left(-x_k \cdot (1+\mathrm{i})^{-t_k} \cdot \frac{t_k}{1+i} \right)$$

$$V''(i) = \sum_{k=1}^{n} \left(x_k \cdot (1+i)^{-t_k} \cdot \frac{t_k^2}{(1+i)^2} + x_k \cdot (1+i)^{-t_k} \cdot \frac{t_k}{(1+i)^2} \right)$$

$$V'(\delta) = -\sum_{k=1}^{n} t_k \cdot x_k \cdot e^{-\delta \cdot t_k}$$

$$V''(\delta) = \sum_{k=1}^{n} t_k^2 \cdot x_k \cdot e^{-\delta \cdot t_k}$$

Indici di variabilità di un flusso di pagamenti

Attraverso la derivata del prezzo ricaviamo i principali indici di variabilità rispetto alle variabili *i* e δ. La variazione relativa (o **semielasticità**) è definita dal rapporto tra la derivata prima del prezzo ed il prezzo stesso:

$$\boxed{\frac{V'(i)}{V(i)}} \qquad \boxed{\frac{V'(\delta)}{V(\delta)}}$$

→ **derivata logaritmica** del prezzo *V*.

Indici di variabilità di un flusso di pagamenti

La *variazione relativa* si può interpretare quindi come la misura della rapidità di variazione per unità di capitale. Effettuando alcuni semplici passaggi algebrici, troviamo il legame tra la semielasticità e la duration del titolo:

$$\frac{V'(i)}{V(i)} = -\frac{1}{1+i}\widehat{D}$$

$$\frac{V'(\delta)}{V(\delta)} = -\widehat{D}$$

È detta anche MODIFIED DURATION

L'**elasticità** è definita come prodotto tra la semielasticità e la variabile *i* (o δ):

$$i \cdot \frac{V'(i)}{V(i)}$$

$$\delta \cdot \frac{V'(\delta)}{V(\delta)}$$

Indici di variabilità di un flusso di pagamenti

Anche per l'elasticità, effettuando alcuni semplici passaggi algebrici, troviamo il legame con la duration del titolo:

$$i \cdot \frac{V'(i)}{V(i)} = -\frac{i}{1+i} \cdot \hat{D}$$

$$\delta \cdot \frac{V'(\delta)}{V(\delta)} = -\delta \cdot \hat{D}$$

La **convexity** (o convessità semplice) è definita come rapporto tra la derivata seconda della funzione prezzo e la funzione stessa:

$$\frac{V''(i)}{V(i)} \qquad \frac{V''(\delta)}{V(\delta)}$$

E' una misura della convessità per unità di capitale.

Indici di variabilità di un flusso di pagamenti

Per la convexity, effettuando alcuni semplici passaggi algebrici, troviamo il legame con le duration del primo e del secondo ordine del titolo:

$$\frac{V''(i)}{V(i)} = \frac{1}{(1+i)^2} \cdot \left[\widehat{D}^{(2)} + \widehat{D}\right]$$

$$\frac{V''(\delta)}{V(\delta)} = \widehat{D}^{(2)}$$

Osserviamo che la convexity funzione dell'intensità δ è esattamente pari alla duration di secondo ordine.

La **convessità relativa** è definita come rapporto tra la derivata seconda della funzione prezzo e la derivata prima della stessa:

$$\frac{V''(i)}{V'(i)} \qquad \frac{V''(\delta)}{V'(\delta)}$$

Indici di variabilità di un flusso di pagamenti

Questo indice, detto anche **volatility convexity**, misura la convessità del prezzo rispetto all'unità di variazione del prezzo. Effettuando alcuni semplici passaggi algebrici, troviamo il legame della convessità relativa con le duration del primo e del secondo ordine del titolo:

$$\frac{V''(i)}{V'(i)} = -\frac{1}{1+i} \cdot \left(\frac{\widehat{D}^{(2)}}{\widehat{D}} + 1 \right)$$

$$\frac{V''(\delta)}{V'(\delta)} = -\frac{\widehat{D}^{(2)}}{\widehat{D}}$$

Osserviamo che la convessità relativa, funzione dell'intensità δ, è esattamente pari al rapporto tra la duration di secondo ordine e quella di primo ordine, col segno opposto.

Indici di variabilità di un flusso di pagamenti

Come esempio consideriamo l'obbligazione (*t* in anni):

$$x/t = \{3;\ 3;\ 3;\ 3;\ 103\} \ / \ \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$$

in un mercato in cui la struttura dei tassi è piatta al tasso $i=3\%$ (essendo i = I/VN, il prezzo è $V(i)=100$).

L'intensità di rendimento è

$$\delta = \log(1{,}03) = 0{,}02956$$

Il valore della duration di primo ordine in $t=0$:

$$D = 4{,}717$$

Il calcolo della duration del secondo ordine porta al valore $D^{(2)}=23{,}028$.

Calcoliamo la semielasticità:

$$\frac{V'(i)}{V(i)} = -\frac{1}{1{,}03}\cdot 4{,}717 = -4{,}58 \qquad \frac{V'(\delta)}{V(\delta)} = -4{,}717$$

Indici di variabilità di un flusso di pagamenti

Elasticità:

$$i \cdot \frac{V'(i)}{V(i)} = -0{,}03 \cdot \frac{1}{1{,}03} \cdot 4{,}717 = -0{,}137$$

$$\delta \cdot \frac{V'(\delta)}{V(\delta)} = -0{,}02956 \cdot 4{,}717 = -0{,}139$$

Convexity:

$$\frac{V''(i)}{V(i)} = \frac{1}{1{,}03^2} \cdot (23{,}028 + 4{,}717) = 26{,}152 \qquad \frac{V''(\delta)}{V(\delta)} = 23{,}028$$

Convessità relativa:

$$\frac{V''(i)}{V'(i)} = -\frac{1}{1{,}03} \cdot \left(\frac{23{,}028}{4{,}717} + 1\right) = -5{,}711 \qquad \frac{V''(\delta)}{V'(\delta)} = -\frac{23{,}028}{4{,}717} = -4{,}882$$

Appendice: il caso di rendite a rate costanti

Affrontiamo ora il caso di una rendita ***r*** immediata posticipata costituita da *n* rate *R* annue. Per semplicità poniamo *t=0*. In questo caso si ha:

$$x_k = R$$
$$t_k = k$$

e supponendo che la struttura dei tassi sia piatta, la duration è:

$$D(0,\mathrm{r}) = \frac{\sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} k \cdot (1+i)^{-k}}{\sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} (1+i)^{-k}}$$

(la rata *R*, essendo costante, può essere portata fuori dai segni di sommatoria, e si semplifica sia al numeratore che al denominatore, quindi la duration non dipende dall'importo della rata).

Appendice : il caso di rendite a rate costanti

Effettuando alcuni passaggi algebrici si giunge ad un'espressione semplice della duration, in termini del fattore di sconto *v* o del tasso *i*:

$$D(0,\mathrm{r}) = \frac{1}{1-v} - \frac{n \cdot v^n}{1-v^n}$$

$$D(0,\mathrm{r}) = \frac{1+i}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1}$$

Si possono così ottenere importanti relazioni tra la duration e il tasso e la durata n della rendita:

All'aumentare del tasso di valutazione (*i*) la duration decresce.

All'aumentare del numero delle rate (*n*) la duration cresce.

Appendice : Il caso di rendite a rate costanti

La crescita della duration all'aumentare della durata ha però un limite: essendo

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{(1+i)^n - 1} = 0$$

la duration tende al valore limite (1+i)/i. In altre parole il grafico della duration presenta un asintoto orizzontale y=(1+i)/i che è interpretabile come la duration della rendita perpetua.
Ad esempio la duration di una rendita immediata posticipata annua costituita da 5 rate e valutata al tasso *i=6%* è:

