Modulo 2

Le rendite

Argomenti

- Obiettivi.
- Introduzione.
- Definizioni preliminari.
- Rendita (immediata) posticipata di durata *n.*
- Rendita perpetua posticipata.
- Rendita (immediata) anticipata di durata *n.*
- Rendita perpetua anticipata.
- Rendita differita di *t* anni.
- Rendite frazionate.
- Problemi relativi alle rendite.

Obiettivi

Gli *obiettivi* di questo modulo sono:

- capire il concetto di rendita e conoscere i criteri di classificazione delle rendite certe;
- saper valutare una rendita calcolando il valore attuale e il montante;
- saper ricondurre un problema riguardante le rendite frazionate al caso delle rendite annue;
- risolvere problemi relativi alle rendite, quali ricerca del tasso, della durata, della rata.

Introduzione

Molte operazioni finanziarie comportano la valutazione di più capitali la cui esigibilità avviene in epoche diverse; in matematica finanziaria questo insieme di capitali è denominato sinteticamente **rendita**.
Se i capitali, detti **rate** della rendita, sono di importo uguale, per la determinazione della rendita utilizzeremo funzioni basate sulla somma di progressioni aritmetiche o geometriche che evitano molti calcoli ripetitivi.
Se, invece, la rendita è costituita da capitali di importi diversi, per la valutazione si dovranno scontare o capitalizzare i vari capitali secondo l'epoca scelta per la valutazione.
In questa modulo ci occuperemo soprattutto delle **rendite a rata costante** valutate nel regime dell'interesse composto, in quanto molto significative in ambito economico (finanziamenti, mutui, leasing,…), al punto che per esse sono state in passato costruite delle tavole numeriche. Oggi è sufficiente utilizzare una calcolatrice dotata della funzione esponenziale, o ancor meglio un foglio elettronico.

Definizioni preliminari

- Una rendita è una operazione finanziaria ***r*** definita come una **successione di capitali disponibili (cioè da pagare o da riscuotere) a determinate scadenze**; tali capitali sono detti rate (o termini) della rendita.

Esempi di rendite:

  - *le rate di affitto di un immobile pagate dal locatario;*
  - *i dividendi che un azionista riceve a scadenze fissate;*
  - *le rate di un mutuo contratto per l'acquisto di un bene;*
  - *lo stipendio che riceve il lavoratore dipendente;*
  - *le quote mensili versate per la sottoscrizione di un fondo comune di investimento;*

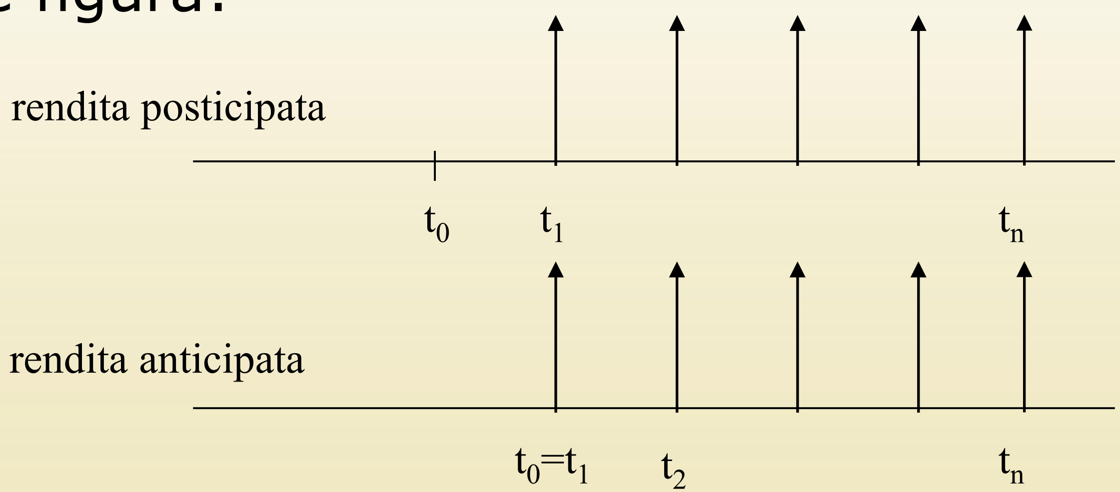
- Le rendite possono essere **classificate** secondo più criteri, per cui una rendita è ben definita quando, oltre a conoscerne i dati numerici, sono note esattamente le sue caratteristiche come specificato nella tabella che segue

Definizioni preliminari

Criterio	Classificazione
Periodicità della rata	❖ Rendita annua ❖ Rendita frazionata ❖ Rendita poliennale
Differimento, o meno, della prima rata	❖ Rendita posticipata ❖ Rendita anticipata
Differimento di t anni della prima rata	❖Rendita immediata ❖Rendita differita
Durata della rendita	❖ Rendita temporanea ❖ Rendita perpetua

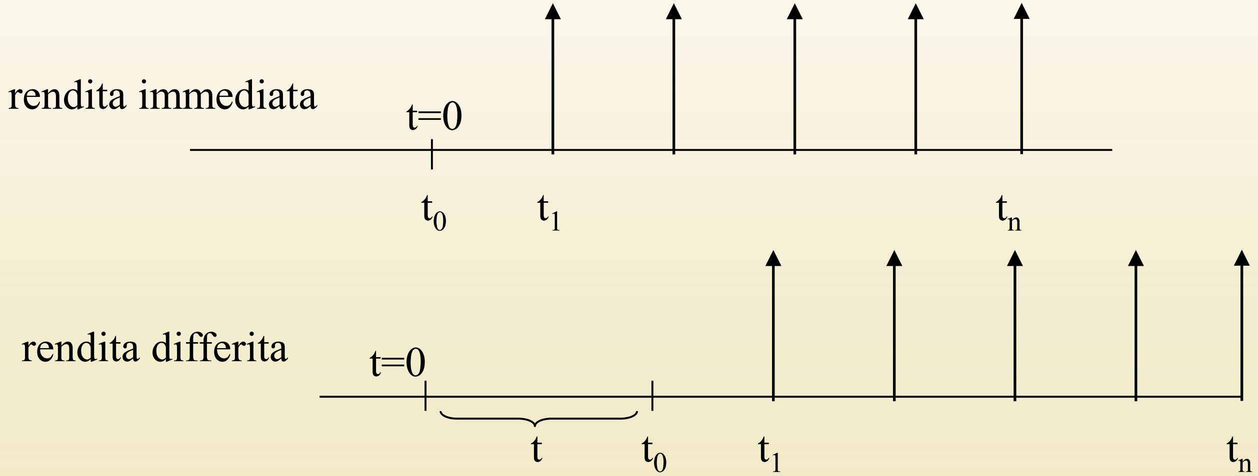
Definizioni preliminari

Analizziamo i criteri separatamente: innanzitutto considereremo le **rendite annue** (rate con periodicità annuale). Dopo tratteremo quelle **frazionate** (periodicità = frazione d'anno). Infine, le **rendite poliennali** riguardano il caso in cui l'intervallo temporale tra le rate è maggiore di un anno.
Per analizzare il secondo criterio osserviamo la seguente figura:



Definizioni preliminari

Per convenzione t_0 rappresenta la data dell'*inizio* della rendita e t_1 la data di *pagamento* della prima rata.
Se $t_0 = t_1 - 1$ allora la rendita si dice **posticipata**;
se $t_0 = t_1$ allora la rendita si dice **anticipata**.
Per analizzare il terzo criterio osserviamo la seguente figura:



Definizioni preliminari

La rendita si dice **immediata** se $t_0=0$, **differita di *t* anni** se $t_0=t$.

Il quarto criterio è riferito al numero n delle rate x_h. La rendita si dice **temporanea** se il numero n è finito; la rendita si dice **perpetua** se il numero delle rate è infinito.

Per convenzione la *durata* della rendita è il numero $n=t_n-t_1+1$.

Un problema fondamentale che si presenta è quello di **valutare** una rendita, cioè quello di determinare un capitale unico equivalente a tutte le rate in un prefissato regime finanziario ad un certo tasso. L'importo di tale capitale è detto valore della rendita e dipende dall'epoca in cui si fa la valutazione. Le valutazioni più importanti sono:

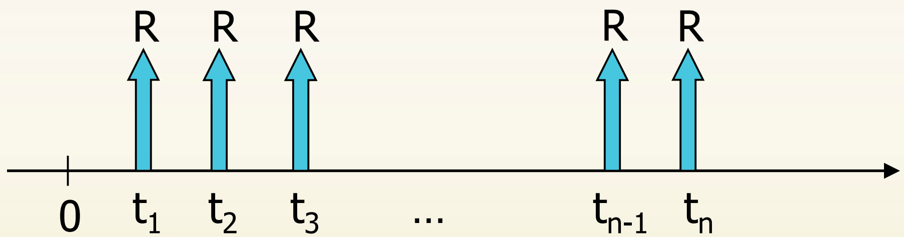
il **valore attuale di una rendita** se la valutazione è fatta in un'epoca che precede tutte le scadenze delle rate o coincide con la prima

il **montante di una rendita** se la valutazione è fatta in un'epoca successiva a tutte le scadenze delle rate o coincidente con l'ultima.

