

# **MODULO 3**

## **GLI AMMORTAMENTI**

# Argomenti

- Obiettivi.
- Introduzione.
- Il piano d'ammortamento.
- L'ammortamento francese.
- L'ammortamento italiano (uniforme).
- L'ammortamento tedesco.
- Piani con preammortamento.
- L'ammortamento a rimborso unico.
- Piani d'ammortamento a periodicità frazionata.
- La valutazione dei prestiti.
- Appendice: Le operazioni di rendita nell'aspetto dinamico.

# Obiettivi

Gli *obiettivi* di questo modulo sono:

- saper utilizzare lo strumento del piano d'ammortamento per descrivere in maniera chiara ed esplicita il processo di rimborso di un prestito;
- quantificare nelle varie tipologie d'ammortamento rata, debito residuo, quota capitale e quota interesse;
- riuscire a valutare un prestito a una determinata epoca, distinguendo tra usufrutto e nuda proprietà.

# Introduzione

Il problema generale dell'ammortamento di un prestito riguarda le modalità di rimborso del prestito.

Se un operatore A presta ad un operatore B, una somma **S** che costituisce l'ammontare del prestito, B si impegna a restituirlo entro **n** anni secondo tempi di rimborso stabiliti. Si stabilisce, inoltre, che l'operatore B s'impegni a pagare l'interesse sulla somma ancora dovuta, ad un **tasso di remunerazione i**.

A può scegliere di restituire il prestito in un'unica soluzione, o versando delle rate periodiche e così via.

In questo modulo vedremo le possibili modalità di rimborso, studieremo quindi i diversi **piani d'ammortamento**.

# Il piano d'ammortamento

**Il piano d'ammortamento è uno schema in cui vengono elaborati importi da pagare in  $n$  anni, per estinguere un debito.**

# Il piano d'ammortamento

Ad esempio se accendiamo un mutuo, dobbiamo azzerare gradualmente il debito.

Forniamo la simbologia che sarà utilizzata.

**S** → Importo prestato

**C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub>, ..., C<sub>h</sub>, ..., C<sub>n</sub>** → Quote capitale ovvero le frazioni del capitale prestato che m'impegno a restituire.

***i*** → Tasso di remunerazione del prestito

**I<sub>h</sub>** → Quote interesse, che misurano il costo del prestito anno per anno

# Il piano d'ammortamento

Abbiamo visto che  $I_h$  rappresenta il costo del prestito anno per anno. Infatti non pago solo la quota capitale, ma anche la quota interessi perciò all'epoca  $h$  pagherò una **rata**  $R_h$  pari a

$$R_h = C_h + I_h$$



Rata dell'ammortamento:  
ciò che pago nel generico  
anno.

La quota d'interesse è proporzionale a due elementi:

1. il tasso d'interesse;
2. il capitale avuto a disposizione nell'anno, al termine del quale viene pagata la quota interesse.

# Il piano d'ammortamento

$$I_1 = i \cdot (S) \quad \text{Costo per il primo anno}$$

$$I_2 = i \cdot (S - C_1) \quad \text{Costo per il secondo anno}$$

$$I_3 = i \cdot (S - C_1 - C_2)$$

Così via via per tutti gli anni

$D_h$

**Debito residuo** all'epoca  $h$



Quello che non ho ancora restituito del capitale prestatato

# Il piano d'ammortamento

Come si calcola il debito residuo?

Visione prospettiva:

$$D_h = C_{h+1} + C_{h+2} + \dots + C_n$$

Guardo al futuro: sommo le quote che non ho ancora restituito

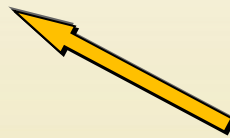
Visione retrospettiva

$$D_h = S - C_1 - C_2 - \dots - C_h$$

Guardo al passato: sottraggo dal prestito iniziale le quote già pagate

$$I_h = D_{h-1} \cdot i$$

Quota interesse.



Debito residuo all'epoca precedente

## Il piano d'ammortamento

Le grandezze appena introdotte si rappresentano mediante delle tabelle; le colonne della tabella riportano i valori dell'anno, dell'ammontare della rata, delle quote capitale ed interesse e del debito residuo:

$h$	$R_h$	$C_h$	$I_h$	$D_h$

Si inizia a compilare l'ultima colonna della prima riga col debito iniziale, si prosegue andando a capo e riportando in ogni riga (cioè per ogni  $h$ ) gli elementi della rata e del debito residuo.

# L'ammortamento francese

Si finisce con l'ultima riga in cui l'ultima colonna deve essere zero, per l'ipotesi di chiusura sull'estinzione del debito al pagamento dell'ultima rata. Tale metodo risulta molto utile sia a livello operativo che per analizzare la dinamica dell'operazione finanziaria in maniera chiara ed esplicita. Ora seguono alcuni esempi particolarmente diffusi e significativi.

## 1° caso: ammortamento francese (o a rate costanti posticipate)

I dati a nostra disposizione sono:

- 1- il debito totale da rimborsare  $S$ ;
- 2- il numero delle rate  $n$ ;
- 3- il tasso di valutazione  $i$ .

Caratterizzato da una rata costante che è data da  $R = \frac{S}{a_{\overline{n}|i}}$   
I dati sono:  $S=100$  euro,  $n=4$ ,  $i=3\%$ .

# L'ammortamento francese

<b>h</b>	<b>R<sub>h</sub></b>	<b>C<sub>h</sub></b>	<b>I<sub>h</sub></b>	<b>D<sub>h</sub></b>
0	0	0	0	100,0000
1	26,9027	23,9027	3,0000	76,0973
2	26,9027	24,6198	2,2829	51,4775
3	26,9027	25,3584	1,5443	26,1191
4	26,9027	26,1191	0,7836	0,0000

I passi da effettuare sono:

- nella prima riga scrivere 100 nell'ultima colonna e zero nelle altre colonne;
- scrivere le 4 rate costanti nella seconda colonna;
- calcolare l'interesse contenuto nella prima rata con la relazione  $I_h = i \cdot D_{h-1}$  cioè  $I_1 = 0,03 \cdot 100 = 3.0000$  e scriverlo alla seconda riga quarta colonna;
- sottrarre l'interesse  $I_1$  così calcolato dalla rata  $R$  per ottenere la quota capitale  $C_1$  da scrivere alla seconda riga terza colonna;
- sottrarre dal debito precedente  $D_0$  la quota capitale appena trovata e scrivere il risultato alla seconda riga quinta colonna ( $D_1$ ).

# L'ammortamento francese

Il calcolo della terza riga è identico a quello della seconda adeguando gli importi. L'ultima riga finisce con l'importo residuo pari a zero, per la condizione di chiusura.

Leggendo le colonne si osserva che:

- l'ultima colonna descrive l'ammortamento del prestito come debito residuo;
- la penultima colonna descrive l'andamento decrescente degli interessi, proprio perché calcolati sul debito residuo che decresce;
- la terzultima colonna descrive l'andamento crescente delle quote capitale, le quali abbattano il debito residuo per il periodo successivo; in questo tipo d'ammortamento esse sono in progressione geometrica di ragione  $(1+i)$ .

# L'ammortamento francese

Infatti, per ogni  $h$ :

$$\begin{aligned} C_{h+1} &= D_h - D_{h+1} = (D_{h-1} + i \cdot D_{h-1} - R) - (D_h + i \cdot D_h - R) = \\ &= (1 + i) \cdot (D_{h-1} - D_h) = C_h \cdot (1 + i) \end{aligned}$$

e si può dimostrare che, per ogni  $h$ :

$$\begin{aligned} C_h &= R \cdot v^{n-h+1} \rightarrow \sum_{h=1}^n C_h = R \cdot \sum_{h=1}^n v^{n-h+1} = R \cdot a_{\overline{n}|i} = S \\ I_h &= R - C_h = R \cdot (1 - v^{n-h+1}) \end{aligned}$$

Quindi per calcolare le quote capitale si può sfruttare questa proprietà.

# L'ammortamento italiano (uniforme)

## 2° caso: ammortamento a quote capitale costanti (uniforme o italiano)

E' un caso semplice, vale la regola  $C_h = S/n$  ; procedendo con i dati dell'esempio precedente otteniamo il seguente piano d'ammortamento:

<b>h</b>	<b>R<sub>h</sub></b>	<b>C<sub>h</sub></b>	<b>I<sub>h</sub></b>	<b>D<sub>h</sub></b>
0	0	0	0,0000	100,0000
1	28,0000	25,0000	3,0000	75,0000
2	27,2500	25,0000	2,2500	50,0000
3	26,5000	25,0000	1,5000	25,0000
4	25,7500	25,0000	0,7500	0,0000

In questo caso calcoliamo prima le quote capitali, quindi il debito residuo per ciascuna epoca in modo da poter riempire la colonna delle quote interessi. Infine si calcolano le rate come somma della quota capitale e la quota interesse:

$$R_1 = C_1 + I_1, \dots, R_h = C_h + I_h$$

# L'ammortamento tedesco

## 3° caso: ammortamento tedesco (o a interessi anticipati)

L'ammortamento tedesco non è un tipo di piano a se stante, può essere applicato a tutti i tipi di piano. Si tratta di un ammortamento che paga gli interessi anticipati, ossia gli interessi sono pagati all'inizio dell'anno (periodo). La prima quota interessi sarà pagata all'epoca 0, mentre la prima quota capitale all'epoca 1.

Vediamo un esempio di ammortamento francese con ammortamento tedesco; utilizziamo gli stessi dati numerici dell'esempio precedente.

Il calcolo della rata porta a:

$$R = \frac{v \cdot S}{a_{\overline{n}|i}} = \frac{100 \cdot 1,03^{-1}}{a_{\overline{4}|0,03}} = \frac{97,0874}{3,7171} = 26,1191$$

## L'ammortamento tedesco

I passi da effettuare sono:

- in prima riga scrivere 100 nell'ultima colonna; 2,9126 nella penultima colonna quale interesse anticipato contenuto nella prima rata, e zero nelle altre colonne;
- scrivere le 4 rate costanti nella seconda colonna;
- calcolare il debito residuo in 1 :  
$$D_1 = (D_0 - R) \cdot (1+i) = 73,8809 \cdot 1,03 = 76,0973$$
 e scriverlo alla seconda riga quinta colonna;
- calcolare l'interesse  $I_2$  della seconda rata applicando il tasso anticipato  $d=2,9126\%$  a  $D_2$  e scrivere il risultato alla seconda riga quarta colonna;
- sottrarre  $I_2$  dalla rata per ottenere  $C_2=23,9027$  da scrivere alla seconda riga terza colonna.

## L'ammortamento tedesco

<b>h</b>	<b>R<sub>h</sub></b>	<b>C<sub>h</sub></b>	<b>I<sub>h</sub></b>	<b>D<sub>h</sub></b>
0	2,9126	0	2,9126	100,0000
1	26,1191	23,9027	2,2164	76,0973
2	26,1191	24,6198	1,4993	51,4775
3	26,1191	25,3584	0,7607	26,1191
4	26,1191	26,1191	0,0000	0,0000

Il calcolo della terza riga è identico a quello della seconda, adeguando gli importi. L'ultima riga finisce con l'importo residuo pari a zero, per la condizione di chiusura, e gli interessi contenuti nell'ultima rata sono pari a zero, dal momento che il debito viene estinto con interessi anticipati.

## L'ammortamento tedesco

Analizzando brevemente le colonne, osserviamo che l'andamento delle quote è uguale al caso posticipato; ovviamente la rata è inferiore in quanto i pagamenti sono tutti anticipati di un anno, e conseguentemente le quote interessi sono più basse rispetto al caso posticipato. Inoltre la prima rata è diversa dalle altre dato che all'epoca 0 viene pagata solo la quota interesse ma non la quota capitale.

# Piani con preammortamento

## 4° caso: piani con preammortamento

Le parti, contrattualmente, possono stabilire un periodo di **preammortamento**, nel quale vengono corrisposti solo gli interessi a titolo di differimento dell'ammortamento vero e proprio, nel quale normalmente le rate pagano sia interessi che debito. Le rate di preammortamento sono costituite solo dalla quota interessi  $I_h = i \cdot S$ . Ad esempio, se poniamo un preammortamento di 3 anni nel caso precedente:

<b>h</b>	<b>R<sub>h</sub></b>	<b>C<sub>h</sub></b>	<b>I<sub>h</sub></b>	<b>D<sub>h</sub></b>
0	0	0	0,0000	100,0000
1	3,0000	0,0000	3,0000	100,0000
2	3,0000	0,0000	3,0000	100,0000
3	3,0000	0,0000	3,0000	100,0000
4	28,0000	25,0000	3,0000	75,0000

a seguire fino al tempo  $h=7$ .

# L'ammortamento a rimborso unico

## 5° caso: ammortamento a rimborso unico

In questo caso il debito iniziale  $S$  viene restituito alla fine del prestito, e le rate, posticipate, sono costituite dalla sola quota interessi.

Possiamo ricondurre tale caso al precedente, assumendo le rate  $R_h = i \cdot S$ ,  $h = 1, \dots, n-1$  quali rate di preammortamento, e l'ultima rata  $R_n = S + i \cdot S$  quale *ammortamento mediante unica rata*.

Ad esempio, con  $S = 100$ ,  $i = 2,5\%$  e  $n = 4$ :

<b>h</b>	<b><math>R_h</math></b>	<b><math>C_h</math></b>	<b><math>I_h</math></b>	<b><math>D_h</math></b>
0	0	0	0,0000	100,0000
1	2,5000	0,0000	2,5000	100,0000
2	2,5000	0,0000	2,5000	100,0000
3	2,5000	0,0000	2,5000	100,0000
4	102,5000	100,0000	2,5000	0,0000

# Piani d'ammortamento a periodicità frazionata

## 6° caso: piani di ammortamento con periodicità frazionata

In questo caso il tempo è espresso solitamente in sottomultipli di anno, per cui basta calcolare il tasso equivalente al tasso annuo assegnato.

Ad esempio scriviamo il piano di ammortamento francese di un prestito di  $S=200$  euro rimborsabile in tre anni con rate posticipate semestrali valutate al tasso annuo  $i=4\%$ .

<b>h</b>	<b>R<sub>h</sub></b>	<b>C<sub>h</sub></b>	<b>I<sub>h</sub></b>	<b>D<sub>h</sub></b>
0	0	0	0	200,0000
1	35,6811	31,7211	3,9600	168,2789
2	35,6811	32,3491	3,3319	135,9298
3	35,6811	32,9897	2,6914	102,9401
4	35,6811	33,6429	2,0382	69,2973
5	35,6811	34,3090	1,3721	34,9883
6	35,6811	34,9883	0,6928	0,0000

$$i_{1/2} = \sqrt{1,04} - 1 = 1,98\%; \quad R = 200 / a_{\overline{6}|0,0198} = 35,6811$$

# La valutazione dei prestiti

L'ammontare nominale dei debiti rappresenta una misura approssimativa del reale peso di un contratto di prestito. Questo infatti dipende sostanzialmente dal tasso di remunerazione e dal piano d'ammortamento previsto. È necessario perciò, "valutare" un prestito tenendo conto di tutte le sue caratteristiche.

Chiamiamo **valore del prestito** al tempo  $t$  e al tasso di valutazione  $j$ , la somma dei valori attuali in  $t$  di tutte le rate previste dal piano d'ammortamento non ancora effettuate.

I valori attuali vanno calcolati al tasso  $j$  fissato da chi valuta il prestito.

Il valore complessivo del prestito sarà:

$$A_h^{(j)} = \sum_{t=h+1}^n R_t \cdot (1+j)^{-(t-h)}$$

Tenendo conto che le rate sono costituite dalla somma della quota interesse e quota capitale possiamo riscrivere:

# La valutazione dei prestiti

$$A_h^{(j)} = \sum_{t=h+1}^n C_t \cdot (1+j)^{-(t-h)} + \sum_{t=h+1}^n I_t \cdot (1+j)^{-(t-h)}$$

La somma dei valori attuali delle quote capitale residue in un certo istante  $h$  e al tasso  $j$ , prende il nome di **nuda proprietà**, mentre la somma dei valori attuali delle quote interesse residue si chiama **usufrutto**.

Nuda proprietà: 
$$P_h^{(j)} = \sum_{t=h+1}^n C_t \cdot (1+j)^{-(t-h)}$$

Usufrutto: 
$$U_h^{(j)} = \sum_{t=h+1}^n I_t \cdot (1+j)^{-(t-h)}$$

Valore complessivo del prestito

$$A_h^{(j)} = P_h^{(j)} + U_h^{(j)}$$

## La valutazione dei prestiti

Esempio: dato il seguente piano d'ammortamento calcolare il valore complessivo del prestito, l'usufrutto e la nuda proprietà al tasso di valutazione del 9% all'epoca 2.

<b>h</b>	<b>C<sub>h</sub></b>	<b>I<sub>h</sub></b>	<b>R<sub>h</sub></b>	<b>D<sub>h</sub></b>
0	-	-	-	1.550.000
1	50.000	116.250	166.250	1.500.000
2	100.000	112.500	212.500	1.400.000
3	<b>200.000</b>	<b>105.000</b>	<b>305.000</b>	1.200.000
4	<b>400.000</b>	<b>90.000</b>	<b>490.000</b>	800.000
5	<b>800.000</b>	<b>60.000</b>	<b>860.000</b>	-

$$h=2; j=0,09; n=5$$

# La valutazione dei prestiti

Valore complessivo del prestito:

$$A_2^{(0,09)} = \sum_{t=2+1}^5 R_t \cdot (1+j)^{-(t-h)} = 305.000 \cdot (1,09)^{-1} + 490.000 \cdot (1,09)^{-2} + 860.000 \cdot (1,09)^{-3}$$
$$A_2^{(0,09)} = 1.356.317,503$$

Nuda proprietà:  $P_2 = \frac{C_3}{1,09} + \frac{C_4}{1,09^2} + \frac{C_5}{1,09^3} = 1.137.905,020$

Usufrutto:  $U_2 = \frac{I_3}{(1+0,09)} + \frac{I_4}{(1+0,09)^2} + \frac{I_5}{(1+0,09)^3} = 218.412,483$

Sommando usufrutto e nuda proprietà otteniamo lo stesso valore complessivo del prestito

$$A_2^{(0,09)} = P_2^{(0,09)} + U_2^{(0,09)} = 1.137.905,020 + 218.412,483 = 1.356.317,503$$

# La valutazione dei prestiti

## Esempio.

Consideriamo ora un ammortamento a rimborso unico il cui debito iniziale è pari a 1.000.000 di euro, le rate sono annuali al tasso del 9,25% e la durata è 20. Si calcoli l'usufrutto e la nuda proprietà del prestito al tasso di valutazione del 12% all'epoca 6.