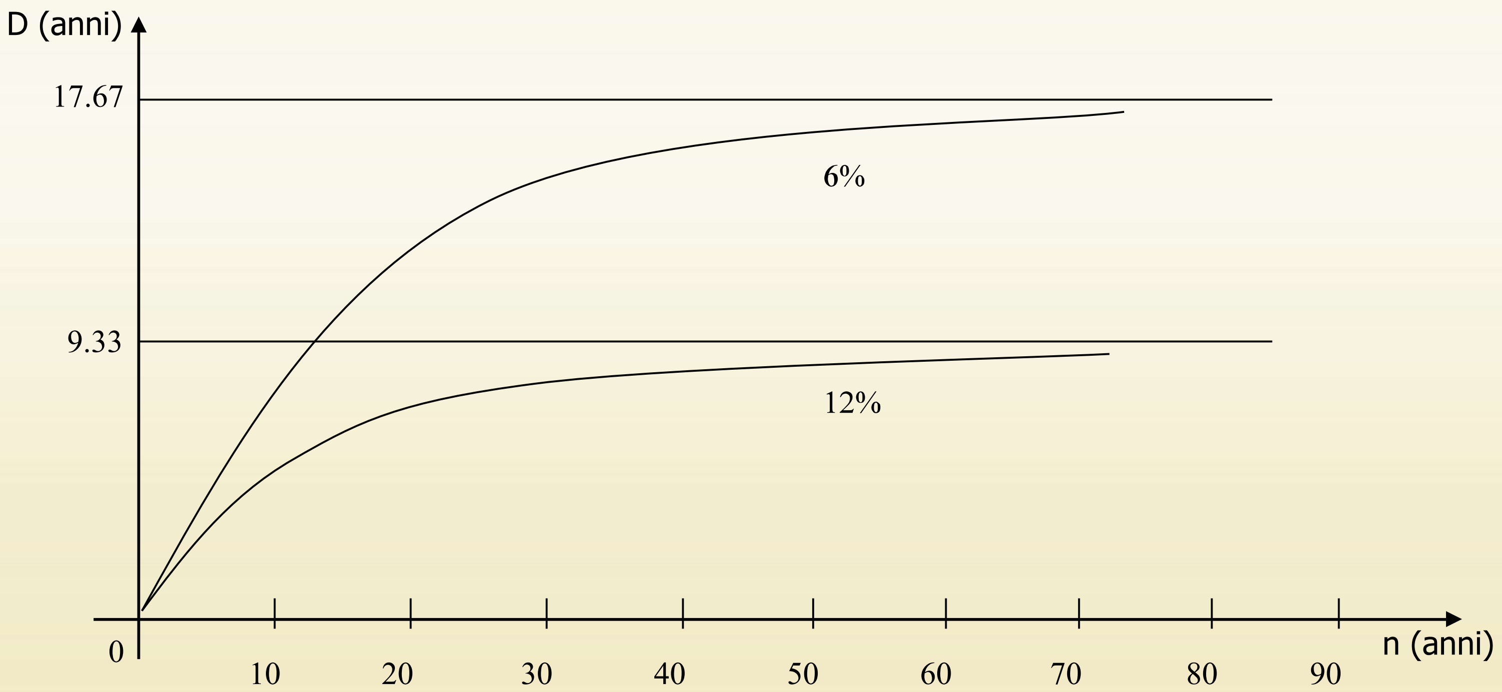
$D(0,\mathbf{r}) = 1{,}06/0{,}06 - 5/(1{,}06^5-1) = 17{,}6667 - 14{,}7830 = 2{,}8837$

Ora cambiamo i valori di *n* e *i*, ed osserviamo le variazioni della duration:

n=12 *i=6%* D(0,r) = 5,8113 se *n* cresce la duration aumenta
n=5 *i=12%* D(0,r) = 2,7746 se *i* cresce la duration diminuisce

Appendice : Il caso di rendite a rate costanti

Rappresentiamo ora graficamente l'andamento della duration nei due casi appena visti nell'esempio, con *i=6%* e *i=12%*:



Conclusioni

- In questa sezione abbiamo introdotto gli indici temporali per valutare i flussi di pagamenti, ed in particolare le obbligazioni, nel loro aspetto temporale;

- Abbiamo considerato sia indici grossolani che indici più complessi, che tengano conto della struttura dei tassi e della distribuzione nel tempo degli importi;

- Abbiamo scoperto, tramite gli indici di variabilità, che non tutti i titoli sono sensibili allo stesso modo ad una variazione della struttura piatta dei tassi;

- Abbiamo osservato che i titoli che presentano una duration maggiore sono più sensibili alle oscillazioni del tasso di mercato.

INDICATORI DI SENSIBILITA'

Sono indici quantitativi che esprimono la variazione del prezzo al variare del tasso o dell'intensità

CONVESSITA' RELATIVA

$$\frac{V''(i)}{V'(i)}$$

SEMIELASTICITA'

$$\frac{V'(i)}{V(i)}$$

ELASTICITA'

$$i \cdot \frac{V'(i)}{V(i)}$$

DURATION DI PRIMO ORDINE

$$\frac{dV}{di} = -\frac{\widehat{D}}{1+i} \cdot V$$

CONVEXITY

$$\frac{V''(i)}{V(i)}$$

L'IMMUNIZZAZIONE FINANZIARIA: GESTIONE DEL RISCHIO TASSO

Argomenti

- Obiettivi.
- Introduzione.
- Il portafoglio titoli.
- Cenni di immunizzazione classica.
- Ipotesi basilare dell’immunizzazione classica.
- Esercizi.

Obiettivi

Gli *obiettivi* di questo modulo sono:

- conoscere il concetto di portafoglio titoli;
- comprendere il significato di immunizzazione finanziaria;
- saper interpretare geometricamente le tre condizioni che servono per immunizzare un portafoglio;
- riuscire a risolvere un problema di calcolo delle quote di titoli che immunizzano un portafoglio con una sola o più uscite.

Introduzione

L’immunizzazione finanziaria è una tecnica di gestione del portafoglio.

Esempio: un’assicurazione stima di dover sostenere un’uscita ad una determinata epoca; il risk manager può acquistare dei titoli con opportune quote per garantirsi la disponibilità finanziaria alla data prevista.

L’immunizzazione finanziaria classica è una situazione teorica, si basa su determinate ipotesi.

Introdurremo dapprima il concetto di portafoglio titoli; in seguito vedremo i vincoli da rispettare per costruire un portafoglio immunizzato, dandone anche un’interpretazione geometrica.

Il portafoglio titoli

Introduciamo il concetto di portafoglio titoli.
Definiamo "**portafoglio titoli**" un insieme **s** di titoli, ciascuno posseduto in base ad una quota di composizione π_j .
Indichiamo:

s $\longrightarrow$ **numero di titoli nel portafoglio**

j $\longrightarrow$ **il generico titolo**

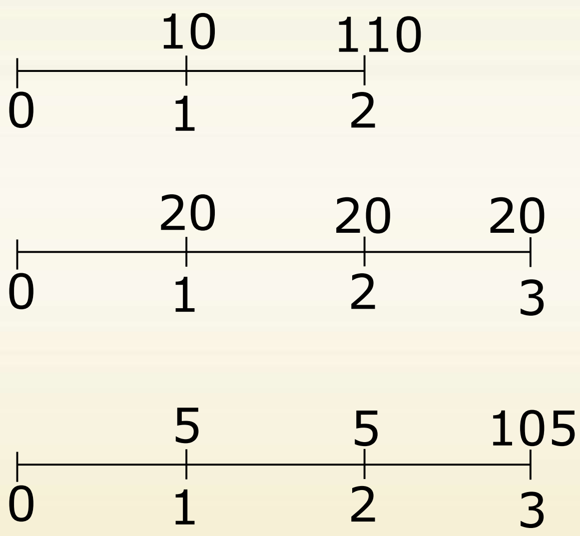
${}^{(j)}x_k$ $\longrightarrow$ **importo pagato (offerto) dal j-esimo titolo all'epoca t_k**

π_j $\longrightarrow$ **quota di detenzione del j-esimo titolo**

Il portafoglio titoli

Vediamo subito un esempio:
3 titoli

$t_0 = 0; t_1 = 1; t_2 = 2; t_3 = 3$



J=1

J=2

J=3

${}^{(2)}x_3 = 20$ ${}^{(1)}x_1 = 10$ ${}^{(1)}x_2 = 110$ ${}^{(3)}x_2 = 5$

Il portafoglio titoli

Esempio:
dati i seguenti titoli e le relative quote di composizione calcolare l'entrata complessiva del portafoglio all'epoca t_k

	0	1	2	3		
		100			J=1	$\pi_1 = 2$
		5	105		J=2	$\pi_2 = 1$
		10	10	110	J=3	$\pi_3 = 1/2$

Il portafoglio titoli

La somma degli importi relativi ai singoli titoli ponderati con le quote di composizione e riferiti all'epoca *k* sarà indicata con Θ_k; in formule:

$$\boxed{\theta_k = \sum_{j=1}^{s} \pi_j \cdot {}^{(j)}x_k}$$

Tornando al nostro esempio:

$$\theta_1 = \sum_{j=1}^{3} \pi_j \cdot {}^{(j)}x_1 = \pi_1 \cdot {}^{(1)}x_1 + \pi_2 \cdot {}^{(2)}x_1 + \pi_3 \cdot {}^{(3)}x_1 =$$

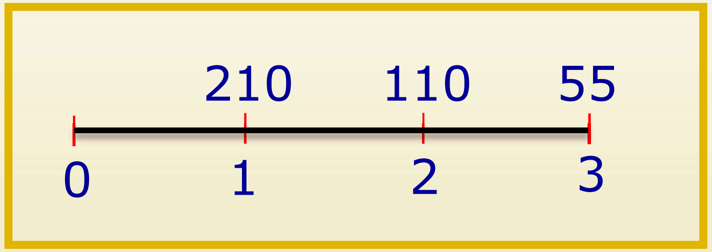
$$= 2 \cdot 100 + 1 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 10 = 210$$

Il portafoglio titoli

$$\theta_2 = 2 \cdot 0 + 1 \cdot 105 + \frac{1}{2} \cdot 10 = 110$$

$$\theta_3 = 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 110 = 55$$

Il portafoglio è descritto dal seguente scadenzario:



Il portafoglio titoli

I concetti visti prima possono facilmente essere estesi a un portafoglio.
Determiniamo la duration di primo ordine del portafoglio appena costruito, ipotizzando una struttura dei tassi piatta:

$$D = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k \cdot x_k \cdot (1+i)^{-t_k}}{\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot (1+i)^{-t_k}}$$

$$D = \frac{1 \cdot 210 \cdot (1+i)^{-1} + 2 \cdot 110 \cdot (1+i)^{-2} + 3 \cdot 55 \cdot (1+i)^{-3}}{210 \cdot (1+i)^{-1} + 110 \cdot (1+i)^{-2} + 55 \cdot (1+i)^{-3}}$$

Cenni di immunizzazione classica

Introduciamo ora l'**immunizzazione finanziaria classica** quale tecnica di gestione del portafoglio; lavorando sotto certe ipotesi dobbiamo costruire un portafoglio in entrata che "copra", immunizzi, un portafoglio in uscita.
Immunizzare significa **garantire disponibilità finanziaria in un certo periodo**.