Rendita (immediata) posticipata di durata *n*

Una rendita immediata posticipata annua di durata *n* è una rendita ***r*** tale che:

- $t_0=0$
- $t_1=t_0+1$
- $x_h=R$ per ogni $h=1,2,\dots,n$;
- $t_h=k$ per ogni $h=1,2,\dots,n$;



Valutandola secondo la legge esponenziale al tasso *i*, il suo valore attuale è:

$$A=\sum_{h=1}^{n} x_h\cdot(1+i)^{-h}=\sum_{h=1}^{n} x_h\cdot v^h = R\cdot\sum_{h=1}^{n} v^h$$

cioè la somma dei valori attuali di ogni rata. Tale sommatoria è composta da *n* termini in progressione geometrica di ragione *v*.

Rendita (immediata) posticipata di durata *n*

Si può dimostrare, tramite semplici passaggi algebrici, che:

$$\boxed{\sum_{h=1}^{n} v^h = v\frac{1-v^n}{1-v} = a_{\overline{n}|\, i}}$$

Il simbolo appena introdotto si legge "**a figurato *n* al tasso *i***", e per la definizione del fattore di sconto *v*, si ha:

$$a_{\overline{n}|\, i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \quad ; \quad A = R \cdot a_{\overline{n}|\, i}$$

Rendita (immediata) posticipata di durata *n*

Per calcolare il montante le rate saranno capitalizzate.
La prima è capitalizzata per n-1 anni, la seconda per n-2 anni,…, l'ultima è pagata nell'istante scelto per il calcolo del valore del capitale:

$$S = R \cdot (1+i)^{n-1} + R \cdot (1+i)^{n-2} + \ldots + R \cdot (1+i) + R$$

La lettera *S* per convenzione indica che si tratta di un montante.
Ricordiamo che il fattore di capitalizzazione è r =$(1+i)^t$.

Se consideriamo il montante di una rendita di rata R=1:

$$s_{\overline{n|}\,i} = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ldots + (1+i) + 1$$

Rendita (immediata) posticipata di durata *n*

Si tratta della somma di *n* termini in progressione geometrica di ragione (1+i) che ha come primo termine uno:

$$s_{\overline{n}|\,i} = \frac{r^n - 1}{i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

→ rappresenta la formula compatta del montante di una rendita unitaria, tale simbolo si legge "**s figurato *n* al tasso *i***".
Il montante della rendita a rata costante sarà quindi:

$$S = R \cdot s_{\overline{n}|\,i}$$

Rendita (immediata) posticipata di durata *n*

Esempio.

Sia una rendita immediata posticipata con *n=4*, *R=5* euro, calcoliamo il valore attuale nei seguenti casi:

- *i=4%*;
- *i=3%*;

$$A(4\%) = 5 \cdot \sum_{h=1}^{4} 1{,}04^{-h} = 5\,\frac{1 - 1{,}04^{-4}}{0{,}04} = 5a_{\overline{4|}\,0{,}04} = 18{,}1495$$

$$A(3\%) = 5 \cdot \sum_{h=1}^{4} 1{,}03^{-h} = 5\,\frac{1 - 1{,}03^{-4}}{0{,}03} = 5a_{\overline{4|}\,0{,}03} = 18{,}5855$$

Rendita (immediata) posticipata di durata *n*

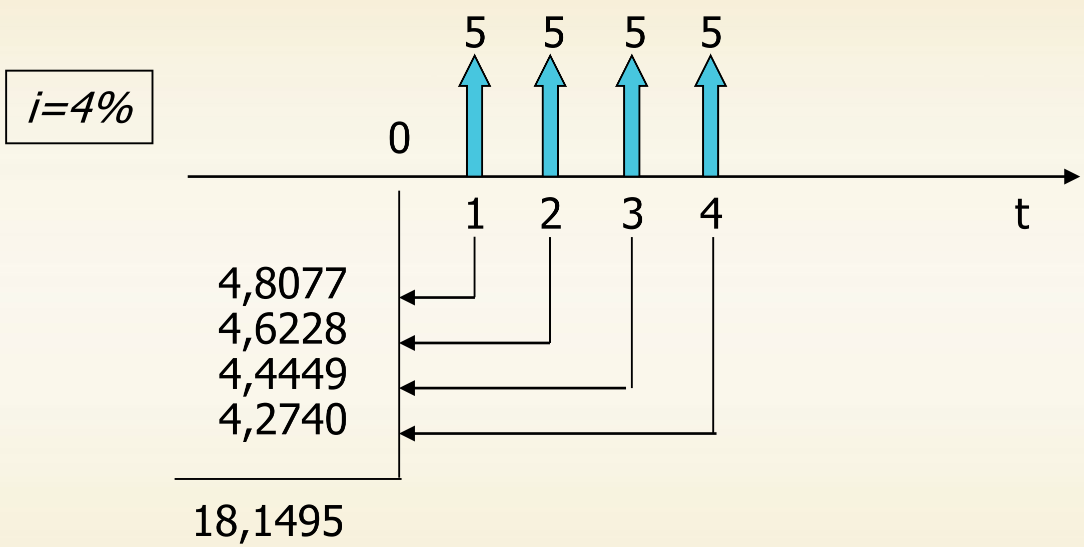
Il calcolo di a figurato 4 al tasso *4%* può essere effettuato sia manualmente mediante l’uso della funzione esponenziale, sia con l’ausilio delle tavole finanziarie, che con un foglio elettronico.
Ad esempio si può utilizzare la **funzione Excel**

VA(**tasso_int**;**periodi**;**pagam**;val_futuro;tipo)

in cui l’argomento è composto rispettivamente dal tasso di periodo, dal numero di periodi, dall’ammontare della rata costante, dal valore futuro dopo l’ultima rata (di solito pari a zero), e dal tipo di pagamento, anticipato o posticipato. La funzione fornisce direttamente il valore attuale.

Rendita (immediata) posticipata di durata *n*

Calcoliamo ora il valore attuale per *i=4%*:



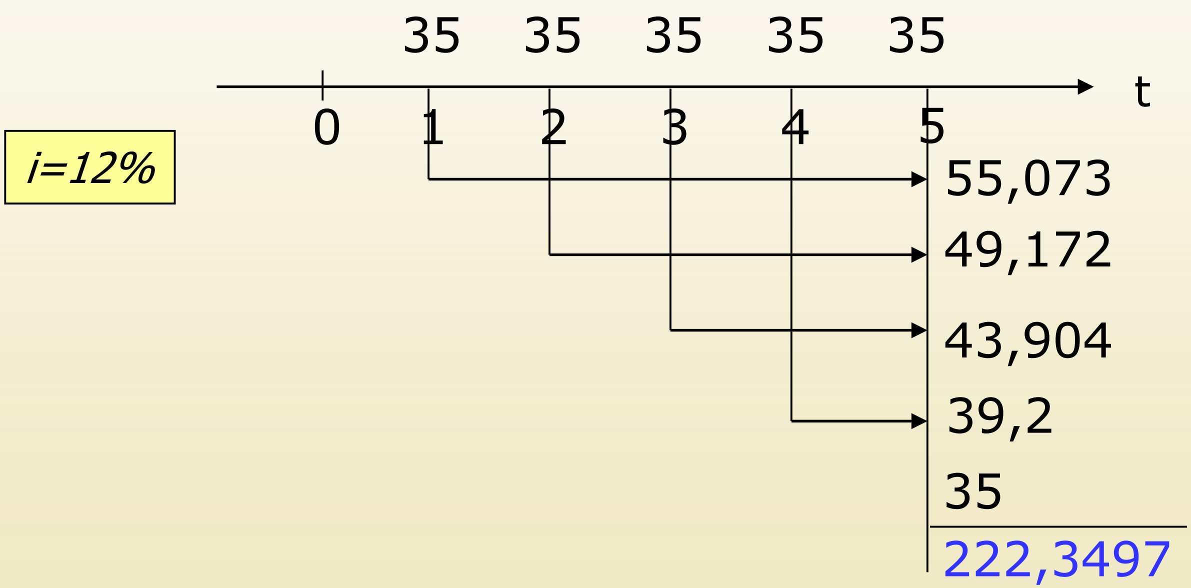
Nel caso *i=3%* notiamo che *A=18,5855*; ciò significa che: diminuendo il tasso di interesse, a parità di altre condizioni, il valore attuale aumenta. Ciò perché ogni rata è "scontata" per lo stesso periodo, ma ad un tasso minore.

Rendita (immediata) posticipata di durata *n*

Esempio: calcoliamo ora il montante di una rendita con rata *R=35*; *n=5*; *i=12%.*

$$S = 35 \cdot s_{\overline{5|}\,i} = 35 \cdot \frac{(1+0{,}12)^5 - 1}{0{,}12} = 222{,}3497$$

Si ottiene lo stesso risultato calcolando il montante direttamente, ossia sommando i montanti di ciascuna rata come chiarisce la figura:



Rendita perpetua posticipata

Consideriamo una rendita perpetua, ossia formata da un numero illimitato di rate. Non è facile trovare esempi di rendite perpetue; tuttavia in passato sono stati emessi Buoni fruttiferi irredimibili, cioè titoli di Stato che, a fronte della mancanza di restituzione del capitale, fornivano una rendita perpetua di cedole.

