Università di Cagliari
Dipartimento di Scienze Economiche e Aziendali

Corso di laurea in EF/EGA

MatematicA FinanziariA

Prof. Marco Micocci

Modulo 0

Presentazione del Corso

Libri di testo

- **Teoria**.
  MICOCCI M., MASALA G. Manuale di Matematica finanziaria. Carocci Editore, Roma, 2012.

- **Esercizi**.
  COPPINI S.M., MICOCCI M., SPANDONARO F., MASALA G., GIORDANI C., FIORAVANTI L. Esercitazioni di Matematica Finanziaria. CISU Editore, Roma, 2006.

Materiale didattico

Modulo 1

Introduzione alla Matematica Finanziaria - Regimi finanziari - La forza d'interesse

GRANDEZZE FONDAMENTALI DELLA MATEMATICA FINANZIARIA

Argomenti

- Obiettivi.
- Introduzione.
- Operazioni finanziarie elementari.
- Principali regimi finanziari: l'interesse semplice.
- Principali regimi finanziari: lo sconto commerciale.
- Principali regimi finanziari: l'interesse composto.
- Confronto fra i principali regimi finanziari.
- Definizioni fondamentali: operazioni finanziarie.

Obiettivi

Gli *obiettivi* di questo modulo sono :

- comprendere l'oggetto della matematica finanziaria;
- conoscere l'ambito di applicazione della materia;
- identificare l'oggetto di osservazione con le operazioni finanziarie;
- risolvere semplici calcoli per trovare i valori numerici delle variabili fondamentali;
- comprendere il significato di operazione finanziaria.

Introduzione

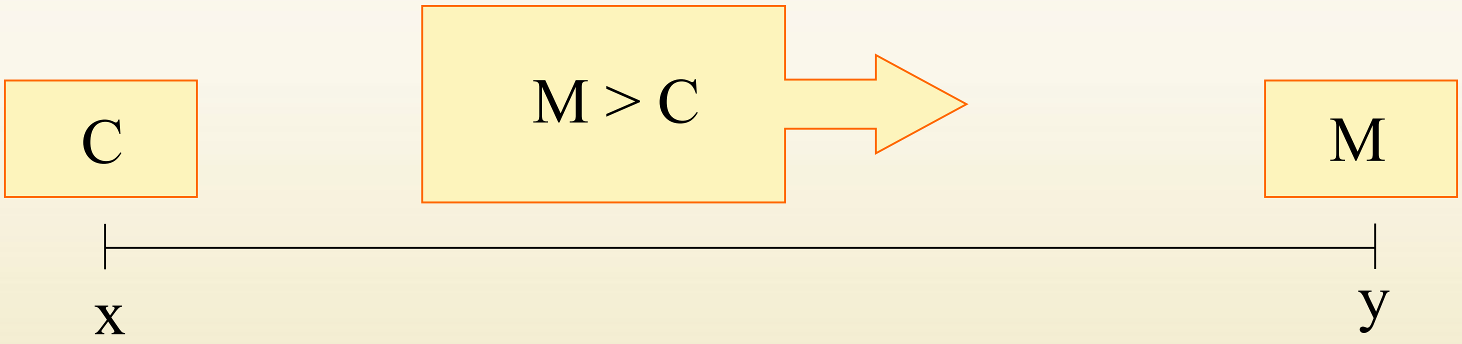
La matematica finanziaria si occupa di “**operazioni finanziarie**”, ossia di contratti che, in sostanza, riguardano lo scambio di somme di denaro o di capitali, come si preferisce dire, disponibili in epoche diverse.

La matematica finanziaria in senso stretto tratta le operazioni certe, ossia le operazioni che si effettuano indipendentemente dal verificarsi o dal non verificarsi di eventi aleatori, cioè di quegli eventi in tutto o in parte imprevedibili.

Sono invece oggetto della **matematica attuariale** tutte quelle operazioni nelle quali i capitali, o l’epoca della loro riscossione, dipendono da fenomeni aleatori. Ad esempio, sono oggetto di studio della matematica attuariale i contratti di assicurazione sulla vita, i contratti di assicurazione contro i furti o gli incendi, la gestione dei fondi pensione, ecc…

Operazioni finanziarie elementari

Investimento.
Consideriamo la seguente operazione finanziaria: un soggetto investe C € all’epoca x per avere M € all’epoca y; M > C.
C è il capitale iniziale, M è il capitale finale detto **montante**.