Essendo un piano d'ammortamento a rimborso unico, le quote capitale sono tutte nulle tranne l'ultima  $C_{20} = 1.000.000$ .

Calcoliamo la nuda proprietà attualizzando all'epoca 6 l'unica quota capitale al tasso  $j=12\%$ :

$$P_6^{(0,12)} = 1.000.000 \cdot 1,12^{-(20-6)} = 204.619,81$$

Il debito residuo è sempre costante fino all'epoca 20 (in cui si estingue), conseguentemente le quote interesse saranno sempre costanti e pari a

$$I = 1.000.000 \cdot 0,0925 = 92.500.$$

(il che equivale ad una rendita a rata costante).

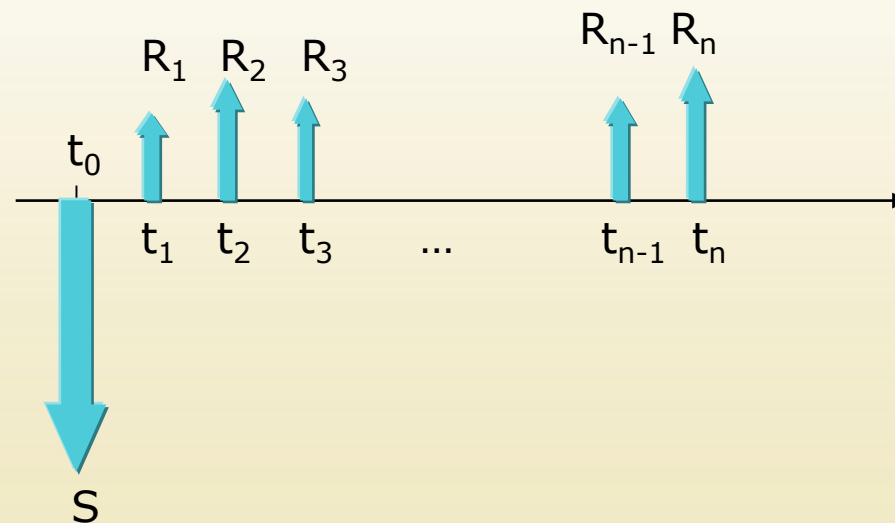
## La valutazione dei prestiti

L'usufrutto sarà calcolato attualizzando all'epoca 6 tutte le successive quote interesse:

$$U_6^{(0,12)} = I \cdot a_{\overline{n-h}|j} = 92.500 \cdot a_{\overline{14}|0,12} = 613.105,56$$

# Appendice: le operazioni di rendita nell'aspetto dinamico

Consideriamo un'operazione finanziaria costituita da un importo  $S$  nell'istante  $t_0$  e da  $n$  importi  $R_h$  ( $h=1,2,\dots,n$ ) pagabili rispettivamente agli istanti  $t_h$  con segno opposto a quello di  $S$ . Possiamo schematizzare così l'operazione dal punto di vista del soggetto che investe la somma  $S$ :



# Appendice: le operazioni di rendita nell'aspetto dinamico

Sostanzialmente si tratta di un'operazione di scambio, di investimento o di indebitamento per la controparte, in cui inizialmente si investe la somma  $S$  in  $t_0=0$ , per riscuotere la rendita delle rate  $R_h$ :

$$\mathbf{x}/t = \{-S, R_1, R_2, R_3, \dots, R_{n-1}, R_n\} / \{0, t_1, \dots, t_n\}$$

E' interessante analizzare l'andamento delle quantità montante ( $M_h$ ) e valore residuo ( $V_h$ ), assegnata una legge di valutazione esponenziale al tasso annuo  $i$ :

- il montante in  $t_h$  dell'operazione è la somma dei montanti di ciascuna rata pagata fino a quell'istante:

$$M_h = S \cdot (1+i)^h - \sum_{t=1}^h R_t \cdot (1+i)^{h-t} \quad h = 0, 1, \dots, n$$

- il valore residuo in  $t_h$  dell'operazione è la somma dei valori attuali di ciascuna rata successiva a quell'istante:

$$V_h = - \sum_{t=h+1}^n R_t \cdot (1+i)^{-(t-h)} \quad h = 0, 1, \dots, n$$

# Appendice: le operazioni di rendita nell'aspetto dinamico

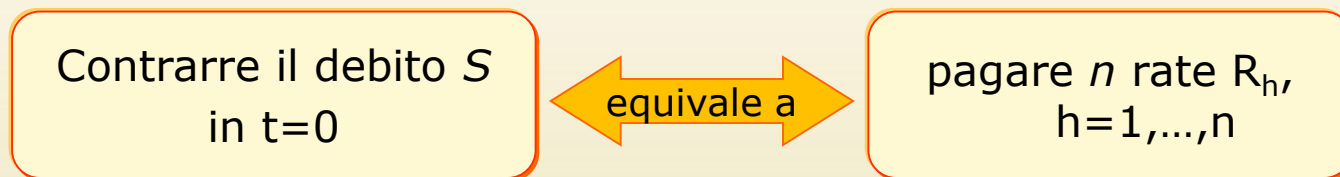
Il valore dell'operazione, nell'istante  $h$ , è dato dalla somma:

$$A(h, \mathbf{x}) = M_h + V_h \quad h=0, \dots, n$$

Se poniamo come ipotesi che l'importo iniziale  $S$  sia proprio pari al valore attuale, secondo la legge di valutazione esponenziale, delle rate  $R_h$  in  $t=0$  (detta "condizione di chiusura"),

$$S = \sum_{h=1}^n R_h \cdot (1+i)^{-h}$$

si può dimostrare che  $M_h + V_h = 0$  per  $h=0, \dots, n$ , cioè che l'operazione è equa secondo il tasso  $i$ . Si è quindi ottenuto il risultato seguente:



secondo la legge di valutazione esponenziale al tasso  $i$ .

# Appendice: le operazioni di rendita nell'aspetto dinamico

In qualunque istante  $h$ ,  $M_h$  è un numero positivo che esprime il debito residuo, decrescente fino al valore nullo per  $t=n$ , perciò in seguito verrà indicato con  $D_h$ .

Il valore  $V_h = -D_h$  è sempre negativo, ed è ovviamente nullo in  $t=n$ . Per studiare l'andamento di tali grandezze al variare di  $t$ , è opportuno scrivere la seguente relazione:

$$D_h = D_{h-1} \cdot (1+i) - R_h \quad h=1,2,\dots,n$$

The diagram illustrates the components of the debt equation. It features four boxes at the bottom, each with a red border, containing the following text: "Debito in h", "Debito in h-1", "capitalizzato per un periodo", and "meno la rata pagata in h". An equals sign is placed between the first and second boxes. Above these boxes is the equation  $D_h = D_{h-1} \cdot (1+i) - R_h$  with the range  $h=1,2,\dots,n$  to its right. Four arrows point from the boxes to the equation: from "Debito in h" to  $D_h$ , from "Debito in h-1" to  $D_{h-1}$ , from "capitalizzato per un periodo" to  $(1+i)$ , and from "meno la rata pagata in h" to  $-R_h$ .

la quale esprime che il debito in  $h$  è pari al debito in  $h-1$  capitalizzato di un periodo tramite il fattore  $(1+i)$ , meno la rata in  $h$  (col segno meno in quanto essa viene pagata).

# Appendice: le operazioni di rendita nell'aspetto dinamico

Analizziamo ora l'evoluzione di  $D_h$  in cinque casi piuttosto ricorrenti.

1° caso: rendita posticipata a rata costante.

$D_0 = S$	$= -V_0 = R \cdot a_{n-i}$
$D_1 = D_0 + i \cdot D_0 - R$	$= -V_1 = R \cdot a_{n-1-i}$
$D_2 = D_1 + i \cdot D_1 - R$	$= -V_2 = R \cdot a_{n-2-i}$
...	
$D_h = D_{h-1} + i \cdot D_{h-1} - R$	$= -V_h = R \cdot a_{n-h-i}$
...	
$D_n = D_{n-1} + i \cdot D_{n-1} - R$	$= -V_n = R \cdot a_{0-i} = 0$

La prima colonna descrive l'evoluzione del montante, a partire dal momento iniziale in cui esso coincide col debito totale, a seguire fino all'istante generico in cui il montante in  $h$  (debito residuo in  $h$ ) è il debito precedente  $D_{h-1}$  più l'interesse  $i \cdot D_{h-1}$  calcolato sul debito precedente, meno la rata pagata in  $h$ .

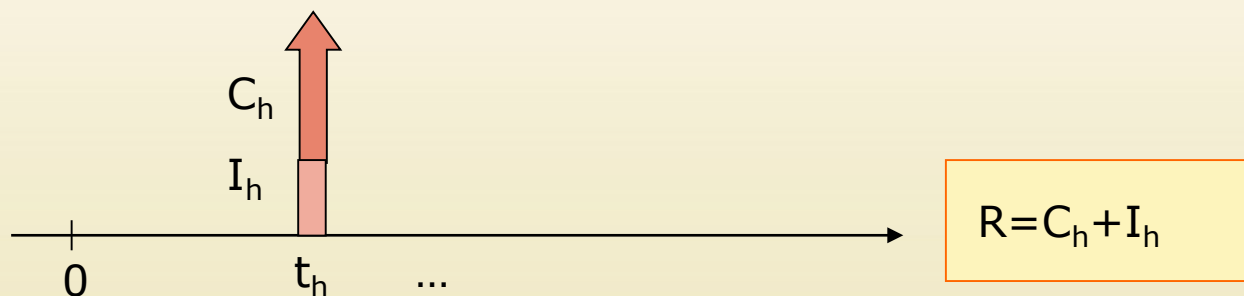
# Appendice: le operazioni di rendita nell'aspetto dinamico

La seconda colonna esprime il debito residuo non più partendo dal debito precedente (metodo retrospettivo) ma in funzione delle rate non ancora scadute (metodo prospettivo) attualizzate. Per aver supposto la condizione di equità  $S = R \cdot a_{\overline{n}|i}$

l'ultima riga è  $D_n = -V_n = 0$ .

Osserviamo che  $V_h = -R \cdot a_{\overline{n-h}|i}$  esprime che nell'istante generico il debito residuo è sempre pari alla somma dei valori in  $h$  delle  $n-h$  rate ancora non scadute.  $R = (D_{h-1} - D_h) + i \cdot D_{h-1}$

Quest'ultima ci suggerisce di dividere la rata in due quote:



# Appendice: le operazioni di rendita nell'aspetto dinamico

denominate rispettivamente **quota capitale** e **quota interessi**:

$$C_h = D_{h-1} - D_h \quad (\text{quota capitale})$$

$$I_h = i \cdot D_{h-1} \quad (\text{quota interessi})$$

Siamo giunti ad un importante risultato: in un'operazione di ammortamento di un debito mediante rate costanti, ogni rata si scinde in due componenti: la quota capitale, che serve a ridurre e poi estinguere il debito, e la quota interessi, quale prezzo da pagare per aver fruito del prolungamento dell'operazione di indebitamento.

La condizione di equità, abbiamo già visto, fa sì che alla fine del processo il debito sia nullo. Ciò si ritrova sommando tutte le quote capitale:

$$\sum_{h=1}^n C_h = \sum_{h=1}^n (D_{h-1} - D_h) = D_0 - D_n = S - D_n$$

$$\sum_{h=1}^n C_h = S \quad \Leftrightarrow \quad D_n = 0$$

# Appendice: le operazioni di rendita nell'aspetto dinamico

Osservazione: le quote capitale in una rendita posticipata a rata costante sono in progressione geometrica di ragione  $(1+i)$ . Infatti, per ogni  $h$ :

e si può dimostrare che, per ogni  $h$ :

$$\begin{aligned}C_{h+1} &= D_h - D_{h+1} = (D_{h-1} + i \cdot D_{h-1} - R) - (D_h + i \cdot D_h - R) = \\ &= (1+i) \cdot (D_{h-1} - D_h) = C_h \cdot (1+i)\end{aligned}$$

Il debito residuo all'epoca  $h$  lo troviamo anche attualizzando le rate residue all'epoca  $h$ :

$$\begin{aligned}C_h &= R \cdot v^{n-h+1} \\ I_h &= R - C_h \\ &= R \cdot (1 - v^{n-h+1})\end{aligned}$$

$$D_h = R \cdot a_{\overline{n-h}|i}$$

# Appendice: le operazioni di rendita nell'aspetto dinamico

## 2° caso: rendita anticipata a rata costante.

In tal caso valgono le stesse considerazioni fatte nel caso precedente, salvo opportune modifiche alle formule, considerando, nel calcolo dei montanti  $D_h$ , che le rate siano pagate un istante infinitesimo successivo a  $h$ :

$$\begin{aligned} D_0 &= S & & = -V_0 = R \cdot \ddot{a}_{n|i} \\ D_1 &= (D_0 - R) \cdot (1+i) & & = -V_1 = R \cdot \ddot{a}_{n-1|i} \\ \\ D_h &= (D_{h-1} - R) \cdot (1+i) & & = -V_h = R \cdot \ddot{a}_{n-h|i} \\ \\ \dots & & & \\ D_n &= (D_{n-1} - R) \cdot (1+i) & & = -V_n = R \cdot \ddot{a}_{0|i} = 0 \end{aligned}$$

## Appendice: le operazioni di rendita nell'aspetto dinamico

All'istante  $h$  il montante  $D_h$  si costruisce capitalizzando con il fattore  $(1+i)$  il montante precedente  $D_{h-1}$  decurtato della rata pagata in  $h-1$ . Scriviamo:

$v \cdot D_h = D_{h-1} - R$  e, esplicitando la rata e ricordando che  $v = 1 - d$ :

$$R = (D_{h-1} - D_h) + dD_h = C_h + I_h$$

Quindi anche in questo caso la rata si può pensare composta da due elementi: la quota capitale  $C_h$  ancora come differenza dei montanti, e la quota interessi  $I_h$  stavolta come tasso anticipato  $d$  applicato al montante in  $h$ .

# Appendice: le operazioni di rendita nell'aspetto dinamico

Osservazione: le quote capitale in una rendita anticipata a rata costante sono in progressione geometrica di ragione  $(1+i)$ . Infatti, per ogni  $h$ :

$$\begin{aligned}C_{h+1} &= D_h - D_{h-1} = (D_{h-1} - R) \cdot (1+i) - (D_{h-2} - R) \cdot (1+i) = \\ &= (1+i) \cdot (D_{h-1} - D_{h-2}) = C_h \cdot (1+i)\end{aligned}$$

e si può dimostrare che, per ogni  $h$ :

$$\begin{aligned}C_h &= R \cdot v^{n-h} \\ I_h &= R - C_h \\ &= R \cdot (1 - v^{n-h})\end{aligned}$$

# Appendice: le operazioni di rendita nell'aspetto dinamico

## 3° caso: rendita posticipata a rate variabili.

Lo schema è simile al primo caso, con la differenza che i valori  $V_h$  non sono pari al valore attuale di una rendita a rate costanti:

$$\begin{aligned} D_0 &= S & & = -V_0 \\ D_1 &= D_0 + i \cdot D_0 - R_1 & & = -V_1 \\ D_2 &= D_1 + i \cdot D_1 - R_2 & & = -V_2 \\ &\dots & & \\ D_h &= D_{h-1} + i \cdot D_{h-1} - R_h & & = -V_h \\ &\dots & & \\ D_n &= D_{n-1} + i \cdot D_{n-1} - R_n & & = -V_n = 0 \end{aligned}$$

# Appendice: le operazioni di rendita nell'aspetto dinamico

Ponendo per ipotesi che il pagamento della rata finale estingue il debito, si ha:

Si può dimostrare che, siccome la quota interessi è calcolata moltiplicando per  $i$  il debito in  $h-1$ , la variazione di rata  $R_h - R_{h-1}$  incide solo sulla quota capitale.

$$V_h = - \sum_{h=0}^n R_h \cdot (1+i)^{-(t-h)} \quad h = 0, 1, \dots, n$$

## Appendice: le operazioni di rendita nell'aspetto dinamico

### 4° caso: rendita anticipata a rate variabili.

Considerando, come nel secondo caso, che nel calcolo dei montanti  $D_h$  le rate siano pagate convenzionalmente in un istante infinitesimo successivo a  $h$ :

$$\begin{aligned} D_0 &= S & & = -V_0 \\ D_1 &= (D_0 - R_1) \cdot (1+i) & & = -V_1 \\ D_2 &= (D_1 - R_2) \cdot (1+i) & & = -V_2 \\ & \dots & & \\ D_h &= (D_{h-1} - R_h) \cdot (1+i) & & = -V_h \\ & \dots & & \\ D_n &= (D_{n-1} - R_n) \cdot (1+i) & & = -V_n = 0 \end{aligned}$$

# Appendice: le operazioni di rendita nell'aspetto dinamico

Per la condizione di rimborso del debito al termine del processo, il valore residuo è:

$$V_h = - \sum_{t=h+1}^n R_t \cdot (1+i)^{-(t-h-1)} \quad h = 0, 1, \dots, n$$

e valgono le stesse considerazioni fatte nel terzo caso.