Il valore attuale di una rendita unitaria perpetua posticipata ("a figurato infinito al tasso *i*"), si ottiene calcolando il limite, per $n \to \infty$, del valore attuale di una rendita temporanea:

$$a_{\overline{\infty}|\,i} = \lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|\,i} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-v^n}{i} = \frac{1}{i}$$

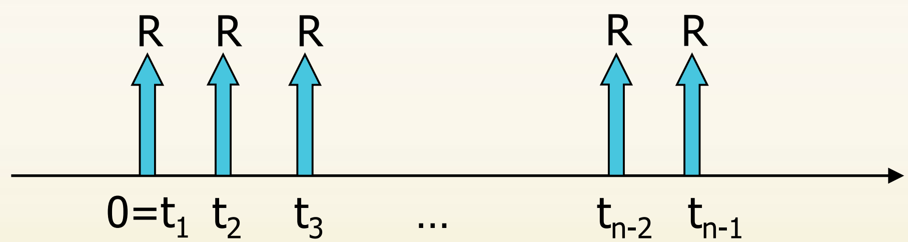
essendo $v<1$. In tal modo il valore attuale di una rendita perpetua **r** con rata *R* costante è:

$$\boxed{A = \frac{R}{i}}$$

Rendita (immediata) anticipata di durata *n*

Analogamente a quanto visto prima, una rendita immediata anticipata annua di durata *n* è una rendita **r** in cui:

- $t_0=0$
- $t_1=t_0$ (unica differenza rispetto al caso posticipato);
- $x_h=R$ per ogni h=1,2,…,n;
- $t_h=h-1$ per ogni h=1,2,…,n.



Valutandola secondo la legge esponenziale al tasso *i*, il suo valore attuale è:

$$A=\sum_{h=1}^{n} x_h\cdot(1+i)^{-(h-1)}=\sum_{h=1}^{n} x_h\cdot v^{h-1}=R\cdot\sum_{h=1}^{n} v^{h-1}=\frac{R}{v}\cdot\sum_{h=1}^{n} v^{h}$$

cioè la somma dei valori attuali di ogni rata al tempo t_0.

Rendita (immediata) anticipata di durata *n*

La rendita unitaria immediata anticipata è:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|\,i} = \frac{1 - v^n}{d} = (1 + i) \cdot a_{\overline{n}|\,i}$$

si legge "**a *anticipato* figurato *n* al tasso *i***", il valore attuale della rendita temporanea immediata anticipata è:

$$\boxed{A = R \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|\,i}}$$

Come già detto nel caso posticipato, i valori di "a anticipato" si possono calcolare direttamente con la funzione esponenziale, si possono reperire sulle tavole finanziarie oppure si possono calcolare mediante la funzione Excel

VA(**tasso_int**;**periodi**;**pagam**;val_futuro;tipo)

descritta precedentemente.

Rendita (immediata) anticipata di durata *n*

Il montante di una rendita anticipata è la somma dei montanti di ciascuna rata al tempo t_n.

$$S = R \cdot r^n + R \cdot r^{n-1} + R \cdot r^{n-2} + \cdots + R \cdot r$$

Definiamo ora la formula compatta del montante della rendita unitaria anticipata:

$$\ddot{s}_{\overline{n|}\,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{d} = (1+i) \cdot s_{\overline{n|}\,i}$$

Il montante della rendita temporanea immediata anticipata è

$$\boxed{S = R \cdot \ddot{s}_{\overline{n|}\,i}}$$

Rendita (immediata) anticipata di durata *n*

Ad esempio calcoliamo il valore attuale di una rendita costituita da 5 rate annue di 100 euro ciascuna, valutata al tasso *i=2,5%* ed al tasso *i=3,5%*.

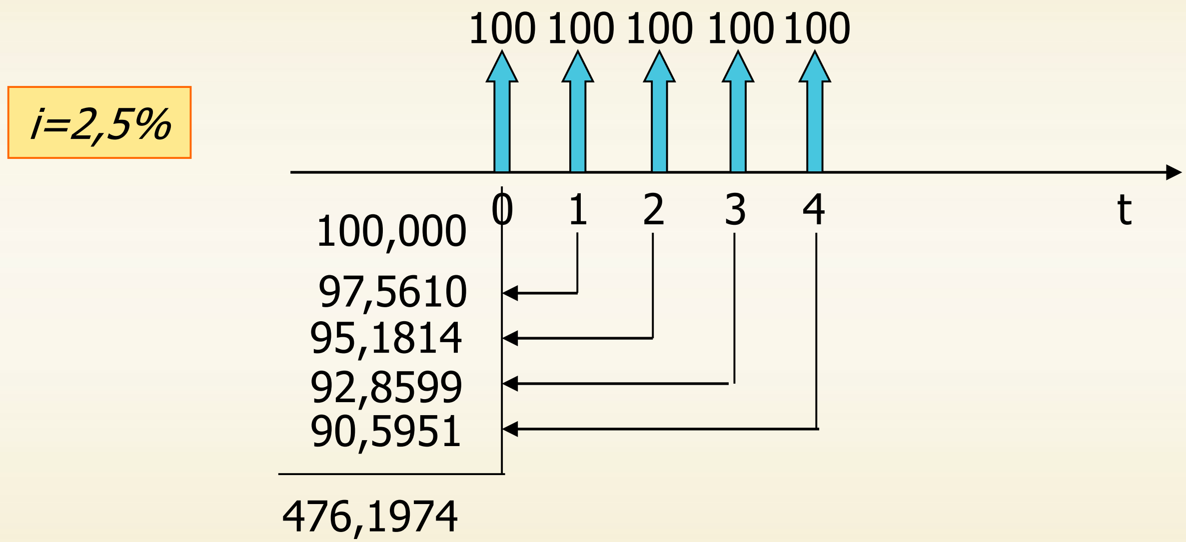
$$A = 100 \cdot (1+i) \cdot \frac{1-v^n}{i} = 100 \cdot 1{,}025 \cdot \frac{1-1{,}025^{-5}}{0{,}025} = 100\ddot{a}_{\overline{5|}\,0{,}025} = 476{,}1974$$

$$A = 100 \cdot (1+i) \cdot \frac{1-v^n}{i} = 100 \cdot 1{,}035 \cdot \frac{1-1{,}035^{-5}}{0{,}035} = 100\ddot{a}_{\overline{5|}\,0{,}035} = 467{,}3079$$

I calcoli, anche qui, si possono fare sia con le tavole finanziarie, sia con l'uso del calcolo esponenziale, che con l'uso di Excel.

Rendita (immediata) anticipata di durata *n*

Calcolando i valori attuali di ogni singola rata osserviamo che la prima rata non viene attualizzata:



Se la rendita fosse per ipotesi posticipata, per calcolarne il valore attuale basterebbe attualizzarla secondo il fattore $v=(1+i)^{-1}$.

Rendita perpetua anticipata

Il valore attuale di una rendita perpetua anticipata a rate costanti è uguale alla somma della rata *R* col valore attuale della stessa rendita, però posticipata:

$$A = R + \frac{R}{i}$$

Infatti, considerando la rendita perpetua anticipata *unitaria*, il valore attuale è:

$$\ddot{a}_{\overline{\infty|}\, i} = (1+i) \cdot \frac{1}{i} = \frac{1}{i} + 1 = a_{\overline{\infty|}\, i} + 1$$

dal momento che la rendita perpetua anticipata è pari a quella posticipata, capitalizzata per un anno, cioè capitalizzata secondo il fattore (*1+i*).
Ad esempio, volendo valutare al tasso *i=3%* una rendita perpetua anticipata di rata *R=12* euro, si ha:

$$A = 12 + \frac{12}{0{,}03} = 12 + 400 = 412$$

Rendita differita di *t* anni

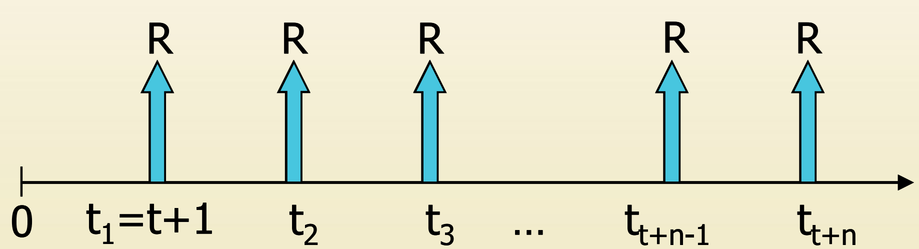
Può capitare che l'inizio della rendita, inteso come il tempo t_0 in cui viene pagata la prima rata, sia differito di *t* anni. In tal caso il calcolo del valore attuale secondo una legge di capitalizzazione assegnata è molto semplice: basta scontare secondo un fattore v^t il valore attuale della *rendita immediata corrispondente a quella data*. Riepiloghiamo ora le rendite già viste, nell'ipotesi di un differimento di *t* anni della prima rata:

a) rendita temporanea differita posticipata.