Operazioni finanziarie elementari

La differenza tra il montante prodotto all'epoca y ed il capitale iniziale, è il frutto dell'investimento e si denomina **interesse**, lo indicheremo con la lettera I.

$$\mathbf{I = M - C}$$

Il montante dell'operazione a scadenza è pari alla somma tra capitale investito e interesse

$$\mathbf{M = C + I}$$

$$i = \frac{I}{C}$$

Il rapporto tra l'interesse generato ed il capitale impiegato è il **tasso d'interesse** dell'operazione; rappresenta l'interesse prodotto su una unità di capitale investito. È un numero adimensionale.

Operazioni finanziarie elementari

Il rapporto tra il montante e il capitale iniziale si indica con *r(x,y)*, è denominato **fattore di capitalizzazione**.

$$r(x,y)=\frac{M}{C} \quad\Longrightarrow\quad M = C\cdot r(x,y)$$

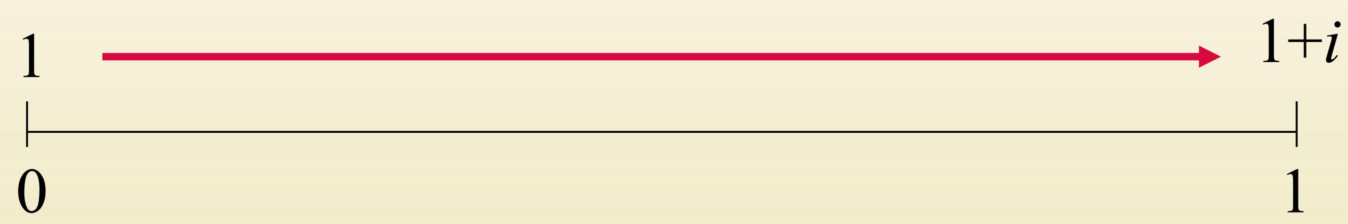
Il montante è proporzionale al capitale iniziale, il fattore di proporzionalità è rappresentato dal fattore di capitalizzazione.

Operazioni finanziarie elementari

Se riferiamo tutto a una unità di capitale iniziale otteniamo:

$$\boxed{M = C + I} \Rightarrow \boxed{\frac{M}{C} = 1 + \frac{I}{C}} \Rightarrow \boxed{r(x,y) = 1 + i(x,y)}$$

Abbiamo così dimostrato che il fattore di capitalizzazione è il montante prodotto da una unità di capitale iniziale



Operazioni finanziarie elementari

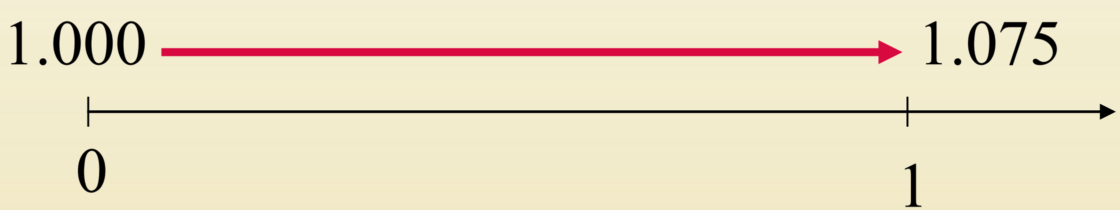
Esempio.

Il signor A (investitore) ha dato in prestito il capitale di € 1.000 al signor B il quale si è impegnato a restituire dopo un anno al signor A il capitale ricevuto in prestito ed un interesse di € 75.

In altre parole si può dire che la somma C=1.000 dopo un anno diventa **M = C+I=1.075**.