Per prima cosa consideriamo una serie di uscite non nulle:

$$(u_1, u_2, \dots, u_k, \dots, u_n)/(t_1, t_2, \dots, t_k, \dots, t_n)$$

Consideriamo anche un portafoglio di entrate:

$$(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k, \dots, \theta_m)/(t_1, t_2, \dots, t_k, \dots, t_m)$$

Cenni di immunizzazione classica

Ricordando che

$$\theta_k = \sum_{j=1}^{s} \pi_j \cdot {}^{(j)}x_k$$

si deve costruire un portafoglio scegliendo le quote di composizione dei titoli $\pi_j \in \mathbb{R}$, in modo che valgano determinate condizioni.
Inoltre la struttura dei tassi d'interesse deve essere esprimibile tramite un tasso uniperiodale effettivo pari ad i o ad una intensità istantanea costante pari a δ.

Cenni di immunizzazione classica

In queste condizioni è possibile dimostrare che se si scelgono le quote di composizione dei titoli del portafoglio Θ in modo che siano rispettate contemporaneamente le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} V(0,\theta) = V(0,u) \\ D(0,\theta) = D(0,u) \\ D^{(2)}(0,\theta) \geq D^{(2)}(0,u) \end{cases}$$

allora il valore netto del portafoglio, a seguito di una variazione dei tassi d'interesse, sarà sempre non negativo, a patto che la variazione della curva dei tassi avvenga per "*shift additivo*" .

Cenni di immunizzazione classica

Riscriviamo le tre condizioni:

$$\sum_k \theta_k \cdot (1+i)^{-t_k} = \sum_k u_k \cdot (1+i)^{-t_k}$$

Vincolo di bilancio

$$\frac{\sum_k t_k \cdot \theta_k \cdot (1+i)^{-t_k}}{\sum_k \theta_k \cdot (1+i)^{-t_k}} = \frac{\sum_k t_k \cdot u_k \cdot (1+i)^{-t_k}}{\sum_k u_k \cdot (1+i)^{-t_k}}$$

Vincolo di duration

$$\frac{\sum_k {t_k}^2 \cdot \theta_k \cdot (1+i)^{-t_k}}{\sum_k \theta_k \cdot (1+i)^{-t_k}} \geq \frac{\sum_k {t_k}^2 \cdot u_k \cdot (1+i)^{-t_k}}{\sum_k u_k \cdot (1+i)^{-t_k}}$$

Vincolo di dispersione

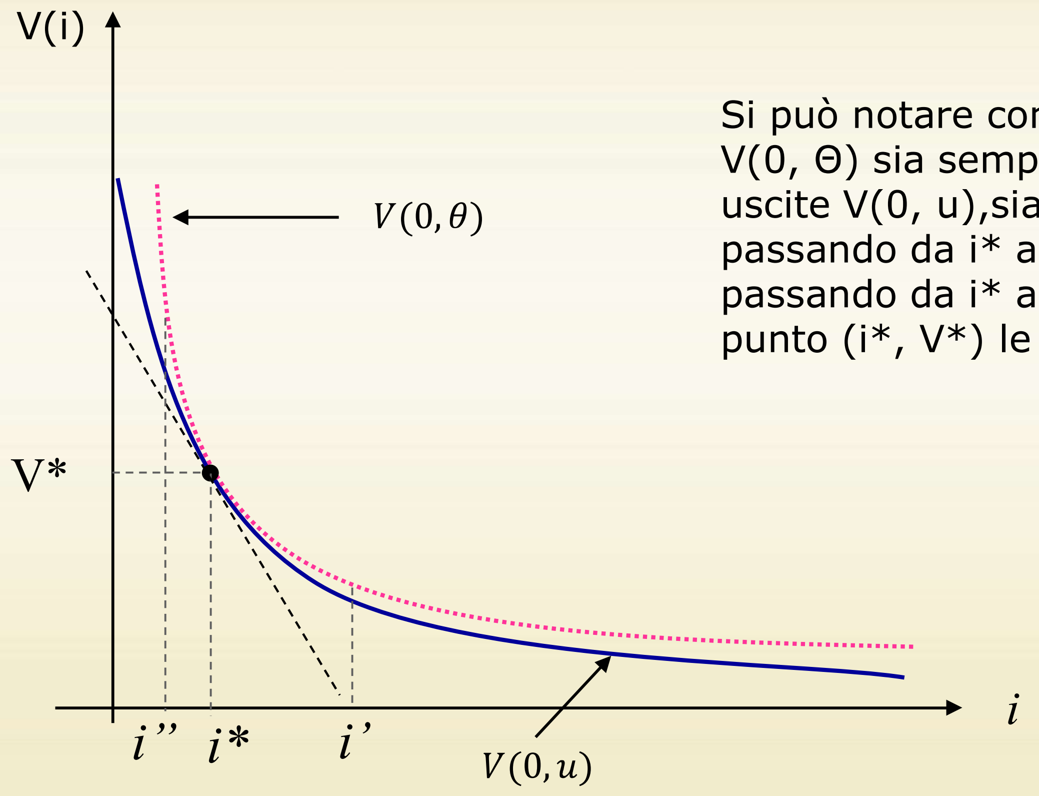
Cenni di immunizzazione classica

Analizzando le condizioni riscontriamo che la prima da rispettare è il **vincolo di bilancio**, ovvero il valore attuale delle entrate deve essere uguale al valore attuale delle uscite; la seconda è il **vincolo di duration**, la duration delle entrate deve essere uguale alla duration delle uscite; la terza è il **vincolo di dispersione** e impone che la duration di secondo ordine delle entrate sia maggiore o uguale a quella delle uscite.

un portafoglio che rispetti questi tre vincoli è un portafoglio immunizzato

Cenni di immunizzazione classica

Illustriamo le tre condizioni geometricamente.



Si può notare come la curva delle entrate V(0, Θ) sia sempre sopra la curva delle uscite V(0, u),sia se i tassi aumentano passando da i* a i′, o diminuiscano passando da i* a i″. Si nota inoltre che nel punto (i*, V*) le due curve sono tangenti.

Cenni di immunizzazione classica

Ipotizziamo una struttura di tassi piatta con un tasso effettivo pari a i.
Ipotizziamo ancora di comprare quote del portafoglio in entrata in modo opportuno.
Come si nota dal grafico, in corrispondenza di i^* , il valore attuale delle uscite è uguale al valore attuale delle entrate; inoltre, in corrispondenza di i^* le due curve sono tangenti.
Si hanno le seguenti proprietà:

$$V(0,\theta) = V(0,u) = V*$$

$$\frac{dV(0,\theta)}{di} = \frac{dV(0,u)}{di} \longrightarrow$$

Le due curve sono tangenti in i*: hanno la stessa derivata prima in quel punto.

Cenni di immunizzazione classica

Si vede ancora dal grafico che la curva delle entrate sta sopra la curva delle uscite, questo significa che $V(0,\theta)$ è più convessa di $V(0,u)$, vale a dire:

$$\frac{d^2V(0,\theta)}{di^2} \geq \frac{d^2V(0,u)}{di^2}$$

se $i \uparrow \quad \theta > u$

se $i \downarrow \quad \theta > u$

Osservando il grafico, si evince che ipotizzando un aumento dei tassi da i* a i' il valore del portafoglio delle entrate sarà comunque maggiore del valore del portafoglio in uscita. Simmetricamente, varrà lo stesso se il tasso diminuisce da i* a i''.

Cenni di immunizzazione classica

Riepilogando:

$$V(0,\theta) = V(0,u)$$

Rappresenta il vincolo di bilancio

$$\frac{dV(0,\theta)}{di} = \frac{dV(0,u)}{di} \Rightarrow D(0,\theta) = D(0,u)$$

Rappresenta il vincolo di duration

$$\frac{d^2V(0,\theta)}{di^2} \geq \frac{d^2V(0,u)}{di^2} \Rightarrow D^{(2)}(0,\theta) \geq D^{(2)}(0,u)$$

Rappresenta il vincolo di dispersione

Cenni di immunizzazione classica

Nella maggior parte dei casi, il rispetto delle tre condizioni imposte non esaurisce i gradi di libertà del problema; in effetti possiamo avere un numero di variabili decisionali maggiore di 3.
Si può procedere imponendo delle condizioni aggiuntive, ad esempio impostando un problema di **ottimo vincolato**.