# Appendice: le operazioni di rendita nell'aspetto dinamico

## 5° caso: rendita posticipata a quote capitale costanti.

Questo caso può essere considerato come applicazione del terzo tipo appena visto. L'ipotesi di base consiste in:

$$C_h = C = S/n$$

cioè la quota capitale è costante e pari al debito iniziale diviso il numero delle rate. Cerchiamo la rata, sempre come somma della quota capitale con la quota interessi.

Il debito residuo in  $h$  è pari al debito iniziale diminuito di  $h$  volte  $C$ :

$$D_h = S - h \cdot C = S - h \cdot S/n = S(1 - h/n) \quad h=1, \dots, n$$

La quota interesse in  $h$  è pari al montante precedente moltiplicato il tasso  $i$ :

$$I_h = i D_{h-1} = i \cdot S [1 - (h-1)/n] \quad h=1, \dots, n$$

e la rata sarà la somma delle due quote:

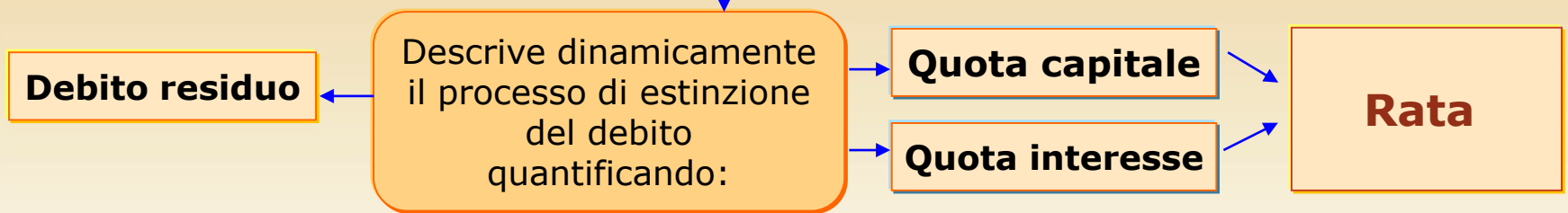
$$R_h = C + I_h = S/n + i \cdot S [1 - (h-1)/n] = S/n [1 + i \cdot (n-h+1)] \quad h=1, \dots, n$$

Si può dimostrare che le rate sono in progressione geometrica di ragione  $-i \cdot S/n$ .

# Conclusioni

- Conosciamo diverse modalità di rimborso di un prestito, a quote capitali costanti, a rata costante, con interessi anticipati, a rimborso unico, con preammortamento o a quote capitale qualsiasi; dati tasso d'interesse, durata e ammontare del debito, siamo in grado di stendere un piano d'ammortamento;
- Infine abbiamo affrontato il problema della valutazione dei prestiti, calcolando il valore complessivo del prestito ad una data epoca e ad un determinato tasso, tale valore è stato scomposto in usufrutto e nuda proprietà;
- Per chi volesse approfondire, in appendice abbiamo analizzato l'evoluzione delle quote capitale ed interesse, nonché del debito residuo che ci ha portato a costruire lo schema di ammortamento di un prestito.

# Piano d'ammortamento



**Ammortamento francese**

**Rate costanti**

**Ammortamento italiano**

**Quote capitale costanti**

**Ammortamento tedesco**

**Interessi anticipati**

**Ammortamento a rimborso unico**

**Unica quota capitale l'ultimo anno**

# ESERCIZI

## Esercizio 1

- Un istituto di credito ha concesso un prestito di £ 60.000.000 da restituire in 5 anni con quote capitali costanti al tasso d'interesse annuo del  $10\%$ . Stendere il relativo piano d'ammortamento.

$$QC = \frac{60.000.000}{5} = 12.000.000$$

$$DR(n) = S - n \cdot QC$$

$$QI(n) = DR(n - 1) \cdot i$$

$$R(n) = QC + QI(n)$$

<i>n</i>	<i>QC</i>	<i>QI</i>	<i>Rata</i>	<i>DR</i>
1	12.000.000	6.000.000	18.000.000	48.000.000
2	12.000.000	4.800.000	16.800.000	36.000.000
3	12.000.000	3.600.000	15.600.000	24.000.000
4	12.000.000	2.400.000	14.400.000	12.000.000
5	12.000.000	1.200.000	13.200.000	0

## Esercizio 2

- Un individuo si accorda per restituire un importo di 100 milioni mediante il versamento di 10 rate costanti di un ammortamento francese al tasso del 5%.
- Dopo 5 rate versate regolarmente sospende completamente il versamento delle successive due; a questo punto si accorda per restituire il prestito nei tempi previsti versando ulteriori 3 rate di un ammortamento francese condotto sul nuovo valore del debito  $D'$  all'8%.

- Calcolare:
  - a) l'importo del debito residuo all'epoca 5;
  - b) l'importo di  $D'$  all'epoca 7;
  - c) l'importo delle ultime 3 rate;
  - d) il tasso di costo dell'operazione complessiva (utilizzare come soglie dell'interpolazione i tassi del 5% e dell'8%).

- Abbiamo un ammortamento francese con  $n=10$ ;  $C=100.000.000$ ;  $i=5\%$ . Rata e debito residuo sono dati da:

$$R = \frac{100.000.000}{a_{\overline{10}|0,05}} = \frac{100.000.000}{7,7217} = 12.950.516$$

$$DR_5 = R \cdot a_{\overline{5}|0,05} = R \cdot 4,3295 = 56.069.259$$

- Il debito residuo  $D'$  si ottiene capitalizzando per due anni:

$$D' = (1,05)^2 \cdot D_5 = 61.816.358$$

- Importo delle ultime 3 rate:

$$R' = \frac{D'}{a_{\overline{3}|0,08}} = 23.986.818$$

$$\begin{aligned}
100.000.000 &= R \cdot a_{\overline{5}|i} + (1+i)^{-7} \cdot R' \cdot a_{\overline{3}|i} = \\
&= 12.950.516 \cdot \frac{1 - (1+i)^{-5}}{i} + (1+i)^{-7} \cdot 23.986.818 \\
&\quad \cdot \frac{1 - (1+i)^{-3}}{i}
\end{aligned}$$

$$i_0 = 0,05 \rightarrow A_0 = 102.492.122$$

$$i_1 = 0,08 \rightarrow A_1 = 87.776.905$$

$$i = i_0 + \frac{i_1 - i_0}{A_1 - A_0} \cdot (A - A_0)$$

$$\rightarrow i = 0,05 + \frac{0,08 - 0,05}{87.776.905 - 102.492.122} \cdot (100.000.000 - 102.492.122) =$$

$$= 0,05508$$

(esatto: 0,054604)

## Esercizio 3

- Un individuo si accorda per restituire un importo di 100 milioni mediante il versamento di 10 rate di un ammortamento italiano al tasso del 6%.
- Dopo 3 rate versate regolarmente sospende completamente il versamento delle successive tre; a questo punto si accorda per restituire il prestito nei tempi previsti versando ulteriori 4 rate di un ammortamento francese condotto sul nuovo valore del debito  $D'$  all'8%.

- Calcolare:
  - a) l'importo del debito residuo all'epoca 3;
  - b) l'importo di  $D'$  all'epoca 6;
  - c) l'importo delle ultime 4 rate;
  - d) il tasso di costo dell'operazione complessiva (utilizzare come soglie dell'interpolazione i tassi del 6% e dell'8%).

- Ammortamento italiano con  $n=10$ ;  $i=6\%$ ;  
 $C=100.000.000$
- Il debito residuo è dato da:

$$D_3 = \frac{C}{10} \cdot (10 - 3) = 70.000.000$$

- $D'$  si ottiene capitalizzando per 3 anni  
(nessuna rata pagata)

$$D' = D_3 \cdot (1,06)^3 = 83.371.120$$

- Abbiamo un nuovo ammortamento francese con  $n=4$ ;  $i=8\%$ ;  $C=D'$
- La rata è data da:

$$R = \frac{83.371.120}{a_{\overline{4}|0,08}} = \frac{83.371.120}{3,31213} = 25.171.452$$

100.000.000

$$= R_1 \cdot (1 + i)^{-1} + R_2 \cdot (1 + i)^{-2} + R_3 \cdot (1 + i)^{-3} + \\ + R \cdot (1 + i)^{-6} \cdot a_{\overline{4}|i}$$

$$R_1 = 16.000.000$$

$$R_2 = 15.400.000$$

$$R_3 = 14.800.000$$

$$i_0 = 0,06 \rightarrow A_0 = 102.714.535$$

$$i_1 = 0,08 \rightarrow A_1 = 92.304.448$$

$$\begin{aligned}
 i &= i_0 + \frac{i_1 - i_0}{A_1 - A_0} \cdot (A - A_0) \\
 \rightarrow i &= 0,06 + \frac{0,08 - 0,06}{92.304.448 - 102.714.535} \cdot (100.000.000 \\
 &\quad - 102.714.535) = \\
 &= 0,0652152 \\
 &\text{(esatto: 0,0649098)}
 \end{aligned}$$

## Esercizio 4

- Un individuo prende a prestito 150.000 euro che si impegna a restituire in 20 anni versando rate di un ammortamento francese al tasso del 7,10%. Dopo 12 anni, l'individuo sospende i pagamenti delle sole quote capitali per 4 anni mentre paga regolarmente il "servizio del debito" ovvero gli interessi sul debito rimasto in ulteriori 4 anni versando rate di un ammortamento francese al 10% annuo.

- Calcolare:
  - 1) la rata inizialmente stabilita tra le parti;
  - 2) il debito all'epoca 12;
  - 3) il debito all'epoca 16 su cui viene ricalcolata la nuova rata al *10%*;
  - 4) il tasso di costo dell'intera operazione (per interpolazione).

- Ammortamento francese con  $C=150.000$ ;  
 $n=20$ ;  $i=7,10$ .

$$R = \frac{C}{a_{\overline{20}|0,071}} = \frac{150.000}{10,5122} = 14.269,2$$

$$DR_{12} = R \cdot a_{\overline{8}|0,071} = 14.269,2 \cdot 5,9482 = 84.876,3$$

$$DR_{16} = DR_{12}$$

$$R' = \frac{DR_{16}}{a_{\overline{4}|0,1}} = \frac{84.876,3}{3,17} = 26.776$$

- Quote interessi:  $I = DR_{12} \cdot 0,071 = 6.026,2$
- Tasso di costo  $\rightarrow$

$$150.000 = R \cdot a_{\overline{12}|i} + I \cdot (1+i)^{-12} \cdot a_{\overline{4}|i} + R' \cdot (1+i)^{-16} \cdot a_{\overline{4}|i}$$

$$i_0 = 0,071 \rightarrow A_0 = 151.874$$

$$i_1 = 0,10 \rightarrow A_1 = 121.784$$

$$i = i_0 + \frac{i_1 - i_0}{A_1 - A_0} (A - A_0) \rightarrow i = 0,07281$$

(esatto: 0,07253)

## Esercizio 5

- Un'azienda si finanzia emettendo un prestito obbligazionario dell'importo di 1.000.000 di euro che si impegna a rimborsare mediante un ammortamento a rimborso unico, con rate annuali al 9,25% in 20 anni.
- Calcolare nuda proprietà ed usufrutto del prestito al tasso di valutazione del 12% all'epoca 6.

- Elementi del piano d'ammortamento:

$$QC(n) = \begin{cases} 0 & n \leq 19 \\ 1.000.000 & n = 20 \end{cases}$$

$$QI(n) = 1.000.000 \cdot 0,0925 = 92.500$$

$$R(n) = \begin{cases} 92.500 & n \leq 19 \\ 1.092.500 & n = 20 \end{cases}$$

$$DR(n) = \begin{cases} 1.000.000 & n \leq 19 \\ 0 & n = 20 \end{cases}$$

$$N_6 = 1.000.000 \cdot (1 + 0,12)^{-14} = 204.619,82$$

$$U_6 = 92.500 \cdot a_{\overline{14}|0,12} = 92.500 \cdot 6,6281 = 613.105,56$$

## Esercizio 6

- Dato un ammortamento francese per un importo iniziale pari a 100.000 euro, di durata 10 anni, realizzato al tasso del *10%* annuo d'interesse mediante il versamento di rate trimestrali calcolare la rata ed il debito residuo dopo 3 anni e mezzo.

- Ammortamento francese → rate trimestrali.
- $C=100.000$ ;  $n=10$ ;  $i=10\%$
- Calcoliamo tasso trimestrale e rata (abbiamo un totale di 40 rate):

$$(1 + i_{1/4})^4 = 1 + i = 1,10 \rightarrow i_{1/4} = 0,02411$$

$$R = \frac{100.000}{a_{\overline{40}|0,02411}} = 3.924,39$$

- Il debito residuo dopo 3 anni e mezzo (dopo 14 rate) si ottiene dalla formula:

$$\begin{aligned} DR_h &= R \cdot a_{\overline{n-h}|i} \\ \Rightarrow DR_{3,5} &= R \cdot a_{\overline{40-14}|i_{1/4}} = 3.924,39 \cdot 19,1507 = \\ &= 75.155,0463 \end{aligned}$$

## Esercizio 7

- Un prestito di 100.000 viene ammortizzato con otto rate annue posticipate. Il tasso effettivo è del  $10\%$ . Le prime tre rate sono uguali. Ciascuna delle successive è pari al doppio di quella iniziale.
- Calcolare:
  1. l'importo della rata iniziale  $R$ ;
  2. il debito residuo all'epoca 6, dopo aver corrisposto la rata.

- Somma dei valori attuali delle rate →

$$100.000 = R \cdot a_{\overline{3}|0,10} + 2R \cdot (1,10)^{-3} \cdot a_{\overline{5}|0,10}$$

$$100.000 = (a_{\overline{3}|0,10} + 2 \cdot (1,10)^{-3} \cdot a_{\overline{5}|0,10}) \cdot R$$

$$R = 100.000 / (a_{\overline{3}|0,10} + 2 \cdot (1,10)^{-3} \cdot a_{\overline{5}|0,10})$$

$$\rightarrow R \simeq 12.220,46$$

- Il debito residuo all'epoca 6 si ottiene attualizzando le rimanenti rate:

$$\begin{aligned} DR_6 &= 2R \cdot a_{\overline{2}|0,10} = \\ &= 2 \cdot 12.220,46 \cdot \frac{1 - 1,10^{-2}}{0,10} = 42.418,11 \end{aligned}$$

## Esercizio 8

- Un individuo prende a prestito 200.000 euro che si impegna a restituire in 15 anni mediante il versamento di rate trimestrali costanti posticipate al tasso  $i=9\%$ .

Calcolare:

- 1) la rata trimestrale;
- 2) il debito residuo dopo 5 anni;
- 3) il valore del prestito dopo 10 anni al tasso annuo di valutazione  $j=i+0,02$ .

- Abbiamo complessivamente 60 rate, calcoliamo preliminarmente il tasso trimestrale:

$$i_{1/4} = (1 + i)^{1/4} - 1 \rightarrow i_{1/4} = 0,02178$$

$$a_{\overline{60}|0,02178} = \frac{1 - (1,02178)^{-60}}{0,02178} = 33,3114$$

$$\Rightarrow R = \frac{200.000}{a_{\overline{60}|0,02178}} = 6.003,95$$

- Debito residuo dopo 5 anni → somma dei valori attuali delle 40 rate rimanenti:

$$DR_5 = R \cdot a_{\overline{40}|0,02178}$$
$$a_{\overline{40}|0,02178} = \frac{1 - (1,02178)^{-40}}{0,02178} = 26,5215$$
$$\rightarrow DR_5 = 6.003,95 \cdot 26,5215 = 159.233,49$$

$$j = i + 0,02 = 0,11$$

$$j_{1/4} = (1,11)^{1/4} - 1 = 0,02643$$

$$VA_{10} = R \cdot a_{\overline{20}|0,02643}$$

$$a_{\overline{20}|0,02643} = \frac{1 - (1,02643)^{-20}}{0,02643} = 15,3802$$

$$\rightarrow VA_{10} = 92.341,66$$

## Esercizio 9

- Un individuo prende a prestito 150.000 euro che si impegna a restituire in 10 anni mediante il versamento di rate costanti quadrimestrali al 9% annuo d'interesse.
- Dopo 6 anni inizia per il debitore un periodo di difficoltà finanziaria che lo conduce a pagare i soli interessi per il settimo anno e nulla per l'ottavo.
- A questo punto si accorda per estinguere il prestito nei tempi inizialmente previsti mediante il versamento di rate ancora costanti e quadrimestrali calcolate all'*11%* effettivo annuo.

- Calcolare:
  1. la rata del primo ammortamento (quello iniziale);
  2. il debito su cui viene ricalcolata la nuova rata (all'epoca 8);
  3. il tasso di costo dell'operazione complessiva (ovviamente compreso tra i due tassi di remunerazione).