$t_0 = t$;

$t_1 = t+1$;

. . .



$t_h = t+h$ $(h=1,\ldots,n)$;

Rendita differita di *t* anni

Il suo valore attuale è:

$$A = R \cdot v^{t+1} + R \cdot v^{t+2} + \cdots + R \cdot v^{t+n} = R \cdot v^t \cdot a_{\overline{n}|\,i}$$

Nelle tavole finanziarie si trova il simbolo

$$_{t/}a_{\overline{n}|\,i} = v^t \cdot a_{\overline{n}|\,i}$$

che si legge "**a figurato *n* al tasso *i* differito *t***". Il valore attuale prende la seguente forma:

$$\boxed{A = R \cdot {}_{t/}a_{\overline{n}|\,i}}$$

e si può dimostrare che vale la seguente relazione:

$$_{t/}a_{\overline{n}|\,i} = a_{\overline{t+n}|\,i} - a_{\overline{t}|\,i}$$

Quest'ultima esprime che una rendita di durata *n* differita di *t* anni, equivale ad una rendita immediata di durata *t*+*n* privata delle prime *t* rate (che equivalgono ad una rendita immediata di durata *t*).

Rendita differita di *t* anni

b) rendita temporanea differita anticipata.
$t_0 = t_1 = t$;
$t_2 = t+1$;
. . .
$t_h = t+h-1$ (h=1,…,n);
Il valore attuale è:

$$A = R \cdot v^t + R \cdot v^{t+1} + \cdots + R \cdot v^{t+n-1} = R \cdot v^t \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|\,i}$$

Nelle tavole finanziarie si trova il simbolo

$$_{t/}\ddot{a}_{\overline{n}|\,i} = v^t \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|\,i}$$

che si legge "**a anticipato, figurato *n* al tasso *i* differito *t***". Il valore attuale assume la seguente forma:

$$\boxed{A = R \cdot {}_{t/}\ddot{a}_{\overline{n}|\,i}}$$

Rendite frazionate

Prendiamo ora in considerazione il caso delle rendite frazionate, ed in particolare quello in cui la distanza temporale tra le rate è pari ad 1/m di anno. Supponendo una rendita posticipata r_m, essa sarà costituita da rate costanti R'=R/m, di durata m·n e periodicità 1/m. Lo studio di essa si riconduce al caso di una rendita annua, dopo aver posto:

$$i_{1/m} = (1+i)^{1/m} - 1$$
$$d_{1/m} = 1 - (1-d)^{1/m}$$
$$\delta_{1/m} = \frac{\delta}{m}$$

Rendite frazionate

Il valore attuale, considerando la nuova scala temporale, è:

$$A = R' \cdot a_{\overline{m \cdot n}|\, i_{1/m}}; \qquad a_{\overline{m \cdot n}|\, i_{1/m}} = \frac{1-(1+i_{1/m})^{-m \cdot n}}{i_{1/m}}$$

Si può anche esprimere il valore attuale della rendita frazionata mediante l'uso dei valori della corrispondente rendita annua:

$$A = \frac{R}{m} \cdot \frac{1-v^n}{i_{1/m}} = R \cdot \frac{1-v^n}{j(m)}$$

Il valore attuale di una rendita frazionata di rata annua unitaria è:

$$a^{(m)}_{\overline{n}|\, i} = \frac{1-v^n}{j(m)}$$

Ad esempio calcoliamo il valore attuale di una rendita posticipata di durata quinquennale e rata annua R=48 euro pagabile mensilmente, valutata al tasso *i=3%*.

Rendite frazionate

Prima di procedere al calcolo dobbiamo "tradurre" i dati per la rendita r_{12}:

$R' = R/12 = 4$ euro,

$m \cdot n = 12 \cdot 5 = 60$,

$i_{1/12} = (1+0{,}03)^{1/12} - 1 = 0{,}002466$

$$A = 48 \cdot \frac{1-(1+0{,}03)^{-5}}{12 \cdot 0{,}002466} = 222{,}832$$

Si può arrivare allo stesso risultato:

$$A = R' \cdot a_{\overline{m \cdot n}|\, i_{1/m}} = 4 \cdot \frac{1-(1+0{,}002466)^{-60}}{0{,}002466} = 222{,}832$$

Rendite frazionate

Analogamente possiamo pervenire al calcolo del montante:

$$S = R' \cdot s_{\overline{m \cdot n}|\, i_{1/m}}; \qquad s_{\overline{m \cdot n}|\, i_{1/m}} = \frac{(1 + i_{1/m})^{m \cdot n} - 1}{i_{1/m}}$$

La formula del montante di una rendita unitaria frazionata in m-esimi di anno (esprimendo il tempo in anni) è:

$$s_{\overline{n}|\, i}^{(m)} = \frac{(1 + i)^{n} - 1}{j(m)}$$

Il montante di una rendita a rata costante è:

$$S = R \cdot s_{\overline{n}|\, i}^{(m)}$$

Problemi relativi alle rendite

Tutte le formule ricavate precedentemente sono state impostate in modo da fornire montante o valore attuale di una rendita caratterizzata secondo la **legge esponenziale**, il tasso d'interesse, la durata e la rata.
Queste formule possono essere utilizzate in senso generale; note tre delle quattro grandezze in questione, si può ricavare la quarta. Se per esempio prendiamo in considerazione:

$$A = R \cdot a_{\overline{n|}\, i}$$

Questa formula ci fornisce il valore attuale della rendita *A* noti *R*, *n* ed *i*.
Ma se noi conoscessimo *A*, *n* ed *i* potremo ricavare il valore della rata *R*.

Problemi relativi alle rendite

Ricerca della durata.
Il calcolo di *n* in funzione di *A*, *i* e *R* non presenta grosse difficoltà:

$$A = R \cdot a_{\overline{n}|i} = R \cdot \frac{1 - v^n}{i} \Rightarrow \frac{A}{R} \cdot i = 1 - v^n$$

Abbiamo moltiplicato primo e secondo membro per *i*, si nota subito che la nostra incognita si trova all’esponente. E’ necessario ricorrere ai logaritmi per esplicitare *n*, il passaggio successivo sarà perciò:

$$\begin{aligned} v^n &= 1 - \frac{A}{R} \cdot i \Rightarrow \log v^n = n \cdot \log v \\ &= \log\left(1 - \frac{A}{R} \cdot i\right) \\ &\Rightarrow n = \frac{\log\left(1 - \frac{A}{R} \cdot i\right)}{\log v} = -\frac{\log\left(1 - \frac{A}{R} \cdot i\right)}{\log(1 + i)} \end{aligned}$$

Problemi relativi alle rendite

Esempio.
Un capitale di 8.500 euro è depositato in un fondo che rende in ragione del *10,50%* annuo. Si prelevano dal fondo 2.000 euro ogni anno. Dopo quanto tempo si esaurisce il capitale di partenza?
Dal problema ricaviamo i seguenti dati:
R=2.000; i=10,5%; A=8.500; dobbiamo trovare la durata *n*.

$$A = 2.000 \times a_{\overline{n}|0,105} = 2.000 \times \frac{1 - v^n}{0,105}$$

Per esplicitare *n* ricorriamo alla formula che abbiamo ricavato prima:

$$n = -\frac{\log\left(1 - \frac{A}{R} \cdot i\right)}{\log(1 + i)} = -\frac{\log\left(1 - \frac{8.500}{2.000} \cdot 0,105\right)}{\log(1,105)} = -\frac{-0,59104}{0,09985} = 5,92$$

Il capitale si estingue dopo 5,92 anni.

Problemi relativi alle rendite

<u>Ricerca della rata</u>.
Determiniamo la rata conoscendo *A*, *n* ed *i*.
Partendo sempre dalla formula del valore attuale

$$A = R \cdot a_{\overline{n|}\,i} \rightarrow R = \frac{A}{a_{\overline{n|}\,i}}$$

Si esplicita la *R* e si trova direttamente il valore della rata.
Esempio calcolare la rata *R* di una rendita caratterizzata da *A=354,595*; *i =0,024695*; *n = 8*.

$$R = \frac{A}{a_{\overline{n|}\,i}} = \frac{354{,}595}{\frac{1-(1{,}024695)^{-8}}{0{,}024695}} = \frac{354{,}595}{7{,}17947} = 49{,}39$$

Problemi relativi alle rendite

Ricerca del tasso d'interesse.
Alla determinazione del tasso sono connesse maggiori difficoltà rispetto ai problemi precedenti. Questo tipo di problema è di notevole rilievo pratico, ad esempio quando si deve verificare la convenienza di un investimento, ma questo aspetto verrà chiarito in seguito.
Le difficoltà di calcolo si incontrano in quanto quasi mai arriviamo ad una formula operativa che ci fornisce il risultato esatto del tasso di interesse, ma è necessario ricorrere a metodi approssimativi.
Se consideriamo la seguente rendita:
A=1.000, R=350, n=5, e dobbiamo cercare il tasso a cui è stato valutato A

$$A = R \cdot a_{\overline{n|}\, i} = 350 \cdot \frac{1-(1+i)^{-5}}{i}$$

Non posso calcolare *i* direttamente.
Un metodo approssimativo per il calcolo del tasso è l'interpolazione lineare.