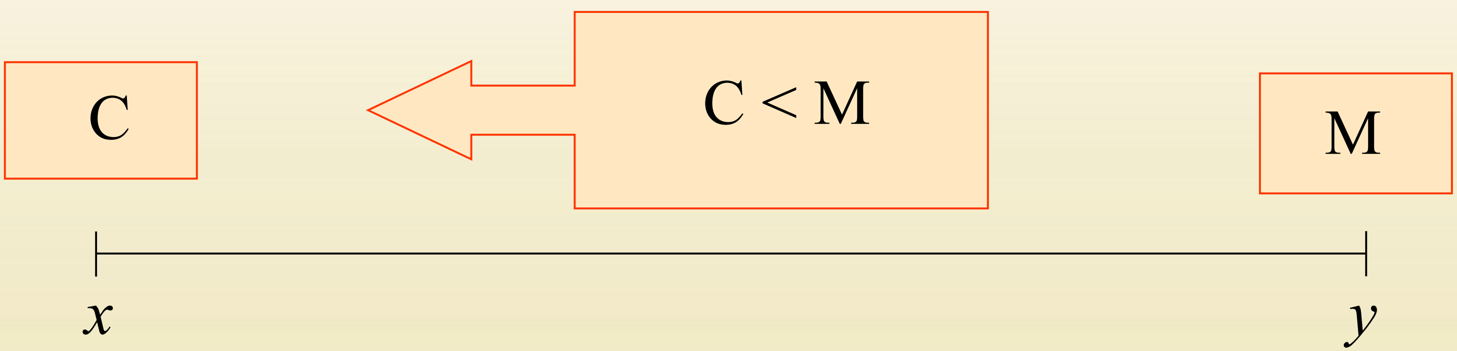
Il tasso di interesse di questa operazione finanziaria semplice è i=I/C=0,075.

Nella pratica i tassi sono espressi in percentuale, per cui moltiplicando per 100 si ottiene un tasso d’interesse del 7,5%.



Operazioni finanziarie elementari

Attualizzazione (anticipazione).
Consideriamo la situazione simmetrica alla precedente, un'operazione di finanziamento in cui un soggetto riceve oggi (epoca *x*) C € a fronte del pagamento M in un'epoca futura (*y*). L'individuo rinuncia ad una parte di capitale che gli è dovuto in futuro pur di entrarne in possesso anticipatamente; si tratta di quantificare il valore oggi di un importo disponibile in futuro.
In questo contesto la quantità C si chiama **valore attuale**.



Operazioni finanziarie elementari

La differenza tra il capitale M disponibile a scadenza (y) ed il capitale iniziale C è lo **sconto**, che indicheremo con **D**.

$$D = M - C$$

Il valore attuale eguaglia la differenza tra il capitale a scadenza e lo sconto

$$C = M - D$$

$$d = \frac{D}{M}$$

Il rapporto tra lo sconto ed il capitale a scadenza è indicato con *d* e rappresenta il **tasso di sconto** relativo all'operazione considerata. È un numero adimensionale.

Operazioni finanziarie elementari

Il rapporto tra il capitale iniziale e il capitale a scadenza si indica con v(x,y), è denominato **fattore di attualizzazione**.

$$v(x,y) = \frac{C}{M} \quad \Rightarrow \quad C = M \cdot v(x,y)$$

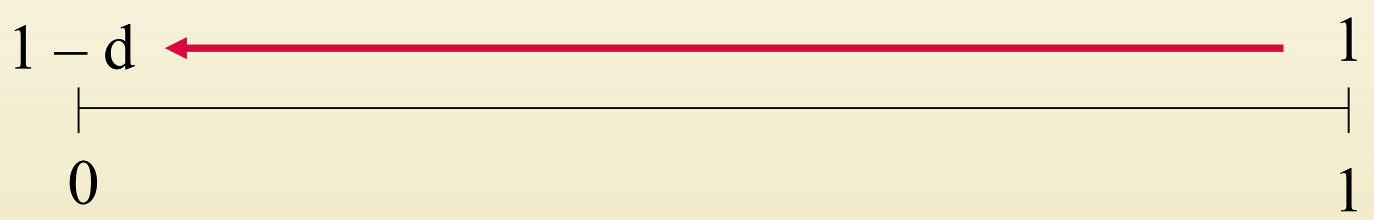
La relazione appena descritta C = M·v(x,y) corrisponde ad un'operazione di sconto che si svolge tra il periodo *x* (di disponibilità del valore attuale) e il periodo *y* (di disponibilità del capitale a scadenza).