- Ammortamento francese → rate quadrimestrali.
- $C=150.000$ ;  $n=10$ ;  $i=9\%$ .
- Calcoliamo tasso quadrimestrale e rata (abbiamo un totale di 30 rate):

$$(1 + i_{1/3})^3 = 1 + i = 1,09 \rightarrow i_{1/3} = 0,02914$$

$$R = \frac{150.000}{a_{\overline{30}|0,02914}} = 7.568,30$$

- Il debito residuo dopo 6 anni (dopo 18 rate) si ottiene dalla formula:

$$\begin{aligned} DR_h &= R \cdot a_{\overline{n-h}|i} \\ \Rightarrow DR_6 &= R \cdot a_{\overline{30-18}|i_{1/3}} = 7.568,30 \cdot 10,0052 = \\ &= 75.722,02 \end{aligned}$$

- Il DR al termine del settimo anno è lo stesso (solo quota interessi), al termine dell'ottavo si ottiene capitalizzando per un anno (nessun pagamento)

$$DR_7 = DR_6$$

$$DR_8 = (1 + i) \cdot DR_6 = 1,09 \cdot 75.722,02 = \\ = 82.537,00$$

- La rata del nuovo ammortamento è data da:
- Ammortamento francese  $\rightarrow$  rate quadrimestrali
- $C=82.537,00$ ;  $n=2$ ;  $i=11\%$ .
- Calcoliamo tasso quadrimestrale e rata (abbiamo un totale di 6 rate):

$$(1 + i_{1/3})^3 = 1 + i = 1,11 \rightarrow i_{1/3} = 0,0354$$

$$R' = \frac{82.535,7}{a_{\overline{6}|0,0354}} = 15.509,87$$

150.000

$$= R \cdot a_{\overline{18}|i_{1/3}} + I \cdot (1 + i_{1/3})^{-18} \cdot a_{\overline{3}|i_{1/3}} + \\ + R' \cdot (1 + i_{1/3})^{-24} \cdot a_{\overline{6}|i_{1/3}}$$

$$R = 7.568,30$$

$$R' = 15.509,87$$

$$I = DR_6 \cdot i_{1/3} = 75.722,02 \cdot 0,02914 \\ = 2.206,73$$

$$i_0 = 0,02914 \rightarrow A_0 = 150.865$$

$$i_1 = 0,0354 \rightarrow A_1 = 138.606$$

$$i = i_0 + \frac{i_1 - i_0}{A_1 - A_0} \cdot (A - A_0)$$

$$\rightarrow i = 0,02914 + \frac{0,0354 - 0,02914}{138.606 - 150.865} \cdot (150.000 - 150.865) =$$

$$= 0,029582 \rightarrow i = 0,091396$$

$$(\text{esatto: } 0,029555 \rightarrow i = 0,091313)$$

## Esercizio 10

- Un individuo si accorda per restituire un importo di 500 mila euro mediante il versamento di rate costanti semestrali per 10 anni al tasso effettivo annuo di interesse del 7%.
- Dopo le prime 10 rate semestrali versate regolarmente il debitore incontra un periodo di difficoltà finanziarie nel quale paga solo gli interessi per 2 semestri e sospende completamente il versamento delle rate per altri due semestri; a questo punto si accorda per restituire il prestito nei tempi previsti versando rate semestrali di un nuovo ammortamento francese condotto sul nuovo valore del debito  $D'$  al tasso annuo del 10%.

- Calcolare:
  - a) l'importo del debito residuo in corrispondenza dell'ultima epoca in cui i pagamenti avvengono regolarmente;
  - b) l'importo di  $D'$ ;
  - c) l'importo delle nuove rate "ricontrattate";
  - d) il tasso di costo su base annua dell'operazione complessiva.

- Calcoliamo i tassi bimestrali

$$i = 0,07 \rightarrow i_{1/2} = 0,034408$$

$$i = 0,10 \rightarrow i_{1/2} = 0,048809$$

- Rata del primo ammortamento:

$$R = \frac{500.000}{a_{\overline{20}| 0,034408}} = 34.992,99$$

- Debiti residui:

$$D_{10} = R \cdot a_{\overline{10}|0,034408} = 34.992,99 \cdot 8,34148 = 291.890,26$$

$$D_{12} = D_{10}$$

$$D_{14} = (1 + i) \cdot D_{12} = 312.322,58$$

$$I_{11} = I_{12} = D_{10} \cdot i_{1/2} = 10.043,94$$

- Calcolo delle nuove rate:

$$R' = \frac{312.322,58}{a_{\overline{6}|0,048809}} = \frac{312.322,58}{5,09508} = 61.299,11$$

- Equazione del tasso di costo:

$$500.000 = R \cdot a_{\overline{10}|j} + I \cdot (1 + j)^{-10} \cdot a_{\overline{2}|j} + \\ + R' \cdot (1 + j)^{-14} \cdot a_{\overline{6}|j}$$

$$i_0 = 0,034408 \rightarrow A_0 = 509.317$$

$$i_1 = 0,048809 \rightarrow A_1 = 443.663$$

$$\begin{aligned} i &= i_0 + \frac{i_1 - i_0}{A_1 - A_0} (A - A_0) = \\ &= 0,034408 + \\ &\frac{0,048809 - 0,034408}{443.663 - 509.317} (500.000 \\ &- 509.317) = \\ &= 0,036452 \rightarrow 7,423\% \\ &(\text{esatto: } 7,387\%) \end{aligned}$$

## Esercizio 11

- Un'azienda pone in essere un investimento che a fronte di un'uscita immediata di 10.000 euro assicura 7 entrate di 1.900 euro ciascuna.
- Per l'importo iniziale l'azienda si finanzia al 50% con capitale che ha già a disposizione e per il restante 50% mediante un prestito che si impegna a restituire versando 5 rate di un ammortamento francese al 7%.
- Calcolare:
  - a) i flussi netti dell'operazione che si trovano sull'asse dei tempi;
  - b) il tasso di rendimento dell'operazione complessiva.

- Prima operazione:  
 (-10.000;1.900;1.900; 1.900; 1.900;  
 1.900; 1.900; 1.900)/(0;1;2;3;4;5;6;7)
- Seconda operazione: ammortamento francese al 7% di un importo di 5.000 in 5 anni.
- Rata dell'ammortamento:

$$R = \frac{5.000}{a_{\overline{5}|0,07}} = \frac{5.000}{4,1002} = 1.219,45$$

- Scadenzario della seconda operazione:
- $(5.000, -1.219,45; -1.219,45; -1.219,45; -1.219,45; -1.219,45; 0; 0)$   
 $/(0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7)$

→ Flussi netti:

$(-5.000; 680,55; 680,55; 680,55; 680,55; 680,55; 1.900; 1.900)$

Tasso di rendimento dell'operazione:

5.000

$$= 680,55 \cdot a_{\overline{5}|i} + 1.900 \cdot (1+i)^{-5} \cdot a_{\overline{2}|i}$$

$$i_0 = 0,09 \rightarrow A_0 = 4.819,38$$

$$i_1 = 0,07 \rightarrow A_1 = 5.239,66$$

$$i = i_0 + \frac{i_1 - i_0}{A_1 - A_0} (A - A_0) =$$

$$= 0,09 + \frac{0,07 - 0,09}{5.239,66 - 4.819,38} (5.000$$

$$- 4.819) =$$

$$= 0,081387$$

(esatto: 8,1108%)

## Esercizio 12

- Il creditore di un ammortamento di un importo di 100.000 euro che si è convenuto di restituire in 10 anni mediante il versamento di rate di un ammortamento italiano al  $10\%$ , cede all'epoca 6 i futuri incassi ad un terzo soggetto che paga un prezzo tale da garantirsi un rendimento lordo dall'operazione del  $13\%$ .
- Calcolare:
  - a) il prezzo pagato dal terzo soggetto;
  - b) il rendimento netto che il terzo soggetto realizza dall'operazione se le quote interessi che incasserà sono gravate da una tassazione del  $20\%$  (ovvero se delle future quote interessi il  $20\%$  viene perduto per la presenza di tasse).

## Piano ammortamento dall'epoca 7

<i>N</i>	<i>QI</i>	<i>QC</i>	<i>Rata</i>
7	4.000	10.000	14.000
8	3.000	10.000	13.000
9	2.000	10.000	12.000
10	1.000	10.000	11.000

- Prezzo pagato:

$$P = \frac{14.000}{1,13} + \frac{13.000}{(1,13)^2} + \frac{12.000}{(1,13)^3} + \frac{11.000}{(1,13)^4} = 37.633,4$$

→ nuovo piano d'ammortamento con una tassazione del 20% sulle quote interessi:

<i>N</i>	<i>QI</i>	<i>QC</i>	<i>Rata</i>
7	3.200	10.000	13.200
8	2.400	10.000	12.400
9	1.600	10.000	11.600
10	800	10.000	10.800

- Equazione per il rendimento netto:

$$\frac{13.200}{1+i} + \frac{12.400}{(1+i)^2} + \frac{11.600}{(1+i)^3} + \frac{10.800}{(1+i)^4} = 37.633,4$$

- Interpolazione:

$$i_0 = 0,13 \rightarrow A_0 = 36.055,7$$

$$i_1 = 0,10 \rightarrow A_1 = 38.339,7$$

$$\begin{aligned}i &= i_0 + \frac{i_1 - i_0}{A_1 - A_0} (A - A_0) = \\&= 0,13 + \frac{0,10 - 0,13}{38.339,7 - 36.055,7} (37.633,4 \\&\quad - 36.055,7) = \\&= 0,109277 \\&\text{(esatto: } 10,8952\%) \end{aligned}$$

## Esercizio 13: completare il seguente piano d'ammortamento

<i>anni</i>	<i>QC</i>	<i>QI</i>	<i>Rata</i>	<i>DR</i>
0				10.000
1	<u>2.000</u>	<u>1.000</u>	3.000	<u>8.000</u>
2	3.000	800	<u>3.800</u>	5.000
3	5.000	500	5.500	0

- Rimane da determinare il tasso d'interesse:

$$10.000 \cdot i = 1.000 \rightarrow i = 0,10$$

→ 10%

## Esercizio 14

- Un capitale di 5 milioni di euro viene ammortizzato al tasso annuo del *10%* con rate costanti pagabili annualmente, in 3 anni e 65 giorni, con una rata di preammortamento pagabile dopo un anno e 65 giorni. Assumendo per l'anno la durata civile (365 giorni), compilare il piano d'ammortamento richiesto indicando gli importi in euro.

- Tasso d'interesse  $i^*$  relativo al periodo indicato:

$$i^* = (1 + i)^{\frac{365+65}{365}} - 1 = (1 + 0,1)^{\frac{365+65}{365}} - 1 = 0,11883$$

- La prima quota interessi vale quindi:

$$QI(1) = D \cdot i^* = 594.148,48$$

- Le rate all'epoca 2 e 3 sono date da:

$$R(2) = R(3) = \frac{D}{a_{\overline{2}|i}} = \frac{5.000.000}{1,7355} = 2.880.952,38$$

- Piano completo:

	Rata	Q.C.	Q.I.	D.R.
1	594.148,48	0	594.148,48	5.000.000,00
2	2.880.952,38	2.380.952,38	500.000,00	2.619.047,62
3	2.880.952,38	2.619.047,62	261.904,76	0

## Esercizio 15

- Si consideri l'ammortamento di 2.000 euro in 8 anni a rata costante  $R$ , pagabile alla metà e alla fine di ogni anno. Si determini  $R$  in modo che il tasso interno di rendimento dell'operazione di ammortamento risulti del 15%. Indicare inoltre, relativamente all'ultima rata del piano d'ammortamento, la decomposizione in quota capitale  $C$  e in quota interesse  $I$ .

- Il tasso di rendimento semestrale è dato da

$$i_{1/2} = \sqrt{1 + i} - 1 = 0,0724$$

- Dall'equazione di equilibrio

$$D = R \cdot a_{\overline{2n}|i_{1/2}}$$

- si deduce la rata

$$R = \frac{D}{a_{\overline{2n}|i_{1/2}}} = \frac{2.000}{9,2994} = 215,0668$$

- La quota capitale vale:

$$QC(n) = R \cdot v = \frac{R}{1 + i_{1/2}} = 200,5508$$

- La quota interesse vale:

$$QI(n) = R \cdot (1 - v) = 14,5160$$

## Esercizio 16

- Determinare il numero minimo di semestralità con le quali si può ammortizzare al tasso annuo  $i=5\%$  un debito  $S = 30.000$  se si è in grado di pagare in futuro non più di  $1.000$  alla fine di ogni semestre. Determinare inoltre il valore della rata.

- Dalla relazione:

$$S = R \cdot a_{\overline{n^*}|i_{1/2}} = R \cdot \frac{1 - (1 + i_{1/2})^{-n^*}}{i_{1/2}}$$

con  $i_{1/2} = \sqrt{1 + i} - 1 = 0,0247$

si ricava:  $n^* = -\frac{\log\left(1 - \frac{S}{R} \cdot i_{1/2}\right)}{\log(1 + i_{1/2})} = 55,3537$

- Di conseguenza,  $n$  è il massimo intero contenuto in  $n^*$ , ossia  $n = 56$

- Il valore della rata è:

$$R = \frac{S}{a_{\overline{n}|i_{1/2}}} = \frac{30.000}{30,1642} = 994,5576$$

## Esercizio 17

- Un'azienda pone in essere un investimento che gli costa oggi 10.000 e fornisce entrate pari a 7.000 il primo anno e 8.000 il secondo.
- Per l'importo iniziale di 10.000 l'azienda si finanzia in base a due possibili alternative:
  - I) un ammortamento a rimborso unico al  $15\%$  con contestuale reinvestimento degli importi netti in entrata al  $13\%$ ;
  - II) mediante rimborso graduale nel quale utilizza gli importi in entrata per pagare le rate ed estinguere il debito più rapidamente possibile.
- Calcolare:
  - a) quale delle alternative di finanziamento è più conveniente per l'impresa (*suggerimento*: utilizzare i saldi netti finali delle operazioni);
  - b) il tasso implicito della sola operazione di investimento.

- La prima operazione di investimento ha per scadenziario:

$$A: (-10.000; 7.000; 8.000)/(0; 1,2)$$

- Consideriamo l'alternativa I).
- Il piano d'ammortamento a rimborso unico prevede il pagamento di una quota interesse all'epoca uno pari a  $10.000 \cdot 0,15 = 1.500$  mentre all'epoca due abbiamo il pagamento dell'interesse e del capitale preso a prestito, ossia complessivamente 11.500.
- Lo scadenziario sarà quindi:

$$R_1 = (10.000; -1.500; -11.500)/(0; 1; 2)$$

- Il saldo delle due operazioni A ed  $R_1$  sarà quindi:

$$S_1: (0; 5.500; -3.500)$$

- L'importo disponibile all'epoca *uno* può essere reinvestito al 13%, perciò il saldo finale all'epoca *due* sarà:

$$5.500 \cdot 1,13 - 3.500 = \boxed{2.715}$$

- Consideriamo l'alternativa II).
- Abbiamo il seguente piano d'ammortamento (rimborso di un debito di 10.000 al tasso del 15%):

n	QC	QI	R	DR
0				10.000
1	5.500	1.500	7.000	4.500
2	4.500	675	5.175	0

- La prima entrata di 7.000 è utilizzata come prima rata. La quota interesse vale  $10.000 \cdot 0,15 = 1.500$ , di conseguenza la prima quota capitale vale  $7.000 - 1.500 = 5.500$ .
- Il debito residuo all'epoca uno è  $10.000 - 5.500 = 4.500$ .
- Potremo perciò dedurre la quota interesse all'epoca due:

$$4.500 \cdot 0,15 = 675$$

- La quota capitale all'epoca *due* dovrà essere pari a 4.500 (debito residuo all'epoca *uno*) mentre la rata da pagare all'epoca *due* sarà:  $4.500 + 675 = 5.175$  .
- Tenendo conto dell'entrata di 8.000, all'epoca *due*, il saldo netto sarà:

$$8.000 - 5.175 = \boxed{2.825}$$

- L'alternativa II) risulta quindi più vantaggiosa, in quanto produce all'epoca *due* un saldo netto maggiore.
- Il tasso dell'operazione di investimento si ottiene risolvendo l'equazione di equilibrio finanziario (dividendo tutti gli importi per 1.000 e tralasciando la soluzione negativa):

$$8v^2 + 7v - 10 = 0 \rightarrow v = \frac{-7 + \sqrt{369}}{16} = 0,7631$$

$$\Rightarrow i = \frac{1}{v} - 1 \simeq 31,05\%$$

## Esercizio 18

- Un individuo ottiene un prestito personale di Euro 20.000 che deve restituire in 11 rate semestrali mediante un ammortamento francese al tasso dell'8% annuo.
- Dopo un anno e mezzo ha la possibilità di ottenere un finanziamento da parte di un altro istituto di credito al tasso agevolato del 4,5% annuo. Decide di accedervi per rimborsare anticipatamente l'80% del debito residuo del finanziamento che ha in corso.
- Calcolare il nuovo debito residuo e la nuova rata del primo finanziamento dopo che avviene il rimborso parziale. Calcolare inoltre la rata del finanziamento agevolato sapendo che viene applicato un ammortamento francese con rate semestrali e che tale ammortamento scade contemporaneamente all'altro.

- Il tasso semestrale equivalente è

$$i_{1/2} = \sqrt{1 + i} - 1 = 0,03923$$

- La rata dell'ammortamento iniziale è

$$R = \frac{20.000}{a_{\overline{11}|} i_{1/2}} = 2.273,52$$

- Di conseguenza, il debito residuo dopo un anno e mezzo (quando mancano ancora otto rate) vale

$$D(1,5) = R \cdot a_{\overline{8}|} i_{1/2} = 15.355,8$$

- Il nuovo debito residuo sarà perciò

$$D'(1,5) = 0,20 \cdot D(1,5) = 3.071,15$$

- La nuova rata del primo finanziamento si ottiene dalla seguente formula:

$$\hat{R} = \frac{D'(1,5)}{a_{\overline{8}|i_{1/2}}} = 454,703$$

- Prima di calcolare la rata del nuovo finanziamento, determiniamo il nuovo tasso semestrale equivalente. Si ha:

$$j_{1/2} = \sqrt{1+j} - 1 = 0,02225.$$

- Si ottiene perciò:

$$\tilde{R} = \frac{0,8 \cdot D(1,5)}{a_{\overline{8}|j_{1/2}}} = 1.693,29$$

## Esercizio 19

- Un soggetto ha iniziato due anni fa a restituire due debiti: il primo di 300.000 a fronte del quale paga rate costanti pari a 50.000 per 8 anni, ed il secondo di 500.000 a fronte del quale paga rate di 75.000 per 8 anni.
- Oggi vuole unificare le due posizioni debitorie in modo di estinguere ciò che resta da pagare mediante il versamento di rate di un ammortamento francese decennale condotto ad un tasso che rende lo scambio finanziariamente equivalente. Calcolare la rata di tale nuovo ammortamento.