Problemi relativi alle rendite

<u>Interpolazione</u>.
Consideriamo la seguente operazione finanziaria:

-98,8	3	3	3	3	3	103
0	1	2	3	4	5	6

Possiamo scriverla in questa modo:

$$98{,}8 = 3 \cdot a_{\overline{5|}\,i} + 103 \cdot (1+i)^{-6}$$

che rappresenta l’equazione di equilibrio tra entrate e uscite.

Problemi relativi alle rendite

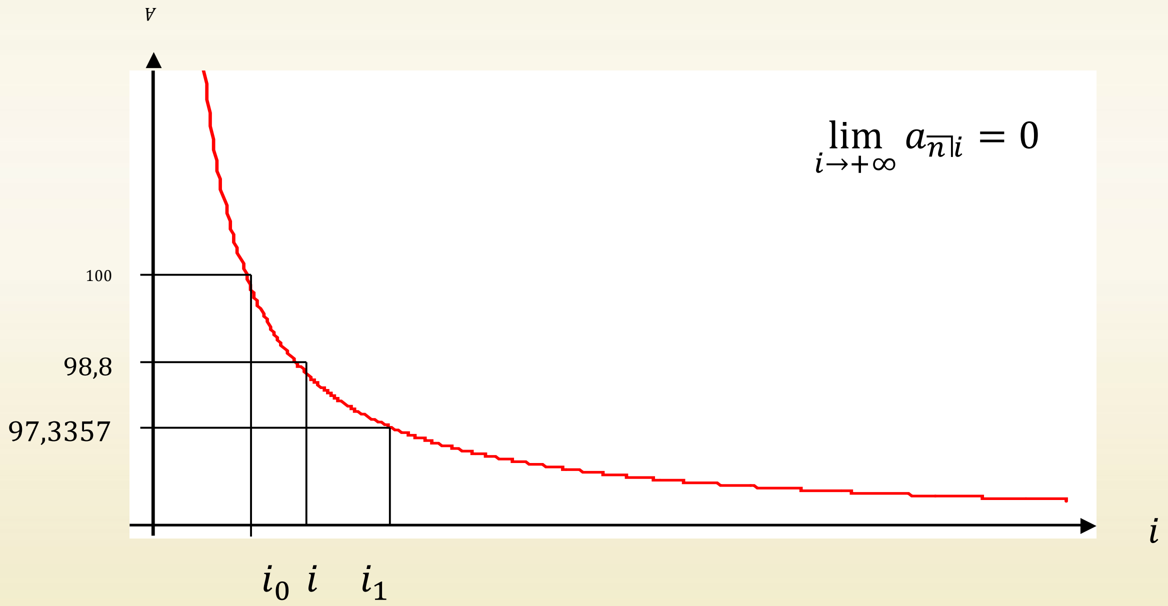
Devo cercare il tasso che sostituito nell’equazione mi dia 98,8.
Indico come sempre il valore attuale A = 98,8.
Procedo per tentativi, ipotizzando tassi via via crescenti finché trovo quello giusto.

i%	A
2%	105,6014
2,5%	102,7541
3%	100
3,5%	97,3357
4%	94,7579

IL TASSO è COMPRESO FRA QUESTI DUE VALORI

Problemi relativi alle rendite

Come abbiamo visto anche dai calcoli effettuati il valore attuale di una rendita diminuisce all’aumentare del tasso:



Problemi relativi alle rendite

Abbiamo osservato che il tasso è compreso fra il *3%* e il *3,5%* che chiamo rispettivamente i_0 *e* i_1; indico A_0 il valore che trovo sostituendo i_0 nell'equazione, e A_1 invece il valore che trovo sostituendo i_1.

$$i_0 = 0,03 \longrightarrow A_0 = 100$$

$$i = ? \longrightarrow A = 98,8$$

$$i_1 = 0,035 \longrightarrow A = 97,3357$$

Problemi relativi alle rendite

Un valore approssimato del tasso sarà fornito dalla seguente formula

$$i \simeq i_0 + \frac{i_1 - i_0}{A_1 - A_0} \cdot (A - A_0)$$

Sostituendo i dati troveremo:

$$i \simeq 0{,}03 + \frac{0{,}035 - 0{,}03}{97{,}3357 - 100} \cdot (98{,}8 - 100) = 0{,}032252$$

Il tasso cercato è *3,22%*.

Conclusioni

- In questo modulo abbiamo analizzato le caratteristiche delle rendite finanziarie certe, in termini di durata, differimento e periodicità.

- Da sottolineare l'importanza della simbologia adottata nello studio delle rendite, il simbolo "a figurato *n* al tasso *i*" e "s figurato *n* al tasso *i*" sono d'uso comune per individuare valore attuale e montante di rendite unitarie.

- Abbiamo visto diversi esempi di calcolo del valore attuale e del montante di una rendita e risolto alcuni problemi relativi alla ricerca della durata, del tasso e della rata.

- Fra i problemi relativi alle rendite abbiamo esaminato la ricerca del tasso d'interesse mediante interpolazione, un problema molto importante nella matematica finanziaria.

Rendite certe

Temporanee	Perpetue
Immediate	Differite
Posticipate	Anticipate
Annue	Frazionate
Rata costante	Rata variabile

Mensili
Semestrali
Trimestrali
…

Legge esponenziale

- **Valore attuale o montante**
- **Tasso d'interesse**
- **Rata**
- **Durata**

Note tre di queste quattro grandezze è possibile ricavare la quarta

ESERCIZI

Esercizio 1

- Calcolare quale versamento semestrale (posticipato) per 5 anni porta ad accumulare un capitale di 8.500 euro, se il tasso d'interesse è il 7,50% annuo.

$$M = 8.500, \quad m = 2, \quad n = 5, \quad i = 0{,}075$$

$$R = ?$$

$$\left(1 + i_{1/2}\right)^2 = 1{,}075 \rightarrow i_{1/2} = 0{,}0368$$

$$8.500 = R \cdot s_{\overline{n|}\, i}^{(m)}$$

$$= R \cdot (1 + i)^n \cdot \frac{1 - (1 + i_{1/m})^{-n \cdot m}}{i_{1/m}}$$

$$\Rightarrow 8.500 = R \cdot (1 + i)^5 \cdot \frac{1 - (1 + i_{1/2})^{-10}}{i_{1/2}}$$

$$\Rightarrow R = 718{,}47$$

- Possiamo alternativamente ricondurci a rate non frazionate:

$$M = 8.500, \quad n = 10, \quad i = 0,075$$
$$R = ?$$
$$\left(1 + i_{1/2}\right)^2 = 1,075 \to i_{1/2} = 0,0368$$
$$8.500 = R \cdot s_{\overline{n}|\, i_{1/2}} = R \cdot s_{\overline{10}|\, 0,0368} = R \cdot \frac{(1 + i_{1/2})^n - 1}{i_{1/2}} =$$
$$= R \cdot \frac{(1,0368)^{10} - 1}{0,0368} = 11,83 \cdot R$$
$$\Rightarrow R = 718,47$$

Esercizio 2

- Calcolare, al tasso d'interesse dell'*8%* annuo, l'ammontare della rata mensile posticipata il cui pagamento equivale a quello di 3.600 euro alla fine dell'anno.

$$M = 3.600, \quad m = 12, \quad n = 1, \quad i = 0{,}08$$

$$R = ?$$

$$(1 + i_{1/12})^{12} = 1{,}08 \Rightarrow i_{1/12} = 0{,}0064$$

$$3.600 = R \cdot s_{\overline{n|}\, i}^{(m)}$$

$$= R \cdot (1{,}08)^1 \cdot \frac{1 - (1 + i_{1/12})^{-12}}{i_{1/12}}$$

$$\Rightarrow R = 289{,}53$$

Esercizio 3

- Calcolare, al tasso d'interesse del *9,50%* annuo, la rata semestrale che, corrisposta anticipatamente per 5 anni, equivale al pagamento di una rata annua posticipata di 1.800 euro per 12 anni.

$$(1+i_{1/2})^2 = 1{,}095 \Rightarrow i_{1/2} = 0{,}0464225$$

$$R \cdot \ddot{a}^{(2)}_{\overline{5|}\,i} = R \cdot 1{,}095^{1/2} \cdot \frac{1-(1+i_{1/2})^{-10}}{i_{1/2}} =$$

$$= 1.800 \cdot \frac{1-1{,}095^{-12}}{0{,}095}$$

$$\Rightarrow 8{,}2224 \cdot R = 12.570{,}9109 \rightarrow R$$

$$= 1.528{,}85$$

Esercizio 4

- Una rendita è costituita dai seguenti flussi:
- 100.000 disponibili tra 1 anno e 4 mesi;
- 200.000 disponibili tra 2 anni;
- 250.000 disponibili tra 3 anni e 2 mesi.