Operazioni finanziarie elementari

Se riferiamo tutto a una unità di capitale a scadenza otteniamo:

$$C = M - D \Rightarrow \frac{C}{M} = 1 - \frac{D}{M} \Rightarrow v(x,y) = 1 - d(x,y)$$

Il **fattore di attualizzazione** è il valore oggi di 1 euro disponibile in futuro.



Operazioni finanziarie elementari

Se il risultato finale dipende solo dalla durata dell'operazione finanziaria, ovvero il periodo intercorso da *x* a *y*, poniamo **t = y – x**

Riepilogando:

$$M = C \cdot r(t)$$

$$C = M \cdot v(t)$$

$$I = C \cdot i(t)$$

$$D = M \cdot d(t)$$

Inoltre si fa notare che I e D sono due facce della stessa medaglia

$$\boxed{\mathbf{I}} = \boxed{\mathbf{D}}$$

Operazioni finanziarie elementari

Relazioni tra le grandezze finanziarie fondamentali.
Le operazioni descritte stabiliscono una relazione tra somme disponibili ad epoche diverse. Considerando un investimento che impiega *C* euro oggi e permette di avere un montante *M* ad esempio fra 2 anni, da un certo punto di vista possiamo affermare che avere *C* oggi **equivale** ad avere *M* tra due anni, ancora, *C* può essere considerato il valore attuale di *M*.
Arriviamo quindi a stabilire una relazione di equivalenza tra due somme relative ad istanti diversi.
Se *M* è il montante di *C* e *C* e il valore attuale di *M*, possiamo considerare accanto al fattore di capitalizzazione, il fattore di anticipazione.
Di conseguenza:

$$r(t) = \frac{M}{C} = \frac{1}{v(t)} \qquad v(t) = \frac{C}{M} = \frac{1}{r(t)}$$

Operazioni finanziarie elementari

Dalle definizioni fornite, con passaggi algebrici elementari si ricavano le relazioni tra le grandezze finanziarie fondamentali che vengono qui riepilogate.

$$r = \frac{1}{v} = 1 + i = \frac{1}{1-d}$$

$$i = r - 1 = \frac{d}{1-d} = \frac{1-v}{v}$$

$$d = \frac{i}{1+i} = \frac{r-1}{r} = 1 - v$$

$$v = \frac{1}{r} = \frac{1}{1+i} = 1 - d$$

Principali regimi finanziari: l'interesse semplice

In questo regime finanziario l'interesse prodotto è **direttamente proporzionale al tempo**.

Capitalizzazione:

$$\boxed{i(t) = i \cdot t}$$

$$r(t) = 1 + i(t) = 1 + i \cdot t$$

$$I(t) = C \cdot i(t) = C \cdot i \cdot t$$

$$\boxed{M(t) = C \cdot r(t) = C \cdot (1 + i \cdot t)}$$

Principali regimi finanziari: l'interesse semplice

Attualizzazione.
Per ricavare le grandezze inerenti le operazioni di anticipazione, ci basiamo sempre sulla regola che l'interesse prodotto è proporzionale al tempo.