- I due debiti prevedono nel complesso un importo di 800.000 con rimborso di rate costanti pari a 125.000 per 8 anni. Il tasso di costo complessivo per il debitore si ottiene risolvendo l'equazione di equilibrio finanziario:

$$800.000 = 125.000 \cdot \frac{1 - (1 + i)^{-8}}{i}.$$

- La soluzione (per interpolazione) è  $i \approx 5,24\%$  .
- Il debitore ha pagato all'epoca *uno* una rata complessiva pari a 125.000 mentre dall'epoca *due* paga una rata costante (per dieci anni) tale da rendere la seconda alternativa equivalente.

- La condizione è perciò:

$$\begin{aligned}800.000 &= 125.000 \cdot (1 + i)^{-1} + R \cdot \frac{1 - (1 + i)^{-10}}{i} \cdot (1 + i)^{-1} = \\ &= 118.771,99 + 7,250955 \cdot R \\ \rightarrow R &= \frac{681.228,01}{7,250955} = 93.950,11\end{aligned}$$

## Esercizio 20

- Un prestito di Euro 450.000 è restituito in 3 anni mediante un ammortamento tedesco che prevede quote capitali costanti semestrali ed è condotto al 7% effettivo annuo. Calcolare nuda proprietà ed usufrutto all'8% all'epoca 1,25.

- Tasso semestrale equivalente:  $i_{1/2} = \sqrt{1+i} - 1 = 0,0344$
- Fattore di sconto:  $v_{1/2} = (1 + i_{1/2})^{-1} = 0,9667$
- Tasso di sconto:  $d_{1/2} = 1 - v_{1/2} = 0,0333$
- Piano d'ammortamento completo:

N (semestri)	Quote capitale	Quote interessi	Rata	Debito residuo
<b>0</b>	<b>0</b>	<b>14.968,58</b>	<b>14.968,58</b>	<b>450.000</b>
<b>1</b>	<b>75.000</b>	<b>12.473,82</b>	<b>87.473,82</b>	<b>375.000</b>
<b>2</b>	<b>75.000</b>	<b>9.979,05</b>	<b>84.979,05</b>	<b>300.000</b>
<b>3</b>	<b>75.000</b>	<b>7.484,29</b>	<b>82.484,29</b>	<b>225.000</b>
<b>4</b>	<b>75.000</b>	<b>4.989,53</b>	<b>79.989,53</b>	<b>150.000</b>
<b>5</b>	<b>75.000</b>	<b>2.494,76</b>	<b>77.494,76</b>	<b>75.000</b>
<b>6</b>	<b>75.000</b>	<b>0</b>	<b>75.000,00</b>	<b>0</b>

- Il calcolo di nuda proprietà ed usufrutto al tasso  $j=8\%$  sarà perciò:

$$N_{1,25} = \frac{75.000}{(1+j)^{0,25}} + \frac{75.000}{(1+j)^{0,75}} + \frac{75.000}{(1+j)^{1,25}} + \frac{75.000}{(1+j)^{1,75}} = 278.034,92$$
$$U_{1,25} = \frac{7.484,29}{(1+j)^{0,25}} + \frac{4.989,53}{(1+j)^{0,75}} + \frac{2.494,76}{(1+j)^{1,25}} = 14.317,29$$

## **MODULO 4**

# **ANALISI DEGLI INVESTIMENTI IN CONDIZIONI DETERMINISTICHE (OPERAZIONI FINANZIARIE COMPLESSE)**

# Argomenti

- Obiettivi.
- Introduzione.
- L'omogeneità delle operazioni finanziarie.
- Il valore attuale netto (VAN).
- Il tasso interno di rendimento (TIR).
- Ricerca del TIR: metodo dell'interpolazione lineare.
- Il caso dei pagamenti non periodici.
- Il criterio del TIR.
- Il periodo di recupero (payback period).
- Appendice: uso del foglio elettronico per il calcolo del VAN.
- Appendice: uso del foglio elettronico per il payback period.
- Appendice: il caso dei pagamenti periodici (cenni al metodo di Newton).
- Appendice: il caso dei pagamenti periodici (uso del foglio elettronico).
- Appendice: il TAEG e il TAN.

# Obiettivi

Gli *obiettivi* di questo modulo sono:

- conoscere le metodologie di calcolo più comuni nella scelta tra due o più investimenti;
- risolvere semplici calcoli per trovare il TIR e il VAN e dare un giudizio di convenienza sulle operazioni finanziarie in base ai risultati;
- analizzare le differenze ed i punti di forza/debolezza dei criteri del VAN e del TIR;
- conoscere il semplice metodo del periodo di recupero.

# Introduzione

Quando ci si trova a dover **confrontare operazioni finanziarie** diverse allo scopo di giudicare sulla loro convenienza economica, spesso si fa ricorso alla determinazione di un criterio che tenga conto degli aspetti monetari e temporali delle operazioni stesse.

Nella matematica finanziaria si utilizzano vari metodi, i quali possono essere utilizzati anche assieme, per selezionare la scelta più conveniente senza commettere errori di valutazione.

In questo modulo ci proponiamo di fornire semplicemente gli opportuni algoritmi relativi al criterio del valore attuale netto, o VAN, al criterio del tasso di rendimento interno, o TIR, e al criterio del periodo di recupero, o Payback period.

Inoltre faremo un approfondimento relativamente al caso particolare e frequente dei pagamenti periodici, mediante l'utilizzo del metodo di Newton per la ricerca del tasso di rendimento interno.

## L'omogeneità delle operazioni finanziarie

Qualunque criterio si utilizzi per valutare la convenienza economica delle operazioni finanziarie, occorre che queste siano omogenee fra loro per poter essere confrontate.

Per chiarire il concetto consideriamo alcuni **investimenti**:

$$I_1 = \{-100, 40, 50, 60\} / \{0, 1, 2, 3\}$$

$$I_2 = \{-80, 38, 48, 35\} / \{0, 1, 2, 3\}$$

$$I_3 = \{-100, 30, 10, 40, 20\} / \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

# L'omogeneità delle operazioni finanziarie

Se il nostro problema è individuare l'operazione finanziaria più conveniente tra  $I_1$  e  $I_2$ , ci rendiamo conto che l'impostazione non è corretta, infatti le due alternative d'investimento richiedono esborsi iniziali diversi.

Anche un confronto fra l'investimento  $I_1$  e l'investimento  $I_3$  non può essere effettuato, nonostante le due operazioni prevedano lo stesso esborso iniziale, la loro scadenza è diversa.

Come già detto tutto ciò vale indipendentemente dal criterio utilizzato per valutare le operazioni finanziarie.

In conclusione, affinché le operazioni finanziarie siano correttamente **confrontate** fra loro, è necessario che siano caratterizzate quanto meno dallo **stesso esborso iniziale** e dalla **stessa durata**.

# Il valore attuale netto (VAN)

Consideriamo un'operazione finanziaria

$$\mathbf{x} / \mathbf{t} = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n\} / \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$$

in cui gli importi  $x_k$  possono assumere sia valori positivi che negativi.

Definiamo il **VAN** (valore attuale netto) di tale operazione finanziaria in base ad un certo tasso  $j$ , come la somma dei valori attuali dei valori  $x_k$  in  $t_0$ .

Osserviamo che tale valore è relativo all'istante  $t_0$  e dipende anche dalla scelta del tasso di valutazione  $j$ .

Intuitivamente, qualora chiamassimo costi i valori  $x_k$  negativi, e ricavi i valori  $x_k$  positivi, il VAN dell'operazione finanziaria  $x/t$ , in base ad un certo tasso  $j$ , è uguale alla differenza tra il valore attuale dei ricavi ed il valore attuale dei costi: ovviamente tra due operazioni finanziarie confrontabili sceglieremo quella che fornisce il VAN più elevato.

Il VAN viene anche denominato REA (risultato economico attualizzato).

$$VAN = \sum_{k=0}^n x_k \cdot (1 + j)^{-(t_k - t_0)}$$

## Il valore attuale netto (VAN)

Ad esempio calcoliamo il VAN in  $t=0$  al tasso  $j=2\%$  delle seguenti due operazioni finanziarie:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} / t &= \{-100; 10; 10; 10; 110\} / \{0; 1; 2; 3; 4\} \\ \mathbf{x}' / t &= \{-100; 20; 10; 9; 100\} / \{0; 1,5; 2; 3,5; 4\} \end{aligned}$$

$$\text{VAN} = -100 + 10 \cdot 1,02^{-1} + 10 \cdot 1,02^{-2} + 10 \cdot 1,02^{-3} + 110 \cdot 1,02^{-4} = 30,46183$$

$$\text{VAN}' = -100 + 20 \cdot 1,02^{-1,5} + 10 \cdot 1,02^{-2} + 9 \cdot 1,02^{-3,5} + 100 \cdot 1,02^{-4} = 29,80823$$

Possiamo quindi stabilire che, assegnato il tasso di valutazione  $j=2\%$ , la prima operazione è più conveniente in quanto il VAN è più alto rispetto alla seconda.

Osserviamo che il risultato dipende strettamente dal tasso scelto: infatti se utilizzassimo il tasso  $j=8\%$ , il risultato sarebbe completamente diverso:

$$\text{VAN} = 6,624254; \quad \text{VAN}' = 6,770615$$

La seconda operazione risulta ora più conveniente.

# Il valore attuale netto (VAN)

Il criterio del VAN per la scelta tra due o più investimenti ha due limiti principali alla sua applicazione:

**1) la scelta del tasso di valutazione  $j$ , essendo legata a considerazioni non del tutto oggettive, condiziona fortemente il risultato;**

**2) l'ipotesi di un tasso di valutazione costante nel periodo di osservazione è troppo restrittiva se pensiamo che nella realtà le variazioni di tasso possono essere rilevanti nel tempo.**

Il secondo può essere risolto, come vedremo, mediante l'uso dei tassi a termine, cioè considerando la presenza di tassi diversi per le diverse scadenze.

# Il tasso interno di rendimento (TIR)

Assegnata una operazione finanziaria  $\mathbf{x}/t$  di importi  $x_h$  alle scadenze  $t_h$  con  $h=0,1,\dots,n$ , definiamo **tasso interno di rendimento (TIR)** di  $\mathbf{x}$ , il tasso di interesse  $i^*$  della legge di capitalizzazione esponenziale per cui l'operazione assegnata risulti equa.

Per definizione, quindi, il TIR è la soluzione  $i^*$  della seguente equazione nell'incognita  $i$ :

$$\sum_{k=0}^n x_k \cdot (1+i)^{-(t_k-t_0)} = 0$$

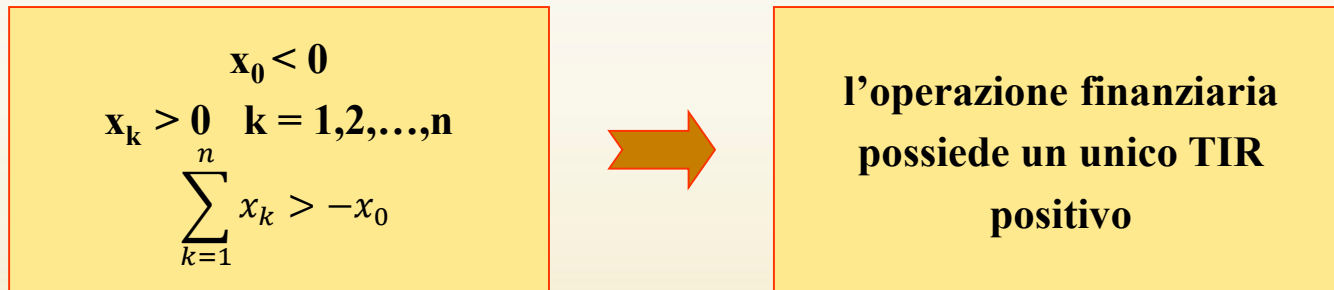
Siccome il primo membro non è altro che il VAN dell'operazione  $\mathbf{x}/t$ , si può definire semplicemente il TIR come quell'unico tasso che annulla il VAN. D'ora in poi, senza perdita di generalità, assumeremo come istante iniziale  $t_0$  l'origine dell'asse delle ascisse, e scriveremo l'equazione del TIR nella incognita  $v=(1+i)^{-1}$ . In tal modo scriveremo:

$$\sum_{k=0}^n x_k \cdot v^{t_k} = 0$$

# Il tasso interno di rendimento (TIR)

E' opportuno notare che un'operazione finanziaria potrebbe non essere dotata di TIR; ciò avviene quando l'equazione del TIR non ammette soluzioni reali positive oppure ne ammette più di una.

Esiste un teorema (Norstrom) che fornisce una condizione sufficiente per l'esistenza del TIR:



Sostanzialmente se il primo pagamento è inferiore alla somma dei successivi incassi, il TIR esiste ed è significativo.

# Il tasso interno di rendimento (TIR)

Consideriamo ora il caso dei pagamenti periodici, assumendo come periodo unitario l'anno. Essendo  $t_k=k$ , l'equazione del TIR diventa

$$\sum_{k=0}^n x_k \cdot v^k = 0$$

cioè un'equazione algebrica di grado  $n$  nell'incognita  $v$ . Per il teorema fondamentale dell'algebra il polinomio  $p_n(v)$  al primo membro è scomponibile nel modo seguente:

$$\sum_{k=0}^n x_k \cdot v^k = x_n \cdot (v - r_1)^{m_1} \cdot (v - r_2)^{m_2} \dots (v - r_h)^{m_h}$$

I numeri complessi  $r_1, r_2, \dots, r_h$ , sono le radici del polinomio, mentre gli esponenti (molteplicità delle radici) sono tali che  $n=m_1+m_2+\dots+m_h$ . L'unico caso che interessa dal punto di vista finanziario è quello secondo cui il polinomio dato ammette l'unica radice (detta anche "zero") compresa tra 0 e 1, in quanto trattasi di un tasso d'interesse.

# Il tasso interno di rendimento (TIR)

**Teorema di Cartesio:** se chiamiamo  $N$  il numero delle variazioni nella successione dei segni dei coefficienti di  $p_n(v)$ , ed  $h$  il numero delle radici positive di  $p_n(v) = 0$  (contate con molteplicità), allora si ha  $N = h$ .

Grazie a questo teorema, se poniamo  $N=0$  (nessun cambio di segno dei coefficienti – importi tutti positivi o tutti negativi) allora  $h=0$  ossia non ci sono soluzioni per il polinomio (non esiste il TIR). Se poniamo ad esempio  $N=1$ , allora  $h=1$  perciò esiste una soluzione positiva. Si è ottenuto il seguente risultato:

**Condizione sufficiente** affinché l'equazione del TIR ammetta un'unica soluzione positiva è che gli importi  $x_0, \dots, x_n$ , cambino segno solo una volta.

In sostanza è il caso del pagamento seguito dagli incassi (investimento in senso stretto) oppure dell'incasso seguito dai pagamenti (finanziamento in senso stretto).

## Il tasso interno di rendimento (TIR)

Consideriamo un'operazione finanziaria molto semplice: lo **ZCB**. Sia  $P$  il prezzo d'acquisto,  $n$  la durata e  $C$  il valore nominale.

$$x_0 = -P$$

$$x_1 = 0$$

...

$$x_{n-1} = 0$$

$$x_n = C$$

Il polinomio  $p_n(v)$  si scrive:  $-P + C \cdot v^n = 0$  e la soluzione è immediata:

$$\begin{aligned} v^* &= \left(\frac{P}{C}\right)^{\frac{1}{n}} \\ i^* &= \left(\frac{C}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \end{aligned}$$

# Il tasso interno di rendimento (TIR)

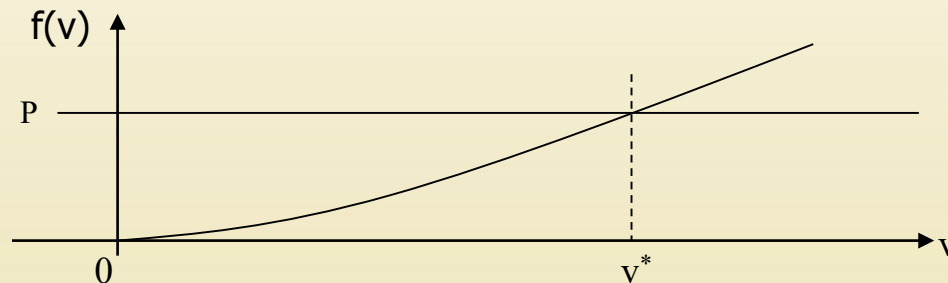
Ora, siccome il tasso nel periodo temporale  $[0,n]$  è definito come

$$j^* = (C-P)/P$$

si ottiene  $1 + j^* = C/P$ , perciò:

$$i^* = (1 + j^*)^{\frac{1}{n}} - 1$$

Affinché il tasso  $i^*$  sia positivo deve essere  $C/P > 1$ , ossia  $C > P$ : il prezzo d'acquisto dev'essere inferiore al valore nominale. Graficamente, la funzione  $y = C \cdot v^n$  è monotona crescente ed interseca la retta orizzontale  $y = P$  in un solo punto di coordinate  $(v^*, P)$ .



## Il tasso interno di rendimento (TIR)

Esempio: sia data la seguente operazione finanziaria

$$\mathbf{x} / \mathbf{t} = \{-100; 10; 110\} / \{0; 1; 2\}$$

di cui si vuole calcolare il TIR.