Calcolare valore attuale e montante dei flussi al tasso del 12% annuo nonché la rata costante che, sostituita alle rate variabili, fornirebbe gli stessi risultati.

- Il valore attuale della rendita (aperiodica a rate variabili) si ottiene sommando i valori attuali delle singole rate. Ossia:

$$A_1 = 100.000 \cdot (1 + 0{,}12)^{-(1+4/12)} = 100.000 \cdot 1{,}12^{-1,\overline{3}} = 85.977$$
$$A_2 = 200.000 \cdot (1 + 0{,}12)^{-2} = 159.439$$
$$A_3 = 250.000 \cdot (1 + 0{,}12)^{-(3+2/12)} = 250.000 \cdot 1{,}12^{-3,1\overline{6}} =$$
$$= 174.616$$
$$\Rightarrow A = 85.977 + 159.439 + 174.616 = 420.032$$

- Possiamo ricavare il montante della rendita capitalizzando il valore attuale:

$$M = 420.032 \cdot (1 + 0{,}12)^{(3+2/12)} = 601.367$$

- La rata costante da sostituire dovrà verificare:

$$420.032 = R \cdot (1{,}12)^{-1{,}\overline{3}} + R \cdot (1{,}12)^{-2} + R \cdot (1{,}12)^{-3{,}1\overline{6}}$$
$$\Rightarrow R = 178.040$$

Esercizio 5

- A fronte di un investimento si può contare su cinque entrate costanti posticipate di importo pari a 50.000.000 euro, la prima delle quali tra 3 anni. Calcolare il valore dell'investimento utilizzando un tasso del 15% annuo.

- Il valore ad oggi dell'investimento risulta il valore attuale di una rendita posticipata differita di 2 anni

$$A = 50.000.000 \cdot (1 + 0{,}15)^{-2} \cdot a_{\overline{5|}\,0{,}15} =$$
$$= 50.000.000 \cdot 0{,}75614 \cdot \frac{1 - (1 + 0{,}15)^{-5}}{0{,}15} =$$
$$= 50.000.000 \cdot 0{,}75614 \cdot 3{,}35213 = 126.733.979$$

Esercizio 6

- Due rendite sono cosi strutturate:
- la prima prevede il pagamento di rate frazionate quadrimestralmente per una durata di 7 anni.
- La seconda il versamento di importi annui di importo pari a 2.000.000 euro per una analoga durata.

Calcolare quale rata frazionata rende equivalenti le due alternative utilizzando il tasso del 12,5% annuo.

- Calcoliamo il valore attuale della seconda rendita:

$$A = 2.000.000 \cdot a_{\overline{7|}\,0,125} =$$
$$= 2.000.000 \cdot \frac{1 - (1 + 0,125)^{-7}}{0,125} =$$
$$= 2.000.000 \cdot \frac{1 - 0,43846}{0,125} = 8.984.640$$

- Le due rendite sono equivalenti se hanno lo stesso valore attuale.
- Imponiamo quindi l’uguaglianza (con l’incognita *R*) calcolando preliminarmente il tasso quadrimestrale:

$$i_{1/3} = (1 + 0{,}125)^{1/3} - 1 = 0{,}04004$$

$$8.984.640 = R \cdot a_{\overline{21|}\,0,04004} =$$

$$= R \cdot \frac{1 - (1 + 0,04004)^{-21}}{0,04004} =$$

$$= R \cdot \frac{0,56152}{0,04004} \Rightarrow R = 640.662$$

Esercizio 7

- Un risparmiatore versa su un fondo ad accumulazione una somma annua di 10.000.000 euro con lo scopo di costituire un capitale pari a 90.000.000 euro.
- Calcolare:

- a quale tasso deve maturare il montante della rendita per ottenere il capitale desiderato dopo 7 anni;
- dopo quanti anni si costituirebbe il capitale se il tasso riconosciuto fosse del 2% inferiore a quello calcolato precedentemente.

- L’equazione che fornisce il tasso è:

$$10.000.000 \cdot \frac{(1+i)^7 - 1}{i} = 90.000.000$$

- Con *i=8%* il montante prodotto dall’investimento è pari a 89.228.034; utilizzando invece, il tasso del 9% il montante è pari a 92.004.347. Procediamo quindi per interpolazione prendendo come riferimento questi due tassi.

$$i = 0{,}08 + \\ + \frac{0{,}09 - 0{,}08}{92.004.347 - 89.228.034} \cdot (90.000.000 - 89.228.034) \\ \simeq 0{,}08278$$

- Applicando la formula del montante:

→ si ottiene:

$$M = R \cdot s_{\overline{n|}\, i} = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\frac{M \cdot i}{R} = (1+i)^n - 1 \Rightarrow \frac{M \cdot i}{R} + 1 = (1+i)^n$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{M \cdot i}{R} + 1\right) = n \cdot \log(1+i)$$

$$\Rightarrow n = \frac{\log\left(\frac{M \cdot i}{R} + 1\right)}{\log(1+i)}$$

$$= \frac{\log\left(\frac{90.000.000 \cdot 0{,}06278}{10.000.000} + 1\right)}{\log(1 + 0{,}06278)}$$

$$= \frac{0{,}4479}{0{,}0609} = 7{,}3547$$

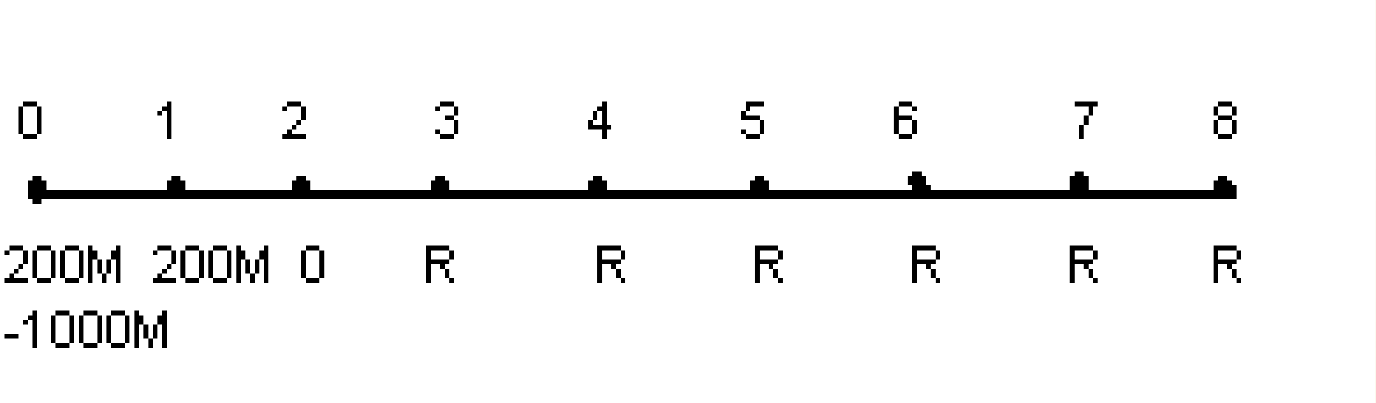
Esercizio 8

- Una partita di merce viene pagata in 8 rate mensili di cui:

- le prime due pari al 20% del prezzo per contanti, fissato in 1.000.000 euro, corrisposte in via anticipata immediata;
- le rimanenti costanti e versate regolarmente a partire dal termine del terzo mese.

Calcolare le rate in questione se l’operazione viene effettuata al tasso del 15% annuo.

- Lo schema dei flussi per l'operazione in oggetto è:



- Il tasso mensile è:

$$i_{1/12} = (1{,}15)^{1/12} - 1 = 0{,}011715$$

- L’importo della rata si ottiene risolvendo l’equazione:

$$1.000.000 = 200.000 \cdot \ddot{a}_{\overline{2}|\,0,011715} + R \cdot a_{\overline{6}|\,0,011715} \cdot (1{,}011715)^{-2}$$

$$\ddot{a}_{\overline{2}|\,0,011715} = (1 + 0{,}011715) \cdot \frac{1 - (1 + 0{,}011715)^{-2}}{0{,}011715} = 1{,}9884$$

$$a_{\overline{6}|\,0,011715} = \frac{1 - (1 + 0{,}011715)^{-6}}{0{,}011715} = 5{,}7615$$

$$\Rightarrow R = 107.006$$

Esercizio 9

- Un individuo di 40 anni d'età sottoscrive un contratto che gli assicura una rendita perpetua posticipata annua a partire dall'età di 65 anni. Ipotizzando che la rata della rendita sia di £ 2.000.000 e che il tasso di riferimento sia del 4% calcolare quale sarà l'importo complessivo che l'individuo dovrà versare oggi a fronte della prestazione indicata. L'operatore dispone, inoltre, di una seconda alternativa: versare 10 rate annue posticipate invece dell'importo unico calcolato al punto precedente; calcolare l'importo delle rate in questione.