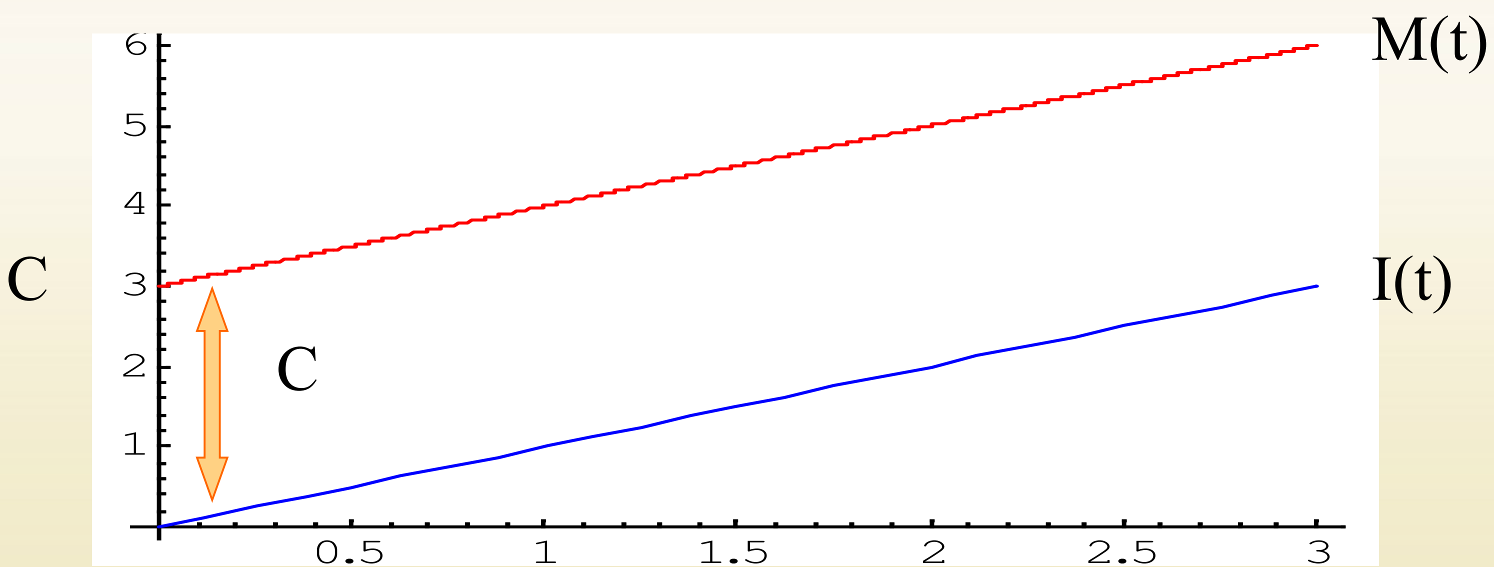
$$v(t) = \frac{1}{r(t)} = \frac{1}{1 + i \cdot t}$$

$$d(t) = 1 - \frac{1}{r(t)} = 1 - \frac{1}{1 + i \cdot t} = \frac{i \cdot t}{1 + i \cdot t}$$

Principali regimi finanziari: l'interesse semplice

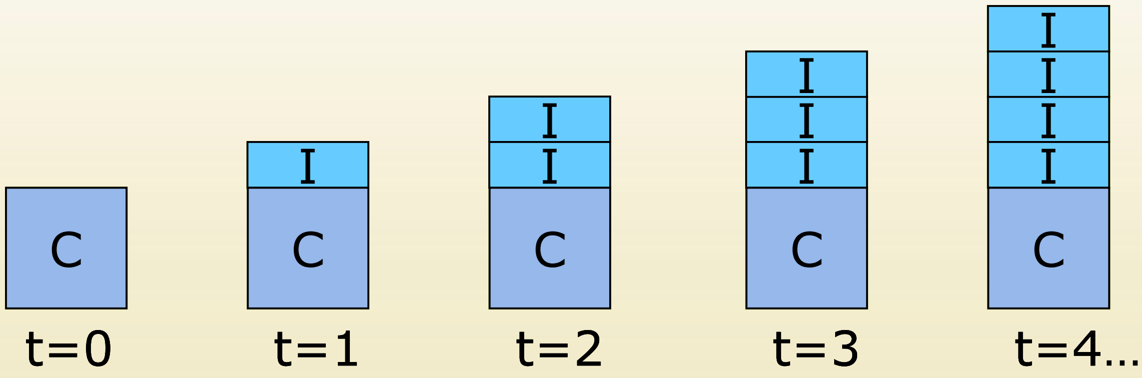
Graficamente.

Nel regime finanziario dell'interesse semplice, l'interesse ed il montante hanno un andamento lineare rispetto al tempo, i grafici delle funzioni I=I(t) e M=M(t) risultano due semirette.



Principali regimi finanziari: l'interesse semplice

L'elemento caratterizzante la legge (o regime) degli interessi semplici è che l'interesse *I* non entra a fare parte del capitale negli anni successivi: l'importo *I* è sempre calcolato sul capitale iniziale *C*.