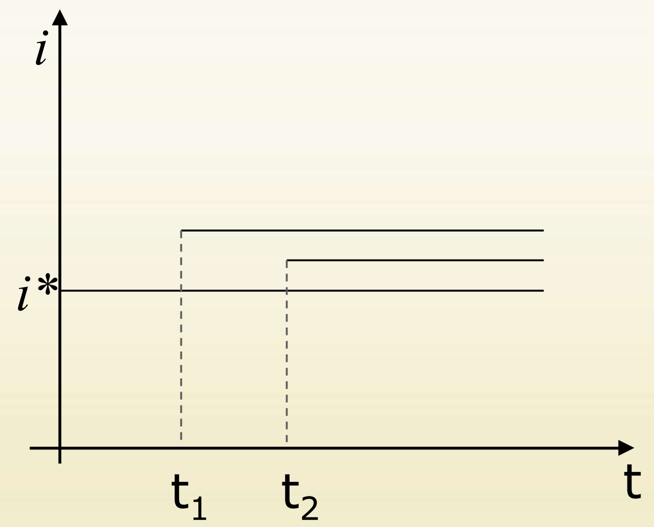
Ipotizzando che gli s titoli abbiano un prezzo P_j:

$$\begin{cases} \min \sum_j \pi_j P_j \\ V(0,\theta) = V(0,u) \\ D(0,\theta) = D(0,u) \\ D^{(2)}(0,\theta) \geq D^{(2)}(0,u) \end{cases}$$

Individua quote di detenzione dei singoli titoli che minimizzano il prezzo del portafoglio in entrata e rispettano i tre vincoli. In altri termini, tra tutti gli infiniti portafogli Θ che rispettano i vincoli, individua quello a costo minimo.

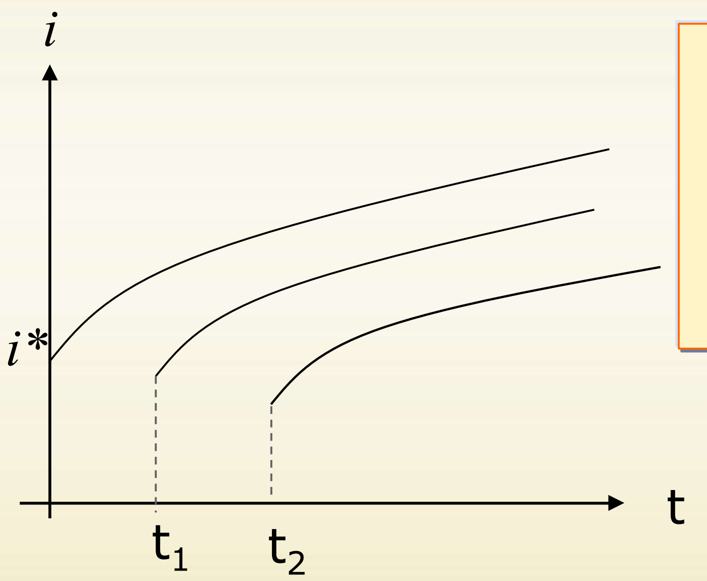
Ipotesi basilare dell'immunizzazione classica

L'immunizzazione finanziaria classica si basa sull'ipotesi fondamentale che la struttura dei tassi evolve solo per **shift additivi** , questo significa che quando cambiano i tassi non cambia la struttura.
Vediamo graficamente alcuni esempi.



Struttura dei tassi piatta, come si nota dal grafico i tassi variano, ma la struttura rimane la stessa.

Ipotesi basilare dell'immunizzazione classica



Non abbiamo più tassi piatti. I tassi sono variabili, ma la struttura rimane la stessa, le curve si muovono parallelamente.

Ipotesi basilare dell'immunizzazione classica

Esempio di shift non additivi. Quando la curva dei tassi si sposta per shift non additivi potrebbe non reggere la condizione di convessità.

Esempi

Vediamo ora dei casi pratici per la costruzione di un portafoglio immunizzato.

Esempio 1.
Calcolare le quote dei titoli z_1 e z_2 che immunizzano un portafoglio composto da un'uscita L = 500 che si verifica in t = 2 essendo z_1 e z_2 i seguenti:

$z_1 = (-95;\ 100)\ /\ (0;\ 1)$

$z_2 = (-96;\ 110)\ /\ (0;\ 3)$

ed essendo il tasso di mercato costante e pari al *5%*.
Partendo dai prezzi dei due titoli calcolare anche il costo del portafoglio di attività.

Soluzione.
Dobbiamo costruire i vincoli e fare in modo che siano rispettati contemporaneamente, procediamo con ordine e impostiamo il vincolo di bilancio.

Una precisazione riguarda il vincolo di dispersione: quando l'uscita prevista è unica, come in questo caso, per il teorema di **Fisher–Weil**, un portafoglio è immunizzato se rispetta solo il vincolo di bilancio e il vincolo di duration.
Imposteremo come segue il problema:

$$\begin{cases} V(0,\theta) = V(0,u) \\ D(0,\theta) = D(0,u) \end{cases}$$

Teorema di Fisher – Weil

Ci poniamo in un'ottica in cui l'evoluzione dei tassi avviene per shift additivi. Costruiamo il vincolo di bilancio.

Indichiamo con α la quota del primo titolo z_1 e con β la quota del titolo z_2.

<ins>Prima condizione:</ins> VINCOLO DI BILANCIO.
Il valore attuale delle entrate è uguale al valore attuale delle uscite.

$$V(0,\theta) = V(0,u) \Leftrightarrow$$
$$\sum_k \theta_k \cdot (1+i)^{-t_k} = \sum_k u_k \cdot (1+i)^{-t_k}$$

$$V(0,\theta) = \alpha \cdot 100 \cdot (1+0{,}05)^{-1} + \beta \cdot 110 \cdot (1+0{,}05)^{-3} =$$
$$= \alpha \cdot 95{,}23810 + \beta \cdot 95{,}02214$$
$$V(0,u) = 500 \cdot (1+0{,}05)^{-2} = 453{,}51474$$

Vincolo di bilancio:

$$\boxed{\alpha \cdot 95{,}23810 + \beta \cdot 95{,}02214 = 453{,}51474}$$

Seconda condizione: VINCOLO DI DURATION.

$$D(0,\theta) = D(0,u)$$

$$\frac{\sum_k t_k \cdot \theta_k \cdot (1+i)^{-t_k}}{\sum_k \theta_k \cdot (1+i)^{-t_k}} = \frac{\sum_k t_k \cdot u_k \cdot (1+i)^{-t_k}}{\sum_k u_k \cdot (1+i)^{-t_k}}$$

Dal vincolo di bilancio sappiamo che:

$$\sum_k \theta_k \cdot (1+i)^{-t_k} = 453{,}51474$$ → sostituirlo al denominatore

$$D(0,\theta) = \frac{1 \cdot 100\alpha \cdot 1{,}05^{-1} + 3 \cdot 110\beta \cdot 1{,}05^{-3}}{453{,}51474} =$$

$$= \frac{\alpha \cdot 95{,}23810 + \beta \cdot 285{,}06641}{453{,}51474}$$

$$D(0,u) = 2$$

Vincolo di duration:

$$\frac{\alpha \cdot 95{,}23810 + \beta \cdot 285{,}06641}{453{,}51474} = 2$$

Semplificando:

$$\alpha \cdot 0{,}21000 + \beta \cdot 0{,}62857 = 2$$

Affinché le due condizioni vengano rispettate contemporaneamente dobbiamo metterle a sistema.

Si tratta di un sistema lineare con due incognite.

$$\begin{cases} \alpha \cdot 95{,}23810 + \beta \cdot 95{,}02214 = 453{,}51474 \\ \alpha \cdot 0{,}21000 + \beta \cdot 0{,}62857 = 2 \end{cases}$$

Lo risolviamo per sostituzione.

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{453{,}51474 - \beta \cdot 95{,}02214}{95{,}23810} = 4{,}76191 - \beta \cdot 0{,}99773 \\ \alpha \cdot 0{,}21000 + \beta \cdot 0{,}62857 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 4{,}76191 - \beta \cdot 0{,}99773 \\ (4{,}76191 - \beta \cdot 0{,}99773) \cdot 0{,}21000 + \beta \cdot 0{,}62857 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 4{,}76191 - \beta \cdot 0{,}99773 \\ (1 - \beta \cdot 0{,}20952) + \beta \cdot 0{,}62857 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta \cdot 0{,}41905 = 1 \rightarrow \beta = 2{,}38636 \\ \alpha = 4{,}76191 - (2{,}38636 \cdot 0{,}99773) = 2{,}38095 \end{cases}$$

Otteniamo quindi le seguenti quote dei due titoli:

$$\boxed{\begin{array}{c}\alpha = 2{,}38095 \\ \beta = 2{,}38636\end{array}}$$

Ora dobbiamo trovare il costo del portafoglio:
Z_1 costa 95, e ne compriamo 2,38095; z_2 costa 96 e ne compriamo 2,38636;
Il costo del portafoglio sarà:

$$C = \alpha \cdot 95 + \beta \cdot 96 =$$
$$= 2{,}38095 \cdot 95 + 2{,}38636 \cdot 96 = 455{,}2814$$

Esempio 2.

Calcolare le quote dei titoli z_1 e z_2 che immunizzano un portafoglio composto da un'uscita L = 2.000 che si verifica in $t = 2$ essendo z_1 e z_2 i seguenti:

$z_1 = (-101;\ 110)\ /\ (0;\ 1)$

$z_2 = (-100{,}1;\ 10;\ 10;\ 110)\ /\ (0;\ 1;\ 2;\ 3)$

ed essendo il tasso di mercato costante e pari al *9%*.

Soluzione.