- Il valore attuale della rendita perpetua posticipata annua è:

$$A = \frac{R}{i} = \frac{2.000.000}{0{,}04} = 50.000.000$$

- Il valore attuale di tale somma all'epoca *0* sarà:

$$A = C \cdot (1+i)^{-n} = 50.000.000 \cdot (1+0{,}04)^{-25} = 18.755.840$$

- L'importo delle rate della seconda alternativa d'investimento si ottiene eguagliando il v.a. di 10 rate costanti posticipate:

$$18.755.840 = R \cdot a_{\overline{10|}\,0,04} = R \cdot \frac{1-(1+0,04)^{-10}}{0,04}$$

$$=$$

$$= 8,1109 \cdot R$$

$$\Rightarrow R = 2.312.425$$

Esercizio 10

- Un operazione finanziaria prevede flussi bimestrali che variano in progressione aritmetica di primo termine 250.000 ed ultimo di £ 400.000 e durata un anno. Calcolare il montante di tale operazione finanziaria al tasso del 12%. Ricalcolare il valore in questione nel caso in cui la progressione delle rate fosse di tipo geometrico.

- Ricaviamo le rate.
- Determiniamo la ragione della progressione:

$$R_1 = 250.000;\; R_6 = 400.000$$

$$R_n = R_1 + (n-1)\cdot D \Rightarrow D = \frac{400.000 - 250.000}{5} = 30.000$$

- La successione delle rate sarà: 250.000; 280.000; 310.000; 340.000; 370.000; 400.000.
- Calcoliamo il montante capitalizzando ciascuna rata utilizzando il tasso bimestrale:

$$i_{1/6} = (1{,}12)^{1/6} - 1 = 0{,}01906$$

$$\frac{M}{10.000} = 25 \cdot (1{,}01906)^5 + 28 \cdot (1{,}01906)^4 + 31 \cdot (1{,}01906)^3 + $$
$$+34 \cdot (1{,}01906)^2 + 37 \cdot (1{,}01906) + 40 = 203{,}4918$$
$$\Rightarrow M = 2.034.918$$

- Se le rate variano in progressione geometrica si ha:

$$R_6 = R_1 \cdot q^5 \Rightarrow q = \left(\frac{400.000}{250.000}\right)^{1/5} = 1{,}09856$$

- Il montante si trova sempre capitalizzando ciascuna rata utilizzando il tasso bimestrale:

$$\frac{M}{10.000} = 25 \cdot (1{,}01906)^5 + 25 \cdot q \cdot (1{,}01906)^4 + 25 \cdot q^2 \cdot (1{,}01906)^3 + 25 \cdot q^3 \cdot (1{,}01906)^2 + +25 \cdot q^4 \cdot (1{,}01906) + 25 \cdot q^5 = 200{,}5478$$

$$\Rightarrow 2.005.478$$

Esercizio 11

- Una rendita è costituita dai seguenti flussi: 100 disponibili tra 1 anno e 2 mesi; 150 disponibili tra 2 anni e 4 mesi. Calcolare valore attuale e montante della rendita al 10 % nonché la rata costante che, sostituita alle rate variabili, fornirebbe gli stessi risultati.

$$P = 100 \cdot (1+0{,}10)^{-(1+2/12)} + 150 \cdot (1+0{,}10)^{-(2+4/12)} =$$
$$= 209{,}567$$
$$M = 209{,}567 \cdot (1+0{,}10)^{(2+4/12)} = 261{,}762$$
$$209{,}567 = R \cdot (1+0{,}10)^{-(1+2/12)} + R \cdot (1+0{,}10)^{-(2+4/12)}$$
$$=$$
$$1{,}6954 \cdot R \rightarrow R = 123{,}612$$

Esercizio 12

- Sia data una rendita perpetua, a rata costante anticipata $R = 15$ euro pagabile all'inizio di ogni anno. Determinare l'intensità istantanea semestrale δ della legge esponenziale che rende equa l'operazione di acquisto della rendita al prezzo $P = 120$ euro e calcolare il valore attuale della rendita in base a tale legge esponenziale. Determinare inoltre la variazione ΔP che deve subire il prezzo della rendita affinché l'operazione di acquisto abbia un tasso interno di rendimento semestrale del 20%.

- Per tali rendite si ha:

$$P = R \cdot \frac{1+i}{i} = R \cdot \left(1 + \frac{1}{i}\right)$$
$$\Rightarrow \frac{P}{R} - 1 = \frac{1}{i} \Rightarrow i = \frac{R}{P-R} = 0{,}142857$$

- Si deduce

$$i_{1/2} = \sqrt{1+i} - 1 = 0{,}069045$$
$$\Rightarrow \delta^* = \log\left(1 + i_{1/2}\right) = 0{,}066766$$

- Dall’equazione di equilibrio

$$P + \Delta P = R \cdot \left(1 + \frac{1}{i}\right)$$

dove

$$i = \left(1 + i_{1/2}\right)^2 - 1 = 0{,}44$$

si ricava:

$$\Delta P = R \cdot \left(1 + \frac{1}{i}\right) - P = -70{,}9091$$

Esercizio 13

- Sia dato il flusso di importi monetari $x = \{x_0; x_1; x_2\}$, esigibile secondo lo scadenzario $t = \{t_0; t_1; t_2\}$, ove $x = \{-90; 5; 100\}$ e $t = \{0; 1; 2{,}5\}$ anni.

- Calcolare il tasso interno di rendimento *i** dell'operazione finanziaria *x/t*. Supponendo di volere posticipare la data di esigibilità dell'ultima posta di Δt_2 anni, si determini Δt_2 in modo che l'operazione finanziaria $x/\{t_0; t_1; t_2 + \Delta t_2\}$ abbia un tasso interno di rendimento del 7%.

- L’equazione di equilibrio è

$$x_0 \cdot (1+TIR)^{-t_0} + x_1 \cdot (1+TIR)^{-t_1} + x_2 \cdot (1+TIR)^{-t_2} = 0$$
$$-90 \cdot (1+TIR)^{-0} + 5 \cdot (1+TIR)^{-1} + 100 \cdot (1+TIR)^{-2,5} = 0$$

- Per interpolazione: $TIR = 0{,}0656$
- Dato il nuovo *TIR*, l’equazione di equilibrio è:

$$x_0 \cdot (1+TIR)^{-t_0} + x_1 \cdot (1+TIR)^{-t_1} + x_2 \cdot (1+TIR)^{-(t_2+\Delta t_2)} = 0$$
$$\Rightarrow (1+TIR)^{-(t_2+\Delta t_2)} = -\frac{x_0 \cdot (1+TIR)^{-t_0} + x_1 \cdot (1+TIR)^{-t_1}}{x_2}$$

- Si deduce:

$$-(t_2 + \Delta t_2) \cdot \log(1 + TIR) =$$

$$= \log\left(-\frac{x_0 \cdot (1 + TIR)^{-t_0} + x_1 \cdot (1 + TIR)^{-t_1}}{x_2}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta t_2 = -\frac{\log\left(-\frac{x_0 \cdot (1 + TIR)^{-t_0} + x_1 \cdot (1 + TIR)^{-t_1}}{x_2}\right)}{\log(1 + TIR)} - t_2$$

$$\Rightarrow \Delta t_2 = -0{,}154726$$

Esercizio 14

- Si consideri una rendita trentennale, a rata costante posticipata di $R = 50$ euro pagabile annualmente. Determinare il prezzo P, in modo che l'operazione finanziaria di acquisto della rendita a tale prezzo risulti equa secondo la legge esponenziale di intensità istantanea $\delta = 0{,}075\ anni^{-1}$; si calcoli inoltre il tasso interno di rendimento i^* di tale operazione finanziaria. Determinare infine la variazione Δi^* che subisce il *TIR* nell'ipotesi che, a parità di rata e prezzo, le rendita divenga perpetua.

- Il TIR dell'operazione è:

$$TIR = i = e^{\delta} - 1 = 7{,}788\%$$

- Il prezzo è dato quindi da

$$P = R \cdot a_{\overline{n|}TIR} = 50 \cdot 11{,}4863 = 574{,}315$$

- Nel caso di una rendita perpetua, si ha:

$$P = \frac{R}{i^*} \;\Rightarrow\; i^* = \frac{R}{P} = 0{,}08706$$

- Infine la variazione del tasso è:

$$\Delta i = i - i^* = -0{,}918\%$$

Esercizio 15

- Una rendita è costituita dai seguenti flussi: 100 disponibili tra 1 anno e 2 mesi; 150 disponibili tra 2 anni e 4 mesi. Calcolare valore attuale e montante della rendita al 10 % nonché la rata costante che, sostituita alle rate variabili, fornirebbe gli stessi risultati.

$$P = 100 \cdot (1 + 0{,}10)^{-(1+2/12)} + 150 \cdot (1 + 0{,}10)^{-(2+4/12)} =$$
$$= 209{,}567$$
$$M = 209{,}567 \cdot (1 + 0{,}10)^{(2+4/12)} = 261{,}762$$
$$209{,}567 = R \cdot (1 + 0{,}10)^{-(1+2/12)} + R \cdot (1 + 0{,}10)^{-(2+4/12)}$$
$$=$$
$$1{,}6954 \cdot R \rightarrow R = 123{,}612$$

Esercizio 16

- Un individuo possiede un appartamento che affitta percependo al termine di ogni mese 550 Euro. Tale somma viene in parte consumata e per il *40%* versata in un c/c bancario che rende il *4,5%* annuo.
- Calcolare il montante che tale individuo accumula dopo 2 anni.
- Calcolare quale sarebbe il montante dopo 2 anni se alla fine del primo anno l’affitto aumentasse del *10%* e contemporaneamente la banca diminuisse il rendimento annuo del c/c di mezzo punto percentuale.