Principali regimi finanziari: l'interesse semplice

Esempio.
Calcolare interesse e montante prodotti da un capitale di 1.000 euro, impiegati al tasso (annuo) e per il periodo indicati: al *3,75%* per un anno; al *7%* per 15 mesi.

$$i = 3,75\%;\ C = 1.000;\ t = 1$$

$$I = C \cdot i \cdot t = 1.000 \cdot 0,0375 \cdot 1 = 37,5;$$

$$M = I + C = 1.037,5$$

$$M = C \cdot (1 + i \cdot t) = 1.000 \cdot (1 + 0,0375 \cdot 1) = 1.037,5$$

$$i = 7\%; \quad C = 1.000; \quad t = 15/12$$

$$I = 1.000 \cdot 0,07 \cdot (15/12) = 87,5;$$

$$M = C + I = 1.087,5$$

Principali regimi finanziari: lo sconto commerciale

Nel regime finanziario dello sconto commerciale è lo sconto ad essere proporzionale al tempo, la regola è perciò:

$$\boxed{d(t) = d \cdot t}$$

$$v(t) = 1 - d(t) = 1 - d \cdot t$$

$$D(t) = M \cdot d(t) = M \cdot d \cdot t$$

Utilizzando le notazioni consuete abbiamo:

$$\boxed{C(t) = M \cdot v(t) = M \cdot (1 - d \cdot t)}$$

Principali regimi finanziari: lo sconto commerciale

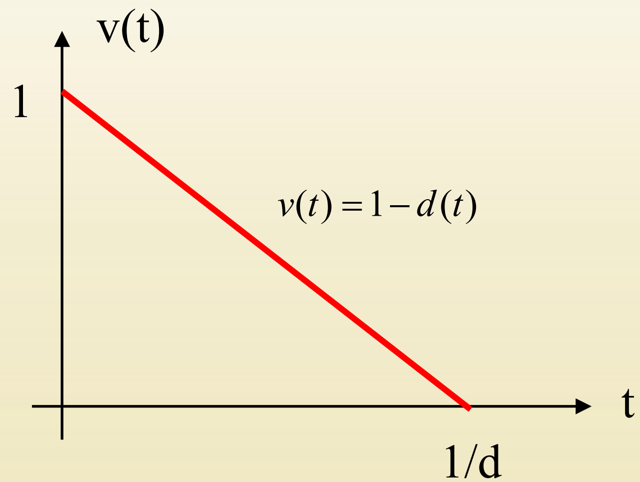
Tenendo conto della regola **d(t)=d·t** ricaviamo le altre grandezze.

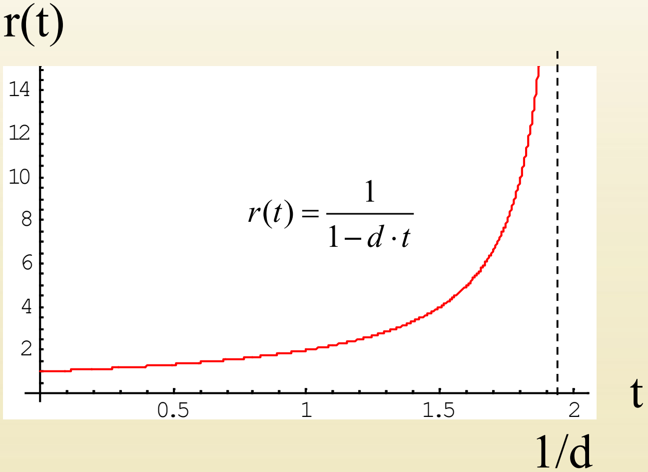
$$r(t)=\frac{1}{v(t)}=\frac{1}{1-d\cdot t};$$

$$i(t)=\frac{d(t)}{1-d(t)}=\frac{d\cdot t}{1-d\cdot t}=\frac{\left(\frac{i}{1+i}\right)\cdot t}{1-\left(\frac{i}{1+i}\right)\cdot t}=\frac{i\cdot t}{1-(t-1)\cdot i}$$

Principali regimi finanziari: lo sconto commerciale

Lo sconto commerciale presenta un limite di applicabilità:
t <1/d. Infatti per **t >1/d** il regime perde di significato.
Come si vede dal grafico, l’andamento del fattore di capitalizzazione è un’iperbole che presenta un asintoto in corrispondenza di *t=1/d*. Si parla di incoerenza finanziaria per *t>1/d*: lo sconto supererebbe il capitale a scadenza e il fattore di attualizzazione diventerebbe negativo. Questo regime finanziario è detto anche **capitalizzazione iperbolica**.