Per il teorema di Norstrom  $x_1 + x_2 > -x_0$  per cui il TIR esiste.

Scriviamo allora il polinomio  $p(v)$ :

$$110v^2 + 10v - 100 = 0$$

le cui radici sono:

$$v_{1,2}^* = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 11.000}}{110} = \frac{-5 \pm 105}{110} = \frac{100}{110}$$

(abbiamo scartato la radice negativa in quanto priva di significato). Da ciò ne segue un tasso interno di rendimento:

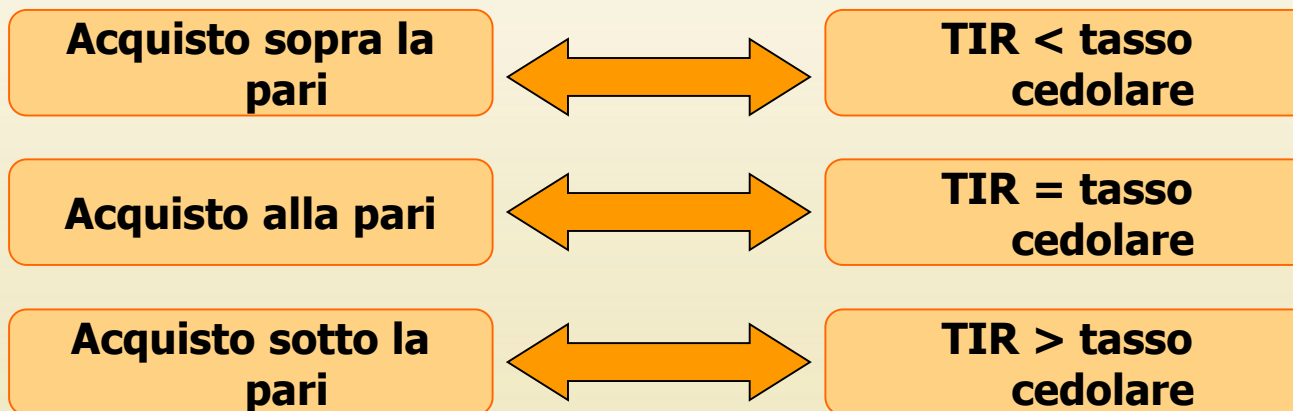
$$i^* = 1/v^* - 1 = 0,1$$

che coincide col tasso cedolare del titolo (investimento).

# Il tasso interno di rendimento (TIR)

Nell'esempio precedente il TIR coincide esattamente col tasso cedolare in quanto, per come abbiamo definito l'operazione  $x/t$ , il prezzo d'acquisto del titolo era alla pari. Nella più comune ipotesi in cui il prezzo non è alla pari, il TIR fornisce l'effettivo rendimento del titolo, a prescindere dal tasso percentuale delle cedole, tenendo conto dell'aggio o del disagio sull'acquisto iniziale.

In generale, per un titolo obbligazionario:



## Il tasso interno di rendimento (TIR)

Calcoliamo ora il TIR dei seguenti titoli obbligazionari:

$$\mathbf{x} / t = \{-98,5,105\} / \{0,1,2\}$$

$$\mathbf{x}' / t = \{-102,5,105\} / \{0,1,2\}$$

Il primo caso riguarda un acquisto sotto la pari, il secondo riguarda il caso dell'acquisto sopra la pari.

Scriviamo allora le due equazioni del TIR:

$$105v^2 + 5v - 98 = 0$$

$$105v'^2 + 5v' - 102 = 0$$

di cui troviamo le radici:

$$v^* = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 41.160}}{210} = \frac{-5 \pm 202,94}{210} = \frac{197,94}{210} = 0,94257$$

$$v'^* = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 42.840}}{210} = \frac{-5 \pm 207,04}{210} = \frac{202,04}{210} = 0,96209$$

# Il tasso interno di rendimento (TIR)

Ricaviamo infine i TIR:

$$i^* = \frac{1}{v^*} - 1 = \frac{1}{0,94257} - 1 = 6,093\%$$
$$i'^* = \frac{1}{v'^*} - 1 = \frac{1}{0,96209} - 1 = 3,094\%$$

Ritroviamo, quindi, che il titolo acquistato sotto la pari ha un rendimento maggiore del tasso cedolare (5% in questo caso), acquistato sopra la pari ha un rendimento minore del tasso cedolare.

Nella letteratura anglosassone, come anche in molte calcolatrici finanziarie, il tasso interno di rendimento viene designato con la sigla IRR: internal rate of return.

**TIR**  
**tasso interno di rendimento**

=

**IRR**  
**internal rate of return**

# Ricerca del TIR: il metodo dell'interpolazione lineare

L'equazione per la ricerca del TIR porta spesso ad equazioni algebriche di grado elevato le cui soluzioni si trovano con metodi di approssimazione.

Consideriamo la seguente operazione finanziaria:

$$\mathbf{x} / \mathbf{t} = \{-99,2; 4; 4; 4; 104\} / \{0;1;2;3;4\}$$

Il TIR si ottiene risolvendo la seguente equazione di equilibrio fra entrate e uscite (per il teorema di Norstrom, sappiamo che la soluzione esiste):

Devo cercare il tasso che sostituito nell'equazione mi dia 99,2

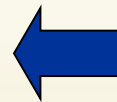
Indico  $X_0 = A = 99,2$ .

$$99,2 = 4 \cdot (1 + i)^{-1} + 4 \cdot (1 + i)^{-2} + 4 \cdot (1 + i)^{-3} + 104 \cdot (1 + i)^{-4}$$

# Ricerca del TIR: il metodo dell'interpolazione lineare

Procedo per tentativi, ipotizzando tassi via via crescenti, troverò quello giusto.

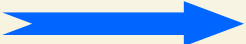
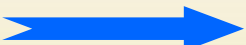
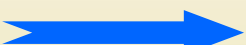
$i\%$	A
2,5%	105,64
3%	103,72
3,5%	101,84
4%	100
4,5%	98,206
5%	96,454



IL TIR È COMPRESO FRA QUESTI DUE VALORI.

# Ricerca del TIR: il metodo dell'interpolazione lineare

Abbiamo osservato che il TIR è compreso fra il 4% e il 4,5%. Indico queste soglie rispettivamente  $i_0$  e  $i_1$ , indico  $A_0$  il valore che trovo sostituendo  $i_0$  nell'equazione, e  $A_1$  invece il valore che trovo sostituendo  $i_1$ .

$i_0 = 0,04$		$A_0 = 100$
$i = ?$		$A = 99,2$
$i_1 = 0,045$		$A_1 = 98,206$

# Ricerca del TIR: Il metodo dell'interpolazione lineare

- Applichiamo la formula dell'interpolazione lineare:

$$i \cong i_0 + \frac{i_1 - i_0}{A_1 - A_0} \cdot (A - A_0)$$

- Si ottiene:

$$i \cong 0,04 + \frac{0,045 - 0,04}{98,206 - 100} \cdot (99,2 - 100) = 0,0422$$

## Il caso dei pagamenti non periodici

Affrontiamo ora il caso del calcolo del TIR in presenza di pagamenti non periodici, vale a dire quando lo scadenziario presenta intervalli temporali diversi tra loro.

In ogni caso esiste il massimo comun denominatore  $q$  delle scadenze  $t_k$ , che determina il "nuovo" periodo da tenere in considerazione, trasformando l'operazione assegnata in una nuova operazione con scadenziario  $n_k = t_k \cdot q$ .

Ad esempio, l'operazione

$\mathbf{x}' / t = \{-100; 20; 10; 9; 100\} / \{0; 1,5; 2; 3,5; 4\}$  già vista prima, può essere trasformata considerando i semestri anziché gli anni. In tal modo avremo:

$$(q=2) \mathbf{x}' / t = \{-100; 0; 0; 20; 10; 0; 0; 9; 100\} / \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$$

e potremo utilizzare l'equazione del TIR valida per i pagamenti periodici.

Notiamo che il grado dell'equazione che determina il TIR aumenta passando da  $n$  a  $n \cdot q$ , e l'incognita è il fattore di periodo  $v_q$ .

Sarà necessario, una volta trovata la soluzione  $v_q^*$ , ricavare il TIR su base annua mediante le seguenti relazioni:

$$v^* = (v_q^*)^q$$

$$i^* = (1 + i_q^*)^q - 1$$

## Il caso dei pagamenti non periodici

Come esempio consideriamo tre importi  $x_0, x_1, x_2$ , pagabili alle scadenze  $t_0=0, t_1=1/3, t_2=3/2$ ; ciò equivale a dire che i periodi sono un quadrimestre e tre semestri. Il massimo comun denominatore tra 2 e 3 è  $q=6$ , vale a dire che trasponiamo lo scadenzario in termini di bimestri:

$$x/t = \{x_0; 0; x_1; 0; 0; 0; 0; 0; x_2\} / \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

L'equazione del TIR si può scrivere:

$$x_0 + x_1 \cdot v^{\frac{1}{3}} + x_2 \cdot v^{\frac{3}{2}} = 0$$

Si è ottenuta un'equazione algebrica, la cui soluzione è  $v^*$ .

## Il caso dei pagamenti non periodici

Si ricava poi il fattore di sconto annuo  $v^*$  ed infine il TIR tramite la ben nota  $i^* = 1/v^* - 1$ .

Consideriamo ora un altro esempio, utile per valutare il rendimento effettivo di un titolo obbligazionario acquistato sotto la pari.

Sia dato un BTP con vita residua pari a sette anni al momento dello stacco della cedola semestrale  $I$ , tasso nominale netto 3%, prezzo  $P=96,50$  e valore nominale  $C=100$ .

Il tasso netto semestrale è  $i_{1/2} = 1,030^{0,5} - 1 = 1,489\%$  per cui  $I=1,489$ .

Il TIR semestrale soddisfa quindi la seguente equazione:

$$1,489 \cdot \sum_{k=1}^{14} (1 + i_{1/2}^*)^{-k} + 100 \cdot (1 + i_{1/2}^*)^{-14} = 96,5$$

che preferiamo cercare tramite la funzione excel TIR.COST:  $i_{1/2}^* = 1,7735\%$ ;

$$i^* = (1 + i_{1/2}^*)^2 - 1 = 3,578\%$$

Ovviamente il TIR è maggiore del tasso nominale in quanto  $P < C$ .

# Il criterio del TIR

Tra due operazioni di investimento (finanziamento) dotate di TIR, è conveniente scegliere quella con il tasso interno di rendimento maggiore (risp. di costo minore).

Il criterio del TIR appena enunciato, data la sua semplicità, non ha bisogno di particolari commenti; inoltre, in generale, possiamo asserire che:

Una operazione di investimento (finanziamento) dotata di TIR può essere eseguita se il suo tasso interno di rendimento è maggiore (risp. minore) di un tasso di riferimento prefissato, al quale si ritiene di poter altrimenti investire le proprie disponibilità (risp. al quale si ritiene di potersi altrimenti finanziare)

## Il criterio del TIR

Nel secondo enunciato del criterio del TIR viene implicitamente messa in risalto l'esistenza di un tasso unico costante per una durata anche notevole, con cui il valutatore opera la scelta. Ciò, purtroppo, rappresenta un limite in quanto il tasso di riferimento è arbitrario; inoltre è ipotizzato costante per tutta la durata dell'operazione.

Questi limiti sono gli stessi già visti per il VAN.

*Osservazione.* Se due operazioni di investimento *A* e *B* hanno rispettivamente un TIR del 4% e 5%, perché possiamo preferire la *B*, supponendole nello stesso contesto finanziario?

In altre parole, a parità di altre condizioni, nello stesso ambiente finanziario è difficile pensare che coesistano due operazioni con TIR differenti: quella sconveniente non avrebbe modo di esistere. Esistono, però, casi in cui effettivamente il TIR può essere d'aiuto.

# Il periodo di recupero (payback period)

Il periodo di recupero (in inglese **payback period**, o PBP), è definito come quel periodo necessario ad un investimento per recuperare il capitale complessivamente impiegato.

Nella definizione appena data si può notare che tale criterio viene utilizzato per lo più negli investimenti, per i quali si osserva il cumulo, o somma, degli importi alle varie epoche:

quando il cumulo assume definitivamente un valore positivo, la relativa epoca è il PBP.

Ad esempio consideriamo la seguente operazione finanziaria:

$$\mathbf{x} / \mathbf{t} = \{-100; 20; 30; 40; 40; -80; 100; 100\} / \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$$

In  $t=4$  il cumulo degli importi assume un valore positivo; poi, però, in  $t=5$  torna negativo. Il PBP è  $t=6$ . Si tratta di un criterio molto semplice per valutare gli investimenti in due casi:

Scelta tra due o più investimenti: quello che presenta il PBP minore.

Scelta dell'investimento che presenta il PBP inferiore ad uno standard.

# Il periodo di recupero (payback period)

## Limiti del PBP



**Non tiene conto dell'aspetto temporale dell'operazione finanziaria: è come se il tasso di valutazione fosse nullo.**

**Non considera gli importi successivi al PBP: una operazione finanziaria con PBP breve e incassi futuri "minimi" viene preferita ad una con PBP più lungo ma incassi futuri "ingenti".**

Per superare almeno il primo limite si può calcolare il cumulo degli importi attualizzati all'epoca  $t=0$  secondo un tasso di valutazione prestabilito; poco o nulla si può fare in merito alle quantità successive al PBP, in quanto il criterio è di tipo "temporale" e non quantitativo.

# Appendice: uso del foglio elettronico per il calcolo del VAN

La funzione Excel che ne automatizza il calcolo prende lo stesso nome: VAN.

Tale funzione calcola il valore attuale netto di un investimento utilizzando un tasso di sconto e una serie di pagamenti (valori negativi) e di entrate (valori positivi). La sintassi è la seguente:

**VAN(tasso\_int;valore1;valore2; ...)**

Le variabili hanno il seguente significato:

tasso\_int è il tasso di sconto durante uno dei periodi.

valore1, valore2, ... sono gli argomenti da 1 a 29 che rappresentano i pagamenti e le entrate.

N.B. valore1, valore2, ... si considerano a distanze di tempo regolari e al termine di ogni periodo. Si può inserire un intervallo.

# Appendice: uso del foglio elettronico per il calcolo del VAN

Osservazione: l'investimento VAN inizia in anticipo di un periodo sulla data del flusso di cassa immesso come valore1 e termina con l'ultimo flusso di cassa dell'elenco. Il calcolo VAN si basa sui flussi di cassa futuri. Se il primo flusso di cassa si verifica all'inizio del primo periodo occorre aggiungere il primo valore al risultato VAN anziché includerlo negli argomenti dei valori.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Tasso	i= 5%		Importi	€ 200,00	€ 50,00	€ 50,00	€ 50,00	€ 50,00	€ 50,00
2				Tempi	0	1	2	3	4	5
3										
4										
5	REA	=VAN(C1;F1:J1)+E1=			€ 16,47					

In questo esempio la funzione VAN calcola il valore attuale netto degli importi da 50 euro (celle F1,...,J1), al tasso del 5% (cella C1). Per il calcolo del VAN si è poi sottratto il valore di 200 euro (cella E1), già riferito all'epoca  $t=0$ .

# Appendice: uso del foglio elettronico per il calcolo del VAN

Nel caso in cui le scadenze non siano equidistanti, sarà necessario introdurre importi nulli opportuni in modo tale da ottenere uno scadenzario costituito dal minimo comune multiplo di tutte le scadenze. In tal modo anche il tasso dovrà essere convertito all'unità periodale scelta.

Ad esempio, se l'operazione fosse la seguente:

$$\mathbf{x} / t = \{-100; 5; 5; 5; 105\} / \{0; 1,5; 2; 3,5; 4\} \quad i=4\% \text{ annuo}$$

possiamo rappresentare la stessa operazione in semestri:

$$\mathbf{x}' / t = \{-100; 0; 0; 5; 5; 0; 0; 5; 105\} / \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$$
$$i_{1/2}=1,98\% \text{ sem.}$$

ed applicare la funzione excel già vista. La funzione excel VAN purtroppo non ci aiuta nel caso in cui il tasso di valutazione non è costante.

Bisognerà allora costruire, sempre mediante l'aiuto del foglio elettronico, una tabella in cui ad ogni epoca  $t$  corrisponde una riga costituita dall'importo in scadenza, dal tasso riferito all'epoca  $t$ , dal fattore di attualizzazione che tiene conto dei tassi fino a  $t$ , e dall'importo attualizzato in  $t=0$  (v. esempio seguente).

# Appendice: uso del foglio elettronico per il calcolo del VAN

	A	B	C	D	E
1	<b>Scadenze</b>	<b>Importi</b>	<b>Tassi a termine</b>	<b>Fattori di attualizzazione</b>	<b>Importi attualizzati</b>
2	0 -	100,00		1,00000	- 100,00000
3	1	5,00	2,50%	0,97561	4,87805
4	2	6,00	2,75%	0,94950	5,69699
5	3	5,00	3,00%	0,92184	4,60922
6	4	4,75	2,75%	0,89717	4,26156
7	5	5,00	2,50%	0,87529	4,37644
8	6	105,00	2,25%	0,85603	89,88296
9					
10				VAN=	13,70522
11	<i>Formule:</i>				
12					
13	<b>Scadenze</b>	<b>Importi</b>	<b>Tassi a termine</b>	<b>Fattori di attualizzazione</b>	<b>Importi attualizzati</b>
14	0 -	100,00		1,00000	=B14*D14
15	1	5,00	2,50%	=D14/(1+C15)	=B15*D15
16	2	6,00	2,75%	=D15/(1+C16)	=B16*D16
17	3	5,00	3,00%	=D16/(1+C17)	=B17*D17
18	4	4,75	2,75%	=D17/(1+C18)	=B18*D18
19	5	5,00	2,50%	=D18/(1+C19)	=B19*D19
20	6	105,00	2,25%	=D19/(1+C20)	=B20*D20
21					
22				VAN	=SOMMA(E14:E20)

# Appendice: uso del foglio elettronico per il payback period

Ecco un esempio per rappresentare tramite il foglio elettronico Excel l'evoluzione del cumulo e l'identificazione del periodo di recupero di un investimento:

	A	B	C	D	E	F	G
	Scadenze	Importi	Cumulo		Scadenze	Importi	Cumulo
1							
2	0 -	500,00 -	500,00		0 -	500,00	=F2
3	1	150,00 -	350,00		1	150,00	=G2+F3
4	2	150,00 -	200,00		2	150,00	=G3+F4
5	3	150,00 -	50,00		3	150,00	=G4+F5
6	4	150,00	100,00		4	150,00	=G5+F6
7	5 -	200,00 -	100,00		5 -	200,00	=G6+F7
8	6	150,00	50,00		6	150,00	=G7+F8

Il periodo di recupero è  $t=6$ , in quanto in  $t=4$  il cumulo è temporaneamente positivo.