- L’importo versato ogni mese sul c/c è pari a $550 \cdot 0{,}4 = 220$ mentre il tasso mensile equivalente al *4,5%* annuo è

$$i_{1/12} = 1{,}045^{1/12} - 1 = 0{,}003675.$$

- Il montante dopo 2 anni vale perciò:

$$M(2) = 220 \cdot s_{\overline{24|}\, i_{1/12}} = 5.509{,}27$$

- Nella seconda ipotesi, il tasso dopo un anno diventa *j=4%*; il tasso mensile equivalente sarà:

$$j_{1/12} = 1{,}04^{1/12} - 1 = 0{,}003274$$

- Il montante dopo due anni si può scrivere come la somma di due termini:

$$M'(2) = 220 \cdot s_{\overline{12|}\, i_{1/12}} \cdot (1 + j) + (220 \cdot 1{,}1) \cdot s_{\overline{12|}\, j_{1/12}} =$$
$$= 220 \cdot s_{\overline{12|}\, i_{1/12}} \cdot 1{,}04 + 242 \cdot s_{\overline{12|}\, j_{1/12}} = 5.758{,}64$$

- Il primo termine rappresenta il montante all’epoca uno capitalizzato fino all’epoca due col nuovo tasso; il secondo termine rappresenta il montante delle ultime 12 rate (rivalutate) calcolato col nuovo tasso.

Esercizio 17

- Una polizza assicurativa prevede entrate che formano una rendita frazionata (in semestri) ventennale, differita di 15 anni la cui rata annua costante espressa in moneta corrente è 1.200 Euro. Sapendo che l'inflazione è il *2%* calcolare il prezzo (tecnicamente *premio*) della polizza nell'ipotesi di un tasso di interesse *i* pari al *5%*.

- La polizza prevede delle rate semestrali costanti pari a 600 Euro (in moneta corrente). Siccome la rendita è differita di 15 anni, la rata costante dovrà essere rivalutata per il tasso d'inflazione, ossia: $R = 600 \cdot (1 + 0{,}02)^{15} = 807{,}52$
- Abbiamo perciò 40 rate semestrali. Il tasso semestrale equivalente è $i_{1/2} = \sqrt{1{,}05} - 1 = 0{,}0246951.$
- Il premio della polizza si ottiene come valore attuale di una rendita frazionata differita:

$$P = (1+i)^{-15} \cdot R \cdot \frac{1 - \left(1 + i_{1/2}\right)^{-40}}{i_{1/2}} = 9.800{,}97$$

Esercizio 18

- Un'azienda ha in corso i seguenti finanziamenti.
  - A) Deve restituire 1 milione di Euro versando 10 rate annue di importo pari a 129.504,6.
  - B) Deve restituire 0,75 milioni di Euro versando 7 rate annue di importo pari a 134.351,3.
- Una finanziaria gli offre la possibilità di ristrutturare i debiti sostituendoli con il versamento di 15 rate annue costanti che comportano in termini di tasso un aggravio dell'*1%*.
- Calcolare la rata in questione.

- Lo scadenzario del finanziamento A è:

$$(1.000.000;\ -129.504{,}6;\ -129.504{,}6;\ -129.504{,}6;\ -129.504{,}6;\ -129.504{,}6;\ -129.504{,}6;\ -129.504{,}6;\ -129.504{,}6;\ -129.504{,}6;\ -129.504{,}6)/(0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4,\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10)$$

- Lo scadenzario del finanziamento B è:

$$(750.000;\ -134.351{,}3;\ -134.351{,}3;\ -134.351{,}3;\ -134.351{,}3;\ -134.351{,}3;\ -134.351{,}3;\ -134.351{,}3;\ 0;\ 0;\ 0)/(0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4,\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10)$$

- Lo scadenzario del debito complessivo è:

$$(1.750.000;\ -263.855{,}9;\ -263.855{,}9;\ -263.855{,}9;\ -263.855{,}9;\ -263.855{,}9;\ -263.855{,}9;\ -263.855{,}9;\ -129.504{,}6;\ -129.504{,}6;\ -129.504{,}6)/(0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4,\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10)$$

- Il tasso di costo (indicato con *i*) si ottiene risolvendo la seguente equazione di equilibrio finanziario:

$$1.750.000 = 263.855{,}9 \cdot a_{\overline{7|}\,i} + 129.504{,}6 \cdot (1+i)^{-7} \cdot a_{\overline{3|}\,i}$$

- Utilizzando il metodo dell'interpolazione lineare, abbiamo $i \simeq 5{,}36\%$.
- Il versamento di 15 rate costanti equivalenti (di importo *R*) dovrà perciò soddisfare la relazione:

$$1.750.000 = R \cdot a_{\overline{15|}\,0{,}0636}$$
$$\Rightarrow R = \frac{1.750.000}{a_{\overline{15|}\,0{,}0636}} = \frac{1.750.000}{9{,}4869} = 184.464{,}69$$

Esercizio 19

- Un lavoratore vuole costituirsi una rendita aggiuntiva per la sua durata di vita post pensionamento (stimata in 20 anni) con rata annua pari a 3.600 euro.
- Sapendo che oggi ha 35 anni, guadagna 25.000 euro l’anno e che andrà in pensione a 65 anni calcolare quale percentuale di stipendio deve versare al fondo pensione se lo stesso accumula i capitali al rendimento annuo del *4,5%*.

- Dobbiamo imporre che il montante della rendita costituita dai contributi calcolato all'epoca 30 (ossia quando l'individuo compie 65 anni) coincida con il valore attuale (calcolato sempre alla stessa epoca) della rendita data dalla pensione.
- Se indichiamo con *X* il valore incognito del contributo, avremo l'equazione di equilibrio:

$$X \cdot s_{\overline{30|}\,0{,}045} = 3.600 \cdot a_{\overline{20|}\,0{,}045} \Rightarrow X = \frac{3.600 \cdot a_{\overline{20|}\,0{,}045}}{s_{\overline{30|}\,0{,}045}} = 767{,}59$$

- Da qui possiamo ricavare *X* e di conseguenza la frazione richiesta:

$$\frac{X}{25.000} = 3{,}07\%$$

Esercizio 20

- Un individuo possiede un immobile che rende ogni mese 450 Euro e gli costa, mediamente, 450 euro (posticipate annue) ogni anno per spese di manutenzione; sia i canoni che le spese si rivalutano annualmente per inflazione.
- L'individuo vorrebbe vendere l'immobile e chiede ad un esperto di calcolarne il valore nell'ipotesi che egli possa percepire i canoni di affitto per altri 40 anni.
- L'esperto calcola il valore ipotizzando un'inflazione del 2% annuo ed un tasso di attualizzazione del 5,5%.
- Quale valore comunica l'esperto all'individuo?

- Posto *i=2%*, il tasso mensile equivalente è

$$i_{1/12} = (1+i)^{1/12} - 1 = 0{,}00165$$

- Il reddito netto dopo un anno è

$$V(1) = 450 \cdot s_{\overline{12}|i_{1/12}} - 450 = 4.999{,}32$$

- Tenendo conto dell'inflazione, il reddito netto all'anno generico *n* (con $1 \le n \le 40$) è dato da:

$$V(n) = V(1) \cdot (1+i)^{n-1}$$

- il cui valore attuale al tasso *j=5,5%* è

$$V_a(n) = V(n) \cdot (1+j)^{-n} = V(1) \cdot (1+i)^{n-1} \cdot (1+j)^{-n} =$$
$$= \frac{V(1)}{1+i} \cdot (1+i)^n \cdot (1+j)^{-n} = \frac{V(1)}{1+i} \cdot \left(\frac{1+i}{1+j}\right)^n$$

- Il valore finale è dato da:

$$V = \sum_{n=1}^{40} V_a(n) = \frac{V(1)}{1+i} \cdot \sum_{n=1}^{40} \left(\frac{1+i}{1+j} \right)^n$$

- Ricordiamo la formula per la somma di una serie geometrica di ragione *R*:

$$\sum_{k=m}^{n} R^k = \frac{R^m - R^{n+1}}{1-R}$$

Nel nostro caso, posto $R = \frac{1+i}{1+j}$, avremo

$$V = \frac{V(1)}{1+i} \cdot \frac{R - R^{41}}{1-R} = 105.790{,}92$$