Principali regimi finanziari: l'interesse composto

È il regime finanziario considerato fondamentale, rende gli interessi fruttiferi nello stesso istante che si producono, l'interesse si cumula sul capitale e forma altro interesse. Come già sappiamo l'unità di capitale investita produce nell'unità di tempo un montante pari a **1+i**.

$$r(1) = 1 + i$$

Se l'investimento prosegue alle stesse condizioni, il montante al termine del secondo periodo sarà uguale a quello al termine del primo, capitalizzato a sua volta mediante lo stesso fattore

$$r(2) = r(1) \cdot (1 + i) = (1 + i)^2$$

Considerando genericamente *t* periodi, la regola su cui si basa questo regime finanziario è

$$\boxed{r(t) = (1 + i)^t}$$

Principali regimi finanziari: l'interesse composto

Le grandezze che ricaviamo sono:

$$r(t) = (1+i)^t$$

$$M(t) = C \cdot r(t) = C \cdot (1+i)^t$$

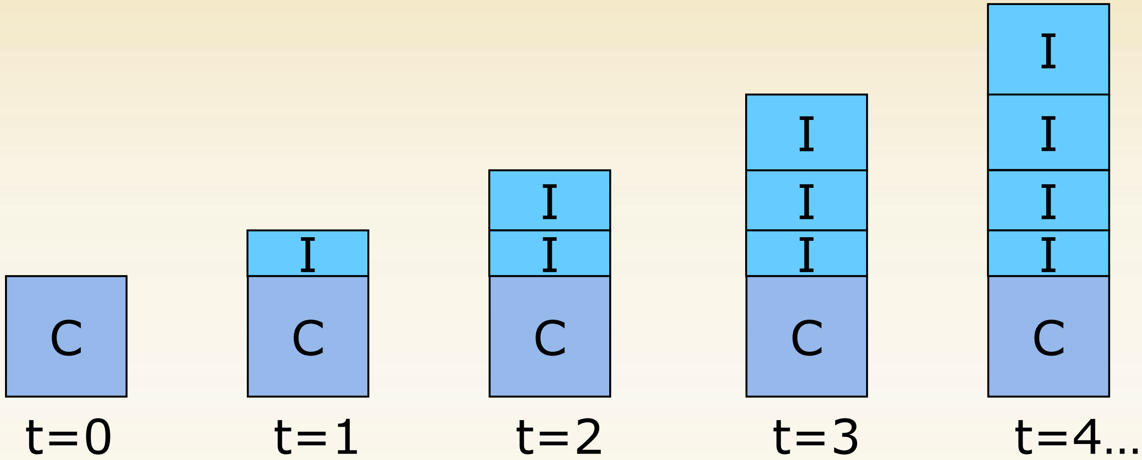
$$i(t) = r(t) - 1 = (1+i)^t - 1$$

$$v(t) = \frac{1}{(1+i)^t} = (1+i)^{-t}$$

$$C = M \cdot v(t) = M \cdot \frac{1}{(1+i)^t}$$

$$d(t) = 1 - v(t) = 1 - \frac{1}{(1+i)^t} = \frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^t}$$