Anche in questo caso applichiamo il teorema di Fisher – Weil

Impostiamo il vincolo di bilancio

$$\sum_k \theta_k \cdot (1+i)^{-t_k} = \sum_k u_k \cdot (1+i)^{-t_k}$$

$$V(0,\theta) = \alpha \cdot 110 \cdot (1{,}09)^{-1} + \beta \cdot 10 \cdot (1{,}09)^{-1} + \beta \cdot 10 \cdot (1{,}09)^{-2} + \beta \cdot 110 \cdot (1{,}09)^{-3} =$$
$$= \alpha \cdot 100{,}9174 + \beta \cdot 102{,}5313$$

$$V(0,u) = 2.000 \cdot (1+0{,}09)^{-2} = 1.683{,}3500$$

Vincolo di bilancio:

$$\boxed{\alpha \cdot 100{,}9174 + \beta \cdot 102{,}5313 = 1.683{,}3500}$$

Seconda condizione: VINCOLO di DURATION

$$D(0,\theta) = D(0,u)$$

sappiamo che $\sum_k \theta_k \cdot (1+i)^{-t_k} = 1.683{,}3500$

$$D(0,\theta) =$$

$$= \frac{1 \cdot 110\alpha \cdot 1{,}09^{-1} + 1 \cdot 10\beta \cdot 1{,}09^{-1} + 2 \cdot 10\beta \cdot 1{,}09^{-2} + 3 \cdot 110\beta \cdot 1{,}09^{-3}}{1.683{,}3500}$$

$$=$$

$$= \frac{\alpha \cdot 100{,}9174 + \beta \cdot 280{,}8285}{1.683{,}3500}$$

$$D(0,u) = 2$$

VINCOLO di DURATION

$$\frac{\alpha \cdot 100{,}9174 + \beta \cdot 280{,}8285}{1.683{,}3500} = 2$$

Semplifichiamo:

$$\boxed{\alpha \cdot 0{,}0599 + \beta \cdot 0{,}1668 = 2}$$

Mettiamo a sistema le due condizioni e risolviamo per sostituzione.

$$\begin{cases} \alpha \cdot 100{,}9174 + \beta \cdot 102{,}5313 = 1.683{,}3500 \\ \alpha \cdot 0{,}0599 + \beta \cdot 0{,}1668 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{1.683{,}3500 - \beta \cdot 102{,}5313}{100{,}9174} = 16{,}6806 - \beta \cdot 1{,}0160 \\ (16{,}6806 - \beta \cdot 1{,}0160) \cdot 0{,}0599 + \beta \cdot 0{,}1668 = 2 \end{cases}$$

$$1 - \beta \cdot 0{,}0609 + \beta \cdot 0{,}1668 = 2$$

$$\beta \cdot 0{,}1059 = 2 - 1 \rightarrow \beta = 9{,}4413$$

$$\alpha = 16{,}6806 - \beta \cdot 1{,}016 \rightarrow$$

$$\alpha = 16{,}6806 - 9{,}4413 \cdot 1{,}016 = 7{,}0883$$

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha &= 7{,}0883 \\ \beta &= 9{,}4413 \end{aligned}}$$

Abbiamo trovato le quote di composizione dei titoli z_1 e z_2 che immunizzano il portafoglio composto da un'uscita all'epoca due.

Appendice: dimostrazione teorema di Fisher-Weil

- **Teorema. (Fisher-Weil)**
- Supponiamo di avere un importo *L>0* disponibile all'epoca *T>0* ed un flusso di importi non negativi $X = (x_1, \dots, x_n)$ disponibili alle epoche $(t_1, \dots, t_n)$. Data l'intensità istantanea d'interesse $\delta(0,t)$ supponiamo che *L* e *X* abbiano lo stesso valore attuale all'epoca zero rispetto alla struttura data:

$$V_\delta(0,X) = V_\delta(0,L)$$

- Supponiamo inoltre che tra l'epoca *zero* e l'epoca *uno* l'intensità $\delta(0,t)$ subisce uno shift additivo aleatorio γ, ossia:

$$\delta^*(0^+,t) = \delta(0,t) + \gamma \qquad \text{con } 0 < 0^+ < 1$$

- I valori attuali di *L* e *X* calcolati all'epoca 0^+ rispetto alla nuova intensità soddisfano la condizione

$$V_{\delta^*}(0^+, X) \geq V_{\delta^*}(0^+, L)$$

se e solo se *L* e *X* hanno la stessa duration all'epoca zero ossia $D^1_\delta(0, X) = T$.

- Iniziamo la dimostrazione ponendo per semplicità:

$$\delta(0, t) = \delta = \log(1 + i)$$

- Il valore attuale del flusso è dato da:

$$V_\delta(0, X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v^{t_i}$$

dove abbiamo posto $v = (1 + i)^{-1} = e^{-\delta}$.

- Per quanto riguarda l'uscita L abbiamo: $V_{\delta}(0, L) = L \cdot v^{T}$.
- Il vincolo di bilancio può essere riformulato (all'epoca zero) nel modo seguente:

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v^{t_i}}{L \cdot v^{T}} = \frac{1}{L} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v^{t_i - T} = \frac{1}{L} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot r^{T - t_i} = 1$$

con $r = v^{-1} = 1 + i$.

- Per effetto dello shift additivo $\delta^{*} = \delta + \gamma$ avremo:

$$\log(1 + i^{*}) = \log(r^{*}) = \log(1 + i) + \gamma = \log r + \gamma$$

- Perciò:

$$e^{\log r^{*}} = e^{\log r} \cdot e^{\gamma}$$

- Si ottiene finalmente $r^* = r \cdot e^{\gamma}$ ossia $1 + i^* = e^{\gamma} \cdot (1+i)$.

- Il nuovo valore della quantità Z definita prima è:

$$Z^* = \frac{1}{L} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (r \cdot e^{\gamma})^{T-t_i} = Z^*(\gamma)$$

- Perciò diventa una funzione di γ, $Z^* = Z^*(\gamma)$, con $Z^*(0) = Z = 1.$

- Calcoliamo le derivate:

$$\frac{d}{d\gamma} Z^*(\gamma) = \frac{1}{L} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (T - t_i) \cdot (r \cdot e^{\gamma})^{T-t_i}$$

$$\frac{d^2}{d\gamma^2} Z^*(\gamma) = \frac{1}{L} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (T - t_i)^2 \cdot (r \cdot e^{\gamma})^{T-t_i}$$

- La derivata seconda è non negativa per cui la funzione $Z^*(\gamma)$ è convessa.

- Affinché si abbia

$$V_{\delta^*}(0^+, X) \geq V_{\delta^*}(0^+, L)$$

occorre determinare sotto quale condizione sia $Z^*(\gamma) > 1$.

- A questo proposito è sufficiente mostrare che la derivata prima di $Z^*(\gamma)$ si annulla per $\gamma = 0$ (in effetti, tenendo conto della convessità, la funzione $Z^*(\gamma)$ avrebbe quindi un minimo assoluto in $\gamma = 0$).

- La condizione richiesta si scrive:

$$\frac{d}{d\gamma}Z^*(0) = \frac{1}{L} \cdot \overset{i=1}{\overset{n}{\sum}} x_i \cdot (T - t_i) \cdot (r \cdot e^0)^{T-t_i} =$$

$$= \frac{1}{L} \cdot \overset{i=1}{\overset{n}{\sum}} x_i \cdot T \cdot (1+i)^{T-t_i} - \frac{1}{L} \cdot \overset{i=1}{\overset{n}{\sum}} x_i \cdot t_i \cdot (1+i)^{T-t_i} = 0$$

- Ossia:

$$\frac{\overset{i=1}{\overset{n}{\sum}} x_i \cdot T \cdot (1+i)^{-t_i}}{L \cdot (1+i)^{-T}} - \frac{\overset{i=1}{\overset{n}{\sum}} x_i \cdot t_i \cdot (1+i)^{-t_i}}{L \cdot (1+i)^{-T}} = 0$$

- Possiamo riscriverla in virtù del vincolo di bilancio:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot T \cdot (1+i)^{-t_i}}{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (1+i)^{-t_i}} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot t_i \cdot (1+i)^{-t_i}}{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (1+i)^{-t_i}} = 0$$

- Abbiamo ottenuto in questo modo la definizione della duration, ossia :

$$D_{\delta}^{1}(0, X) = T$$

Conclusioni

- Abbiamo introdotto il concetto di portafoglio titoli ed esteso il concetto di duration visto in precedenza, al caso di un portafoglio.
- Abbiamo illustrato il concetto di immunizzazione finanziaria classica, individuato i vincoli da rispettare per immunizzare un portafoglio in uscita, accennando brevemente al caso in cui le variabili siano maggiori rispetto ai vincoli.
- Si è fornita un’interpretazione geometrica dei vincoli di bilancio, di duration, di dispersione.
- Infine sono stati risolti due problemi pratici riguardo la costruzione di un portafoglio immunizzato.

IMMUNIZZAZIONE CLASSICA

$V(0,\theta) = V(0,u)$ → **VINCOLO DI BILANCIO**

$D(0,\theta) = D(0,u)$ → **VINCOLO DI DURATION**

$D^{(2)}(0,\theta) \geq D^{(2)}(0,u)$ → **VINCOLO DI DISPERSIONE**

Le tre condizioni devono essere verificate contemporaneamente

IPOTESI BASILARE DELL'IMMUNIZZAZIONE CLASSICA

La struttura dei tassi evolve solo per shift additivi.

ESERCIZI

Esercizio 1

- Siano date le due attività $z_1,\ z_2$ e l'unica passività L:

$$z_1 = (-99; 105)/(0; 1)$$
$$z_2 = (-190; 225)/(0; 3)$$
$$L = (0; 0; 150; 0)/(0; 1; 2; 3)$$

- Calcolare le quote ed il costo del portafoglio che immunizzano la passività sapendo che il tasso di mercato è il 6%.