# Appendice: il caso dei pagamenti periodici (metodo di Newton)

Nel caso generale di  $n$  incassi  $x_k$  per  $k=1,2,\dots,n$  equidistanziati e successivi all'esborso iniziale  $x_0=P$  l'equazione del TIR si può scrivere:

$$\sum_{k=1}^n x_k \cdot v^k = P$$

per cui trovarne le soluzioni equivale a risolvere il seguente sistema:

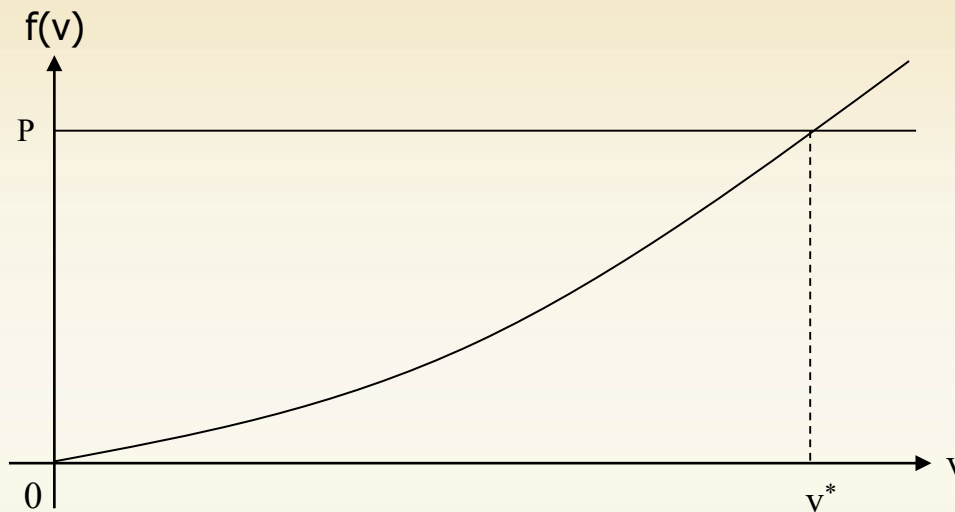
$$\begin{cases} y = P \\ y = f(v) = \sum_{k=1}^n x_k \cdot v^k \end{cases}$$

La funzione  $f(v)$  è dotata di derivata prima e seconda positive, essendo polinomi in  $v$  ( $>0$ ) a coefficienti positivi.

Inoltre è

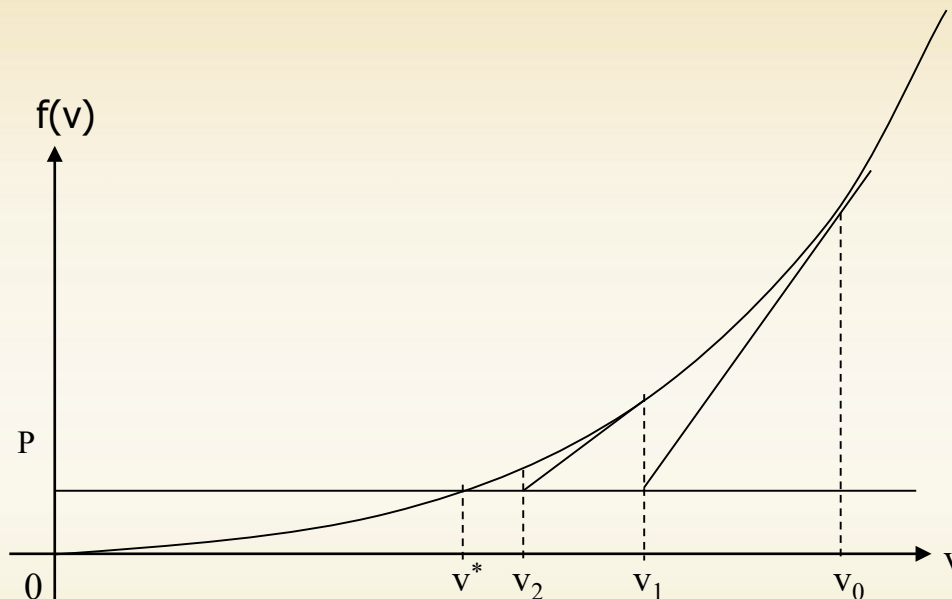
$$f(0) = 0 \quad f(1) = \sum_{k=1}^n x_k \quad \lim_{v \rightarrow +\infty} f(v) = +\infty$$

# Appendice: Il caso dei pagamenti periodici (metodo di Newton)



La funzione  $f(v)$  è allora continua, strettamente crescente e **convessa**. La ricerca delle soluzioni è generalmente difficile utilizzando metodi algebrici; tuttavia esiste il metodo detto di Newton, o delle tangenti, quale metodo numerico iterativo che fornisce in maniera semplice la soluzione, mediante un algoritmo, a meno di un errore stimato. Ne illustriamo il procedimento.

# Appendice: il caso dei pagamenti periodici (metodo di Newton)



Si sceglie un valore iniziale  $v_0$  maggiore di  $v^*$  senza perdita di generalità. Essendo  $f(v)$  strettamente crescente e convessa, la tangente in  $(v_0, f(v_0))$  interseca  $y=P$  in un punto di ascissa  $v_1$  interno all'intervallo  $(v^*, v_0)$ . Il valore  $v_1$  approssima  $v^*$  meglio del valore  $v_0$ . Si prosegue con  $v_2$  iterando il procedimento  $n$  volte finché  $v_n - v_{n-1} < \varepsilon$  con  $\varepsilon$  piccolo a piacere.

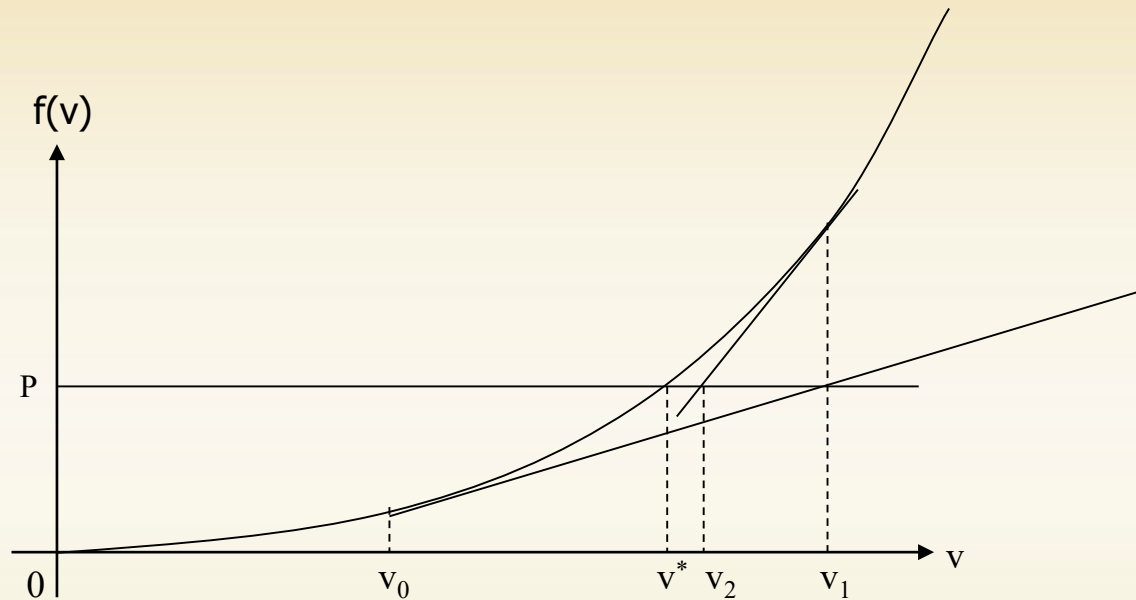
## Appendice: il caso dei pagamenti periodici (metodo di Newton)

La formula che di volta in volta fornisce il valore di  $v$  approssimato si ricava imponendo che il coefficiente angolare della tangente, pari alla derivata di  $f$  in  $v_n$ , è uguale al rapporto tra l'incremento  $f(v_n) - P$  e l'incremento  $v_n - v_{n+1}$ :

$$\begin{aligned} \frac{f(v_n) - P}{v_n - v_{n+1}} &= f'(v_n) \\ v_{n+1} &= v_n - \frac{f(v_n) - P}{f'(v_n)} \quad (\text{algoritmo di Newton}) \end{aligned}$$

Scegliendo il valore iniziale  $v_0$  minore di  $v^*$  il procedimento non cambia: dalla figura che segue si capisce che la successione delle ascisse  $v_0, v_1, v_2, \dots$  converge alla soluzione  $v^*$ .

# Appendice: il caso dei pagamenti periodici (metodo di Newton)



Nella pratica si otterrà una successione di valori numerici che approssima il valore cercato con un errore che può essere stimato. Ad esempio, scelto  $\varepsilon = 0,5 \times 10^{-5}$  si ottiene un valore di  $v^*$  esatto fino alla quinta cifra decimale.

# Appendice: il caso dei pagamenti periodici (metodo di Newton)

Come esempio consideriamo un titolo obbligazionario acquistato subito dopo lo stacco della cedola annuale al prezzo  $P=98,50$ , siano  $I=3$  le cinque cedole nette residue e sia  $C=100$  il valore di rimborso. Si può riassumere tale operazione nel seguente modo:

$$x_0 = -98; x_1 = 3; x_2 = 3; x_3 = 3; x_4 = 3; x_5 = 103$$

Determiniamo la soluzione del sistema:

$$\begin{cases} y = -98 \\ y = f(v) = \sum_{k=1}^5 x_k \cdot v^k = 3v \cdot \frac{1 - v^5}{1 - v} + 100v^5 \end{cases}$$

# Appendice: il caso dei pagamenti periodici (metodo di Newton)

Scegliamo il punto iniziale  $v_0=0,85$  ed utilizziamo la formula di Newton per 5 volte:

$$v_0 = 0,85$$

$$v_1 = v_0 - [f(v_0)-P] / f'(v_0) = 1,003616$$

$$v_2 = v_1 - [f(v_1)-P] / f'(v_1) = 0,970172$$

$$v_3 = v_2 - [f(v_2)-P] / f'(v_2) = 0,967779$$

$$v_4 = v_3 - [f(v_3)-P] / f'(v_3) = 0,967767$$

$$v_5 = v_4 - [f(v_4)-P] / f'(v_4) = 0,967767$$

Chiaramente se utilizzassimo più cifre dopo la virgola, gli ultimi due risultati sarebbero diversi, ma comunque molto vicini. Il TIR è allora  $i^*=3,33\%$ .

Se avessimo scelto un punto iniziale maggiore di 0,967767 ma diverso da 1, il risultato sarebbe stato lo stesso.

## Appendice: il caso dei pagamenti periodici (uso del foglio elettronico)

Nella pratica si usa spesso la funzione di excel TIR.COST che fornisce il tasso d'interesse di rendimento di un'operazione finanziaria. La sua sintassi è la seguente:

TIR.COST(val;ipotesi)

**val** è un vettore che contiene gli importi di cui si desidera calcolare il tasso di rendimento interno. Tale vettore deve contenere almeno un valore positivo e uno negativo e deve rispettare la successione dei valori per interpretare l'ordine di successione dei flussi di cassa. **ipotesi** è un numero che si suppone vicino al risultato di TIR.COST, e serve per stabilire, come per il metodo di Newton, il punto iniziale del processo iterativo che esegue il calcolo della funzione TIR.COST. Iniziando con il valore ipotesi, la funzione TIR.COST applica il metodo delle iterazioni fino a quando la precisione del risultato non rientra nello 0,00001%.

## Appendice: il caso dei pagamenti periodici (uso del foglio elettronico)

Nella figura seguente abbiamo utilizzato i valori dell'esempio precedente, organizzati in sequenza dalla cella B2 alla cella G2. Per il calcolo del TIR, la funzione TIR.COST ha come argomenti il vettore degli importi ed il valore 1,2 scelto arbitrariamente.

Il risultato, come si vede, è praticamente uguale a quello ottenuto col metodo di Newton, tenendo conto che il tasso trovato si riferisce alla distanza temporale (costante) tra i pagamenti.

Sostanzialmente se l'intervallo tra i pagamenti fosse semestrale, anche il valore della funzione TIR.COST sarebbe riferito ad un tasso semestrale, da convertire annualmente.

	A	B	C	D	E	F	G	
1								
2		-98,5	3	3	3	3	103	
3		TIR =TIR.COST(B2:G2;1,2)=					3,3306%	

## Appendice: il TAEG e il TAN

Il tasso annuo effettivo globale (T.A.E.G.) è definito come quel tasso annuo che rende uguali la somma del valore attuale di tutti gli importi che compongono un finanziamento erogato dal creditore con la somma del valore attuale di tutte le rate di rimborso.

In altre parole il TAEG rende nullo il VAN; è proprio la definizione del TIR:

$$\text{TAEG} = \text{TIR}$$

Tale definizione è espressa nel Decreto Ministeriale dell'8 luglio 1991, in applicazione della legge 141/91, per consentire al consumatore di leggere un parametro di confronto attendibile ed efficace nella scelta di un'operazione di credito al consumo.

Lo stesso DM definisce, poi, un altro parametro di lettura che è il TAN o Tasso Annuo Netto, che è uguale al TAEG, ma tiene conto anche delle spese relative al finanziamento, cioè non relative all'acquisto.

## Appendice: il TAEG e il TAN

In generale si ha:

$$\text{TAEG} \geq \text{TAN}$$

e vale il segno di uguaglianza solo nel caso in cui le spese siano nulle. A titolo di esempio, consideriamo un finanziamento per l'acquisto di un bene durevole con valore pari a 12.000 euro, rimborsabili mediante 12 rate mensili posticipate di importo 1.000 euro, e sia pari a 150 euro il costo per l'istruttoria del finanziamento.

Chiaramente il TAEG è nullo, essendo la somma delle rate pari al finanziamento ottenuto. Il legislatore, al fine di obbligare gli operatori ad avere un comportamento trasparente, ha imposto l'uso del TAN nelle comunicazioni pubblicitarie, per cui il consumatore ha la possibilità di tener conto di tutte le variabili che condizionano la scelta.

Considerando anche il "costo iniziale" di 150 euro, allora si potrà calcolare il TAN:

## Appendice: il TAEG e il TAN

Mediante la funzione Excel TIR.COST troviamo il valore  
 $i_{1/12}^* = 0,001941$  ed infine il TIR annuo:

$$1.000 \cdot \sum_{k=1}^{12} (1 + i_{1/12}^*)^{-k} + 150 = 12.000$$

$$i^* = (1 + i_{1/12}^*)^{12} - 1 = 2,3536\%$$

Il consumatore può allora stimare con certezza le offerte sul mercato per valutare quella più conveniente: in questo esempio è preferibile un finanziamento a costi zero e tasso 2% (TAEG e TAN pari al due per cento).

# Conclusioni

- Prima di analizzare i vari criteri di analisi degli investimenti si è chiarito che per effettuare il confronto fra operazioni finanziarie queste devono essere omogenee.
- Fra i criteri di scelta di investimento, i più importanti sono il TIR e il VAN dei quali abbiamo analizzato i vantaggi e gli svantaggi che tali metodi recano nel confronto tra due operazioni finanziarie, abbiamo imparato a calcolarli e dare un giudizio di convenienza su un finanziamento utilizzando entrambi i metodi.
- Come metodo di ricerca del TIR abbiamo visto l'interpolazione lineare, che avevamo utilizzato anche per la ricerca del tasso nelle rendite.
- Infine abbiamo descritto il metodo del tempo di recupero, semplice ma molto utilizzato nonostante i suoi limiti.
- Come approfondimento sono stati inseriti alcuni argomenti in appendice: il metodo di Newton, l'utilizzo delle funzioni elementari di Excel per calcolare sia il VAN che il TIR (TIR.COST). Si sono proposti anche TAN ed il TAEG, due indicatori molto utili per la scelta tra due finanziamenti.

**Omogeneità  
delle operazioni  
finanziarie**

**Periodo di  
recupero**

**PBP**

Non è un criterio  
finanziario

**Tasso interno di  
rendimento**

**TIR**

Ci sono  
operazioni  
finanziarie che  
non hanno TIR

**Criteri di valutazione  
degli investimenti**

**VAN**

**Valore attuale netto**

Dipende fortemente  
dal tasso(costante) di  
valutazione utilizzato

# ESERCIZI

## Esercizio 1

- Calcolare il TIR di un investimento che si ottiene comprando 1.000 titoli descritti dal seguente scadenziario:  
 $(-98; 5; 5; 5; 5; 105)/(0; 1; 2; 3; 4; 5)$   
nel caso in cui metà del capitale necessario per l'acquisto sia frutto di un prestito che viene rimborsato in 5 anni a rimborso unico al tasso del 3% annuo.