Principali regimi finanziari: l'interesse composto



Ad esempio consideriamo i seguenti valori: C=1.000, n=4, *i=6%.*

C(0)=1.000

C(1)=1.000+0,06·1.000=1.060

C(2)=1.060+0,06·1.060=1.123,6

C(3)=1.123.6+0,06·1.123,6=1.191,02

C(4)=1.191,02+0,06·1.191,02=1.262,48

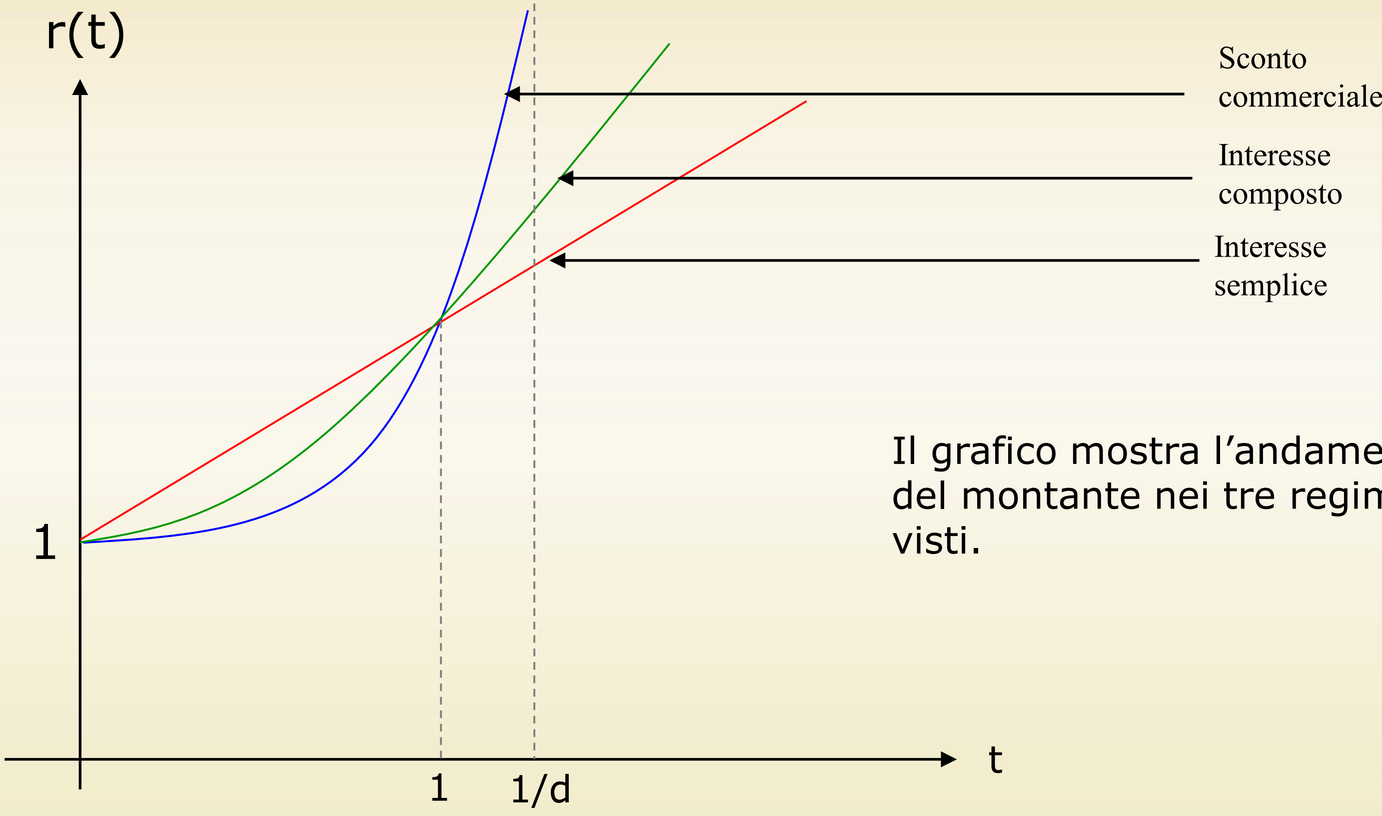
Confronto fra i principali regimi finanziari

Il grafico seguente mette in evidenza l'andamento del montante nei tre regimi finanziari studiati.
Indichiamo con:

- M_{IS} il montante prodotto nel regime finanziario dell'interesse semplice;
- M_{IC} il montante prodotto nel regime finanziario dell'interesse composto;
- M_{SC} il montante prodotto nel regime finanziario dello sconto commerciale.

Notiamo che se il periodo d