- Vincolo di BILANCIO:

$$V(0,\theta) = V(0,u) \Leftrightarrow$$
$$\sum_k \theta_k \cdot (1+i)^{-t_k} = \sum_k u_k \cdot (1+i)^{-t_k}$$

- Composizione portafoglio entrate:

$$\alpha \cdot z_1 + \beta \cdot z_2 \rightarrow (105\alpha; 0; 225\beta)/(1; 2; 3)$$

- Calcolo valori attuali:

$$V(0,\theta) = 105\alpha \cdot 1{,}06^{-1} + 225\beta \cdot 1{,}06^{-3}$$
$$= 99{,}0566\alpha + 188{,}9143\beta$$
$$V(0,u) = 150 \cdot 1{,}06^{-2} = 133{,}4995$$

→ Prima condizione:

$$99{,}0566\alpha + 188{,}9143\beta = 133{,}4995$$

- Vincolo di DURATION

$$\widehat{D}(0,\theta) = \widehat{D}(0,u) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sum_k t_k \cdot \theta_k \cdot (1+i)^{-t_k}}{\sum_k \theta_k \cdot (1+i)^{-t_k}} = \frac{\sum_k t_k \cdot u_k \cdot (1+i)^{-t_k}}{\sum_k u_k \cdot (1+i)^{-t_k}}$$

$$\widehat{D}(0,\theta) = \frac{1 \cdot 105\alpha \cdot 1{,}06^{-1} + 3 \cdot 225\beta \cdot 1{,}06^{-3}}{133{,}4995}$$

- Si ottiene:

$$\widehat{D}(0,\theta) = 0{,}742\alpha + 4{,}2453\beta$$

$$\widehat{D}(0,\theta) = \frac{1 \cdot 105\alpha \cdot 1{,}06^{-1} + 3 \cdot 225\beta \cdot 1{,}06^{-3}}{133{,}4995}$$

- Duration uscita: $\widehat{D}(0,u) = 2$

→ seconda condizione:

$$0{,}7420\alpha + 4{,}2453\beta = 2$$

→Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} 99{,}0566\alpha + 188{,}9143\beta = 133{,}4995 \\ 0{,}7420\alpha + 4{,}2453\beta = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = 0{,}6738 \quad \beta = 0{,}3533$$

→Costo del portafoglio:

$$C = 0{,}6738 \cdot 99 + 0{,}3533 \cdot 190 = 133{,}8332$$

Esercizio 2

- Siano dati i seguenti 3 titoli obbligazionari (i cui prezzi coincidono con i valori teorici):

$$b_1 = (-96{,}01;\ 4;\ 104)/(0;\ 1;\ 2)$$
$$b_2 = (-96{,}85;\ 5;\ 5;\ 105)/(0;\ 1;\ 2;\ 3)$$
$$b_3 = (-95{,}92;\ 5;\ 5;\ 5;\ 105)/(0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4)$$

- Sapendo che la struttura dei tassi di mercato è piatta ed è espressa da un tasso istantaneo δ pari al *5%* calcolare le quote del portafoglio formato dai tre titoli b_1, b_2, b_3 che immunizzano il vettore di uscite

$$(0;\ 100;\ 0;\ 100;\ 0)/(0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4)$$

nell'ipotesi in cui si desideri avere una duration di 2° ordine dell'attivo pari a 1,2 volte quella del passivo.

- Ricerca del tasso:

$$\delta = 0{,}05 = \log(1 + i)$$
$$\Rightarrow i = e^{0{,}05} - 1 = 0{,}05127$$
$$\Rightarrow v = \frac{1}{1 + i} = \frac{1}{1{,}05127} = 0{,}95123$$

- Vincolo di BILANCIO:

$$V(0,\theta) = V(0,u) \Leftrightarrow \sum_k \theta_k \cdot v^{t_k} = \sum_k u_k \cdot v^{t_k}$$

$$\alpha \cdot (4v + 104v^2) + \beta \cdot (5v + 5v^2 + 105v^3) +$$
$$+\gamma \cdot (5v + 5v^2 + 5v^3 + 105v^4) = 100 \cdot v + 100 \cdot v^3$$
$$\Rightarrow 97{,}9081 \cdot \alpha + 99{,}6547 \cdot \beta + 99{,}5506 \cdot \gamma = 181{,}1940$$

- Vincolo di DURATION

$$\widehat{D}(0,\theta)=\widehat{D}(0,u)\Leftrightarrow\frac{\sum_k t_k\cdot\theta_k\cdot v^{t_k}}{\sum_k\theta_k\cdot v^{t_k}}=\frac{\sum_k t_k\cdot u_k\cdot v^{t_k}}{\sum_k u_k\cdot v^{t_k}}$$

$$\widehat{D}(0,u)=\frac{100\cdot v+3\cdot 100\cdot v^3}{100\cdot v+100\cdot v^3}=$$

$$\frac{100\cdot v+3\cdot 100\cdot v^3}{181{,}1940}=1{,}9500$$

$$\widehat{D}(0,\theta) = \frac{(4\alpha + 5\beta + 5\gamma)\cdot v + 2\cdot(104\alpha + 5\beta + 5\gamma)\cdot v^2}{181{,}1940} +$$

$$+\frac{3\cdot(105\beta + 5\gamma)\cdot v^3 + 420\gamma\cdot v^4}{181{,}1940} = \frac{\alpha\cdot(4v + 208v^2)}{181{,}1940} +$$

$$+\frac{\beta\cdot(5v + 10v^2 + 315v^3) + \gamma\cdot(5v + 10v^2 + 15v^3 + 420v^4)}{181{,}1940}$$

$$\Rightarrow 1{,}0597\alpha + 1{,}5725\beta + 2{,}0452\gamma = 1{,}9500$$

- Vincolo di dispersione:

$$D^{(2)}(0,\theta) = 1{,}2 \cdot D^{(2)}(0,u)$$

$$\Rightarrow \frac{\sum_k {t_k}^2 \cdot \theta_k \cdot v^{t_k}}{\sum_k \theta_k \cdot v^{t_k}} = 1{,}2 \cdot \frac{\sum_k {t_k}^2 \cdot u_k \cdot v^{t_k}}{\sum_k u_k \cdot v^{t_k}}$$

$$D^{(2)}(0,u) = \frac{100 \cdot v + 9 \cdot 100 \cdot v^3}{100 \cdot v + 100 \cdot v^3} = 4{,}8002$$

$$
\begin{aligned}
D^{(2)}(0,\theta) &= \frac{(4\alpha+5\beta+5\gamma)\cdot v + 4\cdot(104\alpha+5\beta+5\gamma)\cdot v^2}{181{,}1940} + \\
&+ \frac{9\cdot(105\beta+5\gamma)\cdot v^3 + 1.680\gamma\cdot v^4}{181{,}1940} = \frac{\alpha\cdot(4v+416v^2)}{181{,}1940} + \\
&+ \frac{\beta\cdot(5v+20v^2+945v^3)+\gamma\cdot(5v+20v^2+45v^3+1.680v^4)}{181{,}1940} \\
&= 2{,}0984\alpha + 4{,}6151\beta + 7{,}9310\gamma \\
&\Rightarrow 2{,}0984\alpha + 4{,}6151\beta + 7{,}9310\gamma = 1{,}2\cdot 4{,}8002 = 5{,}7602
\end{aligned}
$$

- Tre condizioni → sistema

$$\begin{cases} 97{,}9081\alpha + 99{,}6547\beta + 99{,}5506\gamma = 181{,}1940 \\ 1{,}0597\alpha + 1{,}5725\beta + 2{,}0452\gamma = 1{,}9500 \\ 2{,}0984\alpha + 4{,}6151\beta + 7{,}9310\gamma = 5{,}7602 \end{cases}$$

$$\to 97{,}9081\alpha = -99{,}6547\beta - 99{,}5506\gamma + 181{,}1940$$

$$\to \alpha = -1{,}0178\beta - 1{,}0168\gamma + 1{,}8506$$

$$\begin{cases} 0{,}4939\beta + 0{,}9677\gamma = -0{,}011 \\ 2{,}4793\beta + 5{,}7973\gamma = 1{,}8769 \end{cases}$$

$$\rightarrow 0{,}4939\beta = -0{,}9677\gamma - 0{,}011$$

$$\rightarrow \beta = -1{,}9593\gamma - 0{,}022$$

$$\Rightarrow 2{,}4793(-1{,}9593\gamma - 0{,}022) + 5{,}7973\gamma$$

$$= 1{,}8769$$

$$\Rightarrow \gamma = 2{,}1288 \rightarrow \beta = -4{,}1489 \rightarrow \alpha = 3{,}9088$$

Esercizio 3

- Calcolare le quote dei titoli z_1 e z_2 che immunizzano un portafoglio composto da un'uscita $L = 200$ che si verifica in $t = 2$ essendo z_1 e z_2 i seguenti
  $z_1 = (-100; 110) / (0; 1)$
  $z_2 = (-100; 130) / (0; 3)$

  ed essendo il tasso di mercato costante e pari al *5%*.
- Partendo dai prezzi (che, come si vede, sono pari a 100) dei due titoli calcolare anche il costo del portafoglio di attività.