- Metà del capitale: 49
- Quote interesse:  $49 \cdot 0.03 = 1,47$
- Scadenzario del prestito:

$(49; -1,47; -1,47; -1,47; -1,47; -1,47; -50,47)/$   
 $(0; 1; 2; 3; 4; 5)$

- Flussi netti:

$(-49; 3,53; 3,53; 3,53; 3,53; 54,53)/$   
 $(0; 1; 2; 3; 4; 5)$

- Equazione di equilibrio:

$$49,3 = 3,53 \cdot a_{\overline{4}|i} + 54,53 \cdot (1 + i)^{-5}$$

$$i_0 = 7\% \rightarrow A_0 = 50,8$$

$$i_1 = 9\% \rightarrow A_1 = 46,9$$

$$i = i_0 + \frac{i_1 - i_0}{A_1 - A_0} \cdot (A - A_0) \rightarrow i \simeq 7,77\%$$

## Esercizio 2

- Un intermediario finanziario acquista due unità dell'operazione finanziaria  $(P_1; 5; 105)/(0; 1; 2)$  e tre unità dell'operazione finanziaria  $(P_2; 4; 4; 4; 104)/(0; 1; 2; 3; 4)$ .
- Sapendo che la forza d'interesse vigente sul mercato è

$$\delta(t) = 0,055 \cdot \frac{2t}{t^2 + 1}$$

calcolare:

1. i prezzi delle due operazioni finanziarie;
2. il TIR dell'operazione complessiva.

$$\int_0^t 0,055 \cdot \frac{2s}{1+s^2} ds = 0,055 \cdot [\log |1+s^2|]_0^t$$

=

$$= 0,055 \cdot \log(1+t^2) = \log(1+t^2)^{0,055}$$

$$\Rightarrow r(t) = (1+t^2)^{0,055}$$

$$\Rightarrow v(t) = (1+t^2)^{-0,055}$$

- Prezzi:

$$P_1 = 5 \cdot v(1) + 105 \cdot v(2) = 100,92$$

$$P_2 = 4 \cdot v(1) + 4 \cdot v(2) + 4 \cdot v(3) + 104 \cdot v(4) = 100,03$$

con:

$$v(1) = 2^{-0,055} = 0,9626$$

$$v(2) = 5^{-0,055} = 0,9153$$

$$v(3) = 10^{-0,055} = 0,8810$$

$$v(4) = 17^{-0,055} = 0,8557$$

- Operazione complessiva:

$$P = 2 \cdot P_1 + 3 \cdot P_2 = 502,81$$

- Scadenzario:

$$(-502,81 ; 22 ; 222 ; 12 ; 312 ) / (0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4)$$

- Equazione di equilibrio:

$$502,81 = 22 \cdot v + 222 \cdot v^2 + 12 \cdot v^3 + 312 \cdot v^4$$
$$v = \frac{1}{1+i}$$

$$i_0 = 4\% \rightarrow A_0 = 504,20$$

$$i_1 = 5\% \rightarrow A_1 = 489,88$$

$$i = i_0 + \frac{i_1 - i_0}{A_1 - A_0} \cdot (A - A_0) \rightarrow i \simeq 0,04097\%$$

## Esercizio 3

- Un'azienda deve attivare un progetto di investimento da scegliere tra i seguenti:
  - a) prevede il versamento immediato di 30.000.000, un ulteriore versamento di 4.000.000 dopo un anno e entrate di 45.000.000 tra due anni;
  - b) prevede un'uscita immediata di 50.000.000 e una sola entrata di 70.000.000 dopo due anni.

- Calcolare, trascurando operazioni integrative:
  - 1) quale progetto risulta migliore utilizzando il criterio del TIR;
  - 2) quali valori del tasso di valutazione, utilizzando il criterio del VAN, avrebbero condotto ad una scelta identica a quella fatta seguendo il criterio del TIR.

- Scadenzario delle due operazioni:

A:  $(-30; -4; 45)/(0; 1; 2)$

B:  $(-50; 0; 70)/(0; 1; 2)$

- Calcolo del TIR:

Operazione A:

$$45v^2 - 4v - 30 = 0 \rightarrow v = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 5.400}}{90} = \frac{4 \pm 73,6}{90}$$

$$\rightarrow v = 0,862$$

$$v = \frac{1}{1+i} \Rightarrow i = 0,1597$$

- Operazione B:

$$70v^2 - 50 = 0 \rightarrow i = \sqrt{\frac{70}{50}} - 1 = 0,1832$$

→ Operazione B più conveniente.  
Per la seconda parte si impone:

$$70v^2 - 50 > 45v^2 - 4v - 30 \rightarrow 25v^2 + 4v - 20 > 0$$
$$\Rightarrow v = 0,818; -0,978$$

- Soddisfatta per valori esterni

$$v > 0,818$$

$$\frac{1}{1+i} > 0,818 \rightarrow 1+i < \frac{1}{0,818} \rightarrow i < 0,2225$$

## Esercizio 4

- Un'azienda industriale ricorre per l'acquisto di un'attrezzatura il cui prezzo di listino è di 50.000.000 alla seguente formula di pagamento: versamento anticipato del 20% del prezzo e contemporaneo pagamento delle spese di gestione della pratica ammontanti a 300.000, versamento immediato posticipato di 12 canoni (rate) bimestrali costanti ed infine, insieme all'ultimo canone, pagamento del valore residuo del bene prefissato al 3,5% del prezzo di listino.

- Calcolare, sapendo che il tasso di equilibrio dell'operazione è pari al 20%:
  - 1) l'importo del canone;
  - 2) quale sarebbe stato il prezzo di listino se il canone fosse risultato di 4.000.000 (rimanendo invariate le spese di gestione, il versamento anticipato pari al 20% di 50.000.000 e il valore residuo).

- Il tasso di equilibrio è il 20 % per cui

$$50.000.000 = 0,20 \cdot 50.000.000 + 300.000 +$$
$$+ C \cdot a_{\overline{12}|i_{\frac{1}{6}}} + 1.750.000 \cdot (1 + i)^{-2}$$
$$\rightarrow C = 3.886.000$$

- In presenza di canone bimestrale di 4.000.000 prezzo di listino  
→ 51.129.238

## Esercizio 5

- Una operazione di leasing prevede l'acquisto di un automezzo del valore di 15.000 alle seguenti condizioni:
  - durata 5 anni;
  - 54 canoni mensili di 300 euro;
  - oltre ai versamenti anticipati mensili, un maxicanone di 6 mensilità pagato in via immediata anticipata.
- Calcolare:
  - il tasso di costo dell'operazione descritta;
  - il tasso di costo in caso di versamenti anticipati regolari ed in assenza di maxi canone.

- L'equazione di equilibrio finanziario è:

$$15.000 = 6 \cdot 300 + 300 \cdot \ddot{a}_{\overline{54}|i_{1/12}} \Rightarrow 44 = \ddot{a}_{\overline{54}|i_{1/12}}$$

- Risolviamo per interpolazione

$$i_0 = 0,006 \rightarrow A_0 = 46,2843$$

$$i_1 = 0,010 \rightarrow A_1 = 41,9844$$

- Si ottiene:

$$i_{1/12} \simeq i_0 + \frac{i_1 - i_0}{A_1 - A_0} \cdot (A - A_0) = 0,008125$$

- Tasso di costo su base annua

$$i = 1,008125^{12} - 1 = 0,101976$$

- Seconda alternativa:

$$15.000 = 300 \cdot \ddot{a}_{\overline{60}|i_{1/12}} \Rightarrow 50 = \ddot{a}_{\overline{60}|i_{1/12}}$$

- Risolviamo per interpolazione:

$$i_0 = 0,004 \rightarrow A_0 = 53,4619$$

$$i_1 = 0,008 \rightarrow A_1 = 47,8842$$

- Si ottiene:

$$i_{1/12} \simeq i_0 + \frac{i_1 - i_0}{A_1 - A_0} \cdot (A - A_0) = 0,006483$$

- Tasso di costo su base annua

$$i = 1,006483^{12} - 1 = 0,08063$$

## Esercizio 6

- Un investitore deve confrontare due operazioni:
  - la prima costa 100 e offre entrate di 30 per i primi 3 anni e 45 all'epoca 4;
  - la seconda costa 100 e offre entrate di 40 per i primi tre anni.

L'operazione integrativa che consente di rendere omogenee le due alternative consiste nel reinvestire gli importi intermedi della seconda operazione fino all'epoca 4 al 7%.
- Calcolare:
  - quale delle due operazioni finanziarie è conveniente;
  - quale tasso di reinvestimento rende equivalenti le due operazioni in base al criterio del *TIR*.

- Scadenzari delle due operazioni:

$$\theta_1: (-100; 30; 30; 30; 45)/(0; 1; 2; 3; 4)$$

$$\theta_2: (-100; 40; 40; 40)/(0; 1; 2; 3)$$

- L'operazione integrativa è:

$$40 \cdot (1,07^3 + 1,07^2 + 1,07) = 137,598$$

- Scadenzario della seconda operazione:

$$\tilde{\theta}_2: (-100; 0; 0; 0; 137,598)/(0; 1; 2; 3; 4)$$

- *TIR* della prima operazione:

$$45v^4 + 30v^3 + 30v^2 + 30v = 100$$

$$\text{con } v = (1 + i)^{-1}$$

- Risolviamo per interpolazione:

$$v_0 = 0,85 \rightarrow A_0 = 89,09$$

$$v_1 = 0,95 \rightarrow A_1 = 117,95$$

- Formula dell'interpolazione:

$$v \simeq v_0 + \frac{v_1 - v_0}{A_1 - A_0} \cdot (A - A_0) = 0,8878$$

$$\Rightarrow i = v^{-1} - 1 = 0,1264 \text{ (esatta: } i = 0,1229)$$

- Seconda operazione:

$$137,598v^4 = 100 \rightarrow v = \left( \frac{100}{137,598} \right)^{1/4} = 0,9233$$

$$\Rightarrow i = v^{-1} - 1 = 0,08306$$

→ La prima operazione è più vantaggiosa, avendo un rendimento maggiore della seconda.

- Tasso di reinvestimento:

$$40 \cdot ((1+i)^3 + (1+i)^2 + (1+i)) \cdot 1,1229^{-4} = 100$$
$$\Rightarrow (1+i)^3 + (1+i)^2 + (1+i) = 3,9747$$

- Si trova per interpolazione:

$$i \simeq 0,1474$$

## Esercizio 7

- Un soggetto prende a prestito 200.000 euro per attivare un'impresa ed aggiunge un uguale importo di capitale proprio.
- Ritiene che i redditi che produrrà saranno pari a 60.000 euro l'anno per un decennio.
- Considerando che il prestito è rimborsato in ammortamento francese al 7% calcolare il TIR dell'operazione.
- Calcolare a quale tasso  $i'$  avrebbe dovuto prendere a prestito le somme in oggetto se avesse desiderato un TIR maggiore dell'1% di quello precedentemente individuato.

- Lo scadenzario della prima operazione è:

$$(-400.000; +60.000; \dots; +60.000)/(0; 1; \dots; 10)$$

- Rata della seconda operazione:

$$R = \frac{200.000}{a_{\overline{10}|0,07}} = 28.475,5$$

- Lo scadenzario della seconda operazione è:

$$(+200.000; -R; \dots; -R)/(0; 1; \dots; 10)$$

- Lo scadenzario dell'operazione complessiva è:

$$(-200.000; +31.524,5; \dots; +31.524,5)/(0; 1; \dots; 10)$$

- Equazione di equilibrio:

$$200.000 = 31.524,5 \cdot a_{\overline{10}|i}$$

- Risolviamo per interpolazione:

$$i_0 = 0,09 \rightarrow A_0 = 202.313$$

$$i_1 = 0,10 \rightarrow A_1 = 193.704$$

$$i \simeq i_0 + \frac{i_1 - i_0}{A_1 - A_0} \cdot (A - A_0) = 0,092687$$

(tasso esatto  $i = 9,2621\%$ )

- Ipotizziamo ora

$$TIR = 10,2621\%$$

- Le entrate incognite  $X$  dell'operazione complessiva:

$$200.000 = X \cdot a_{\overline{10}|0,102621} \rightarrow X = \frac{200.000}{a_{\overline{10}|0,102621}} = 32.916,5$$

- Rate del nuovo ammortamento francese

$$R' = 60.000 - 32.916,5 = 27.083,5$$

- Il nuovo tasso  $i'$  dovrà soddisfare:

$$\frac{200.000}{a_{\overline{10}|i'}} = 27.083,5 \rightarrow a_{\overline{10}|i'} = \frac{200.000}{27.083,5} = 7,3846$$

- Per interpolazione:  $i' = 5,93\%$

## Esercizio 8

- Siano date le seguenti due operazioni di investimento:

$$I1 = (-100; 30; 40; 30; 50) / (0; 1; 2; 3; 4);$$

$$I2 = (-80; 25; 30; 60) / (0; 1; 2; 3).$$

- Per integrare  $I2$  sul mercato è presente la seguente operazione integrativa:

$$I3 = (-20; 1; 1; 21) / (0; 1; 2; 3)$$

ed i flussi intermedi possono essere reinvestiti al tasso  $j$ .

- Calcolare il valore di  $j$  che rende equivalenti le due alternative.

- Le due operazioni  $I1$  e  $I2$  non sono omogenee perché non hanno la stessa durata e non presentano lo stesso esborso iniziale.
- L'integrazione di  $I2$  con  $I3$  consente di ottenere lo stesso esborso iniziale:

$$I2+I3 = (-100; 26; 31; 81) / (0; 1; 2; 3).$$

- I flussi intermedi possono essere reinvestiti al tasso  $j$  perciò si ottiene all'epoca 4:

$$M = 26 \cdot (1 + j)^3 + 31 \cdot (1 + j)^2 + 81 \cdot (1 + j)^1.$$

- Possiamo ora utilizzare il criterio del TIR. Il TIR della prima operazione si ottiene risolvendo l'equazione di equilibrio.

- Si ottiene:  $100 = 30 \cdot v + 40 \cdot v^2 + 30 \cdot v^3 + 50 \cdot v^4$   
con  $v = (1 + TIR)^{-1}$ .
- Il metodo dell'interpolazione fornisce  $TIR \simeq 17,13\%$  .
- Imponiamo che anche la seconda operazione (con le due integrazioni precedenti) abbia lo stesso TIR. Dovremo imporre la condizione

$$M = 100 \cdot (1 + TIR)^4 = 188,2271$$

$$\Rightarrow 26 \cdot (1 + j)^3 + 31 \cdot (1 + j)^2 + 81 \cdot (1 + j)^1 = 188,2271.$$

- Risolviamo nuovamente per interpolazione. Si ottiene:  $j \simeq 20,54\%$  .

## Esercizio 9

- Un impianto del valore di 1.150.000 Euro può essere finanziato da un'azienda in due modalità alternative:
  - il pagamento di 5 rate pari a 325.000 immediate anticipate in cui sono comprese spese di manutenzione;
  - il pagamento di 5 rate di 250.000 immediate anticipate in cui non sono comprese dette spese di manutenzione.
- Sapendo che le spese di manutenzione si presentano all'epoca 2 e 4 e che sono ciascuna pari a 200.000 valutare la convenienza tra le due alternative di finanziamento.
- Individuare inoltre il valore delle spese di manutenzione che rende indifferente le due alternative.

- La prima alternativa prevede un'entrata di 1.150.000 all'epoca *zero* ed il seguente flusso di uscite:

$(-325.000; -325.000; -325.000; -325.000; -325.000)/(0; 1; 2; 3; 4)$

- Il saldo netto sarà perciò:

$(+825.000; -325.000; -325.000; -325.000; -325.000)/(0; 1; 2; 3; 4)$

- Il TIR si ottiene risolvendo l'equazione di equilibrio:

$$825.000 = 325.000 \cdot a_{\overline{4}|i}$$

- Si ottiene per interpolazione  $TIR_1 \simeq 21,04\%$  .
- La seconda alternativa prevede un'entrata di 1.150.000 all'epoca *zero* ed i seguenti flussi di uscite:

$(-250.000; -250.000; -250.000; -250.000; -250.000)/(0; 1; 2; 3; 4)$

$(0; 0; -200.000; 0; -200.000)/(0; 1; 2; 3; 4)$

- Il saldo netto sarà perciò:

(+900.000; -250.000; -450.000; -250.000; -450.000)/(0; 1; 2; 3; 4)

- Il TIR si ottiene risolvendo l'equazione di equilibrio:

$$900.000 = \frac{250.000}{1+i} + \frac{450.000}{(1+i)^2} + \frac{250.000}{(1+i)^3} + \frac{450.000}{(1+i)^4}$$

- Si ottiene per interpolazione  $TIR_2 \simeq 19,03\%$  .
- La seconda alternativa è perciò più conveniente.
- Supponiamo ora che le spese di manutenzione abbiano un valore incognito  $\alpha$  .

- Lo scadenzario della seconda alternativa sarà quindi:

(+900.000; -250.000; -250.000 -  $\alpha$ ; -250.000; -250.000 -  $\alpha$ )  
/(0; 1; 2; 3; 4)

- Imponiamo che il TIR dell'operazione sia *21,04%*.
- Avremo:

$$900.000 = \frac{250.000}{1,2104} + \frac{250.000 + \alpha}{1,2104^2} + \frac{250.000}{1,2104^3} + \frac{250.000 + \alpha}{1,2104^4}$$

- Si ottiene un'equazione di primo grado in  $\alpha$  che ha per soluzione  $\alpha = 231.090$ .

# **MODULO 5**

## **OBBLIGAZIONI, STRUTTURA DEI TASSI, ARBITRAGGIO**