- Scadenzario del portafoglio di attività:

$$(110\alpha; 0; 130\beta)/(1; 2; 3)$$

- Vincolo di bilancio:

$$V(0,\theta) = V(0,u) \Leftrightarrow$$
$$110\alpha \cdot v + 130\beta \cdot v^3 = 200 \cdot v^2$$
$$\text{con } v = \frac{1}{1{,}05} = 0{,}9524$$
$$104{,}7619\alpha + 112{,}2989\beta = 181{,}4059$$

- Vincolo di duration:

$$\hat{D}(0,\theta) = \hat{D}(0,u) \Leftrightarrow$$
$$\frac{1 \cdot 110\alpha \cdot v + 3 \cdot 130\beta \cdot v^3}{181,4059} = \frac{2 \cdot 200 \cdot v^2}{181,4059}$$
$$104,7619\alpha + 336,8967\beta = 362,8118$$

→ risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 104{,}7619\alpha + 112{,}2989\beta = 181{,}4059 \\ 104{,}7619\alpha + 336{,}8967\beta = 362{,}8118 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (336{,}8967 - 112{,}2989) \cdot \beta$$

$$= 362{,}8118 - 181{,}4059$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = 0{,}8077}$$

$$\Rightarrow 104{,}7619\alpha = 181{,}4059 - 112{,}2989\beta$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = 0{,}8658}$$

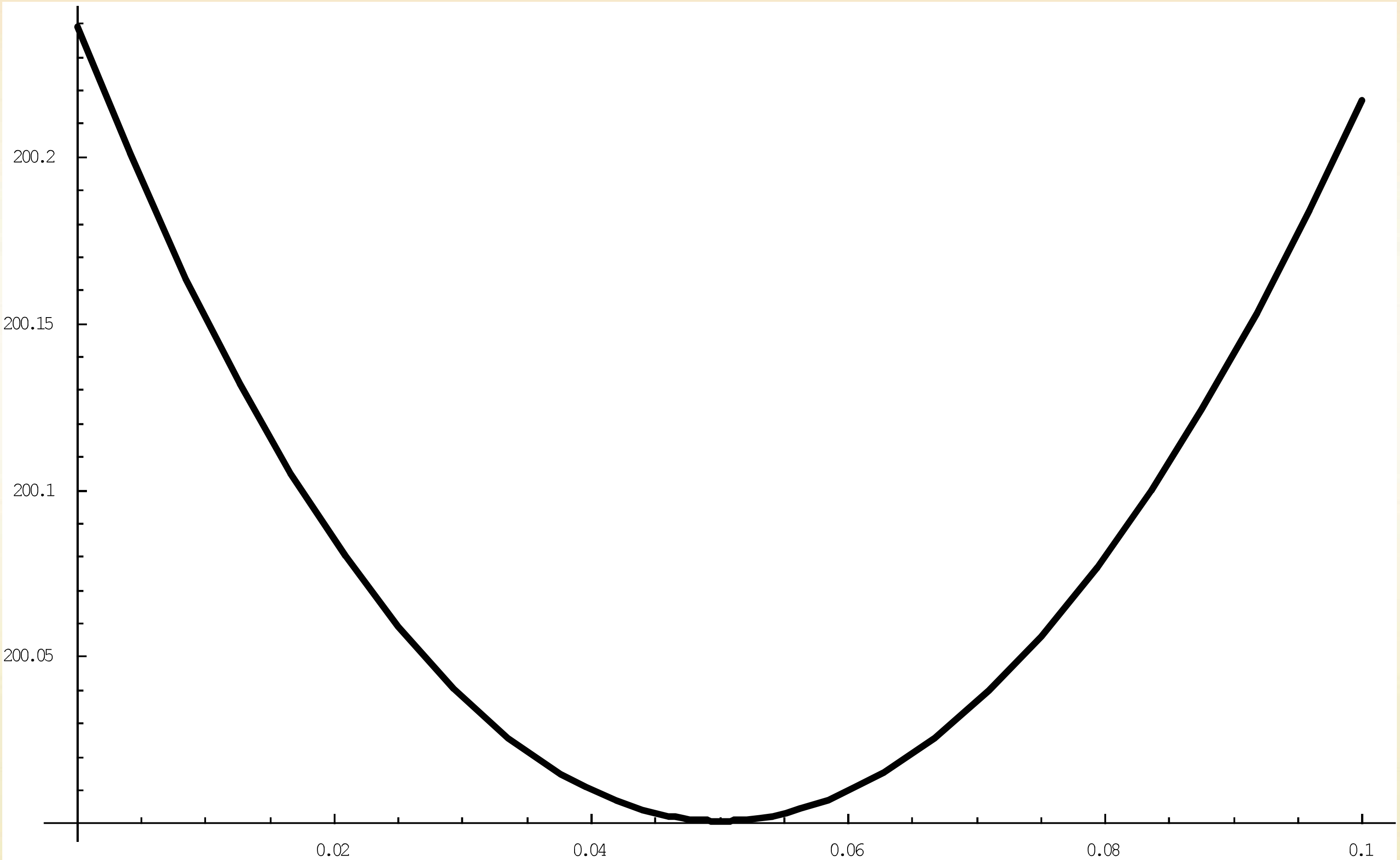
- Costo del portafoglio di attività:

$$P = 100 \cdot \alpha + 100 \cdot \beta = $$
$$= 100 \cdot (0{,}8077 + 0{,}8658) = \boxed{167{,}35}$$

- Valore del portafoglio di attività all'epoca 2:

$$V_2 = 110\alpha \cdot (1 + i) + \frac{130\beta}{1 + i}$$

Grafico di V_2 in funzione di i



Esercizio 4

- La struttura dei tassi a pronti è espressa sul mercato dalla seguente equazione:

$$i(0,t) = 0{,}06 - 0{,}005 \cdot (t-1)$$

- Calcolare la duration di primo e second'ordine del titolo (-98; 10; 10; 110)/(0; 1; 2; 3).
- Calcolare i tassi a termine $i(0, t\text{-}1, t)$ per t=1, 2, 3.
- Calcolare il fattore di montante $m(0, 1, 3)$ espresso su base annua.

$i(0{,}1) = 0{,}06$

$\rightarrow v(0{,}1) = 0{,}943396$

$i(0{,}2) = 0{,}06 - 0{,}005 = 0{,}055$

$\rightarrow v(0{,}2) = (0{,}947867)^2 = 0{,}898452$

$i(0{,}3) = 0{,}06 - 0{,}01 = 0{,}05$

$\rightarrow v(0{,}3) = (0{,}952381)^3 = 0{,}863838$

$$D = \frac{10 \cdot v(0{,}1) + 2 \cdot 10 \cdot v(0{,}2) + 3 \cdot 110 \cdot v(0{,}3)}{10 \cdot v(0{,}1) + 10 \cdot v(0{,}2) + 110 \cdot v(0{,}3)} = 2{,}7545$$

$$D^{(2)} = \frac{10 \cdot v(0{,}1) + 4 \cdot 10 \cdot v(0{,}2) + 9 \cdot 110 \cdot v(0{,}3)}{10 \cdot v(0{,}1) + 10 \cdot v(0{,}2) + 110 \cdot v(0{,}3)} = 7{,}9387$$

$$1 + i(0;1;2) = \frac{[1 + i(0;2)]^2}{1 + i(0;1)} \rightarrow i(0;1;2) = 0{,}05$$

$$1 + i(0;2;3) = \frac{[1 + i(0;3)]^3}{[1 + i(0;2)]^2} \rightarrow i(0;2;3)$$

$$= 0{,}0401$$

$$[1 + i(0;1;3)]^2 = \frac{[1 + i(0;3)]^3}{1 + i(0;1)} \rightarrow i(0;1;3)$$

$$= 0{,}045$$

$$i(0;1;3) = [m(0;1;3)]^{1/2} - 1 \rightarrow m(0;1;3)$$

$$= 1{,}092099$$

Esercizio 5

- In un certo momento il mercato è formato da quattro ZCB aventi tutti, all'istante di valutazione, prezzo pari a 100 e dotati delle seguente caratteristiche:
  - il primo vita residua 1 anno e valore di rimborso 120;
  - il secondo vita residua 2 anni e valore di rimborso 130;
  - il terzo vita residua 3 anni e valore di rimborso 145;
  - il quarto vita residua 4 anni e valore di rimborso 155.

- Ricavare, da queste informazioni, la struttura dei tassi esplicitando sia i tassi a pronti che i tassi a termine ed indicare il prezzo di un obbligazione che paga cedole al 10% annuo per 3 anni e viene rimborsata all'epoca 3 se il valore nominale del titolo è pari a 100.
- Calcolare, inoltre, la durata media finanziaria di tale obbligazione in base alla struttura dei tassi individuata.

$$Z_1 \rightarrow m(0,1) = \frac{120}{100} = 1,2$$

$$\rightarrow i(0,1) = m(0,1) - 1 = 0,20$$

$$Z_2 \rightarrow m(0,2) = \frac{130}{100} = 1,3$$

$$\rightarrow i(0,2) = [m(0,2)]^{1/2} - 1$$
$$= 0,1402$$

$$Z_3 \rightarrow m(0,3) = \frac{145}{100} = 1,45$$

$$\rightarrow i(0,3) = [m(0,3)]^{1/3} - 1$$
$$= 0,1319$$

$$Z_4 \rightarrow m(0{,}4) = \frac{155}{100} = 1{,}55$$

$$\rightarrow i(0{,}4) = [m(0{,}4)]^{1/4} - 1 = 0{,}1158$$

$$i(0;1;2) = \frac{m(0{,}2)}{m(0{,}1)} - 1 = \frac{1{,}3}{1{,}2} - 1$$

$$= 0{,}0833$$

$$i(0;2;3) = \frac{m(0{,}3)}{m(0{,}2)} - 1 = \frac{1{,}45}{1{,}3} - 1$$

$$= 0{,}1154$$

$$i(0;3;4) = \frac{m(0{,}4)}{m(0{,}3)} - 1 = \frac{1{,}55}{1{,}45} - 1$$

$$= 0{,}0690$$

- Prezzo dell'obbligazione:

$$P = 10 \cdot (1{,}2)^{-1} + 10 \cdot (1{,}3)^{-1} + 110 \cdot (1{,}45)^{-1} = 91{,}888$$

- Duration:

$$\widehat{D} = \frac{1 \cdot 10 \cdot (1{,}2)^{-1} + 2 \cdot 10 \cdot (1{,}3)^{-1} + 3 \cdot 110 \cdot (1{,}45)^{-1}}{91{,}888}$$

$$= 2{,}7349$$

Esercizio 6

- In un determinato istante la struttura dei tassi a termine sul mercato, valutata all'epoca $t=0$, è la seguente: i(0;1)=0,10; i(0;1;2)=0,11; i(0;2;3)=0,12; i(0;3;4)=0,125.
- Un operatore ha a disposizione due titoli:
  - uno ZCB che garantisce 163,0474 tra 4 anni;
  - una obbligazione che paga cedole annuali del *15%* e verrà rimborsata alla pari tra 4 anni.

Calcolare i prezzi e le durate medie finanziarie dei due titoli.

$$P_z = \frac{163{,}0474}{(1{,}10) \cdot (1{,}11) \cdot (1{,}12) \cdot (1{,}125)} = 105{,}9809$$

$$P_0$$

$$= \frac{15}{1{,}10} + \frac{15}{(1{,}10) \cdot (1{,}11)} + \frac{15}{(1{,}10) \cdot (1{,}11) \cdot (1{,}12)}$$

$$+$$

$$+ \frac{115}{(1{,}10) \cdot (1{,}11) \cdot (1{,}12) \cdot (1{,}125)} = 111{,}6402$$

$D_z = 4$

$$D_0 = \frac{1 \cdot \frac{15}{1{,}10} + 2 \cdot \frac{15}{(1{,}10) \cdot (1{,}11)} + 3 \cdot \frac{15}{(1{,}10) \cdot (1{,}11) \cdot (1{,}12)}}{111{,}6402} +$$

$$+ \frac{4 \cdot \frac{115}{(1{,}10) \cdot (1{,}11) \cdot (1{,}12) \cdot (1{,}125)}}{111{,}6402} = \frac{370{,}1130}{111{,}6402} = 3{,}3152$$

Esercizio 7

Dati i seguenti tre titoli obbligazionari:

$z_1 = (-100; 105) / (0; 1)$

$z_2 = (-95; 5; 105) / (0; 1; 2)$

$z_3 = (-95; 8; 8; 102) / (0; 1; 2; 3)$

Determinare i tassi a pronti e a termine e calcolare il prezzo *P* e la duration del second'ordine della seguente obbligazione:

$b_1 = (P; 5; 10; 120) / (0; 1; 2; 3)$

$$z_1 \rightarrow m(0{,}1) = \frac{105}{100} = 1{,}05$$

$$\rightarrow i(0{,}1) = m(0{,}1) - 1 = 0{,}05 \rightarrow 5\%$$

$$z_2 \rightarrow 95 = 5 \cdot v(0{,}1) + 105 \cdot v(0{,}2) \rightarrow v(0{,}2)$$

$$= 0{,}8594$$

$$\rightarrow i(0{,}2) = v(0{,}2)^{-1/2} - 1 = 0{,}078698 \rightarrow 7{,}8698\%$$

$$z_3 \rightarrow 95 = 8 \cdot v(0{,}1) + 8 \cdot v(0{,}2) + 102 \cdot v(0{,}3)$$

$$\rightarrow v(0{,}3) = 0{,}7893$$

$$\rightarrow i(0{,}3) = v(0{,}3)^{-1/3} - 1 = 0{,}082076 \rightarrow 8{,}2076\%$$

- Tassi a termine:

$$i(0,1,2) = \frac{v(0,1)}{v(0,2)} - 1 = \frac{100/105}{0,8594} - 1 = 0,108179$$

$$i(0,2,3) = \frac{v(0,2)}{v(0,3)} - 1 = \frac{0,8594}{0,7893} - 1 = 0,088866$$

$$i(0,1,3) = \sqrt{\frac{v(0,1)}{v(0,3)}} - 1 = 9,848\%$$

- Prezzo e duration:

$$P = 5 \cdot v(0{,}1) + 10 \cdot v(0{,}2) + 120 \cdot v(0{,}3) = 108{,}0686$$

$$D^1 = \frac{1 \cdot 5 \cdot v(0{,}1) + 2 \cdot 10 \cdot v(0{,}2) + 3 \cdot 120 \cdot v(0{,}3)}{108{,}0686} = 2{,}8323$$

$$D^2 = \frac{1 \cdot 5 \cdot v(0{,}1) + 4 \cdot 10 \cdot v(0{,}2) + 9 \cdot 120 \cdot v(0{,}3)}{108{,}0686} = 8{,}2499$$

Esercizio 8

- Dato un titolo fornito di Duration pari a 3 e prezzo pari a 99 calcolare il suo presumibile cambiamento di valore a seguito di una variazione positiva dei tassi di mercato del *2%* a partire da un livello corrente del *5%*.

- Applichiamo la nota relazione:

$$V = V(i)$$

$$\Delta V = -\frac{\widehat{D}}{1+i} \cdot V \cdot \Delta i = -\frac{3}{1{,}05} \cdot 99 \cdot 0{,}02$$

$$\Rightarrow \Delta V = -5{,}6571$$

Esercizio 9

- Un titolo costa 99,5, ha TIR pari al *5,42%* e la sua duration è pari a 2,34 anni. Calcolare la presumibile variazione del suo prezzo a seguito di un incremento del tasso di un punto percentuale.

- Applichiamo la nota relazione:

$$V = V(i)$$

$$\Delta V = -\frac{\widehat{D}}{1+i} \cdot V \cdot \Delta i = -\frac{2{,}34}{1{,}0542} \cdot 99{,}5 \cdot 0{,}01$$

$$\Rightarrow \Delta V = -2{,}2086$$

Esercizio 10

- Sia dato un bullet bond x_1 con valore facciale 100 euro, maturity 2 anni, cedole pagabili semestralmente al tasso nominale annuo $i=14\%$. Con riferimento ad una struttura dei tassi a pronti su base annua data da $i(0;0,5)=10,25\%$, $i(0;1)=10,5\%$, $i(0;1,5)=11\%$, $i(0;2)=10,75\%$, determinare la duration del titolo x_1. Indicato poi con x il portafoglio composto da una quota $a=3$ del titolo x_1 e da una quota b di uno zero coupon bond x_2 che paga 100 euro in $t=1$, determinare b in modo che $D(0;x)=1,3$.

- Il tasso semestrale è dato da

$$i_{1/2} = \frac{J(2)}{2} = 0{,}07$$

- Valore delle cedole: $C = VF \cdot i_{1/2} = 7$
- Si ottiene lo scadenzario: $\{7{,}7{,}7{,}107\}/\{0{,}5; 1; 1{,}5; 2\}$
- Calcolo della duration:

$$D(0, x_1) = \frac{\sum_k \vartheta_k \cdot t_k \cdot [1 + i(0, t_k)]^{-t_k}}{\sum_k \vartheta_k \cdot [1 + i(0, t_k)]^{-t_k}}$$

- Numeratore:

$$7 \cdot 0{,}5 \cdot (1{,}1025)^{-0{,}5} + 7 \cdot 1 \cdot (1{,}105)^{-1} +$$
$$+7 \cdot 1{,}5 \cdot (1{,}11)^{-1{,}5} + 107 \cdot 2 \cdot (1{,}1075)^{-2}$$

- Denominatore:

$$7 \cdot (1{,}1025)^{-0{,}5} + 7 \cdot (1{,}105)^{-1} + 7 \cdot (1{,}11)^{-1{,}5} + 107 \cdot (1{,}1075)^{-2}$$

- Risultato: $D(0, x_1) = 1{,}8180$

- Lo scadenzario del portafoglio è:

$$\{21; 21 + 100 \cdot b; 21; 321\}/t = \{0{,}5; 1; 1{,}5; 2\}$$

- Risolvendo l'equazione in *b*:

$$\frac{21 \cdot 0{,}5 \cdot (1{,}1025)^{-0{,}5} + (100 \cdot b + 21) \cdot 1 \cdot (1{,}105)^{-1} + 21 \cdot 1{,}5 \cdot (1{,}11)^{-1{,}5} + 321 \cdot 2 \cdot (1{,}1075)^{-2}}{21 \cdot (1{,}1025)^{-0{,}5} + (100 \cdot b + 21) \cdot (1{,}105)^{-1} + 21 \cdot (1{,}11)^{-1{,}5} + 321 \cdot (1{,}1075)^{-2}}$$
$$= 1{,}3$$

- Si trova: $b = 6{,}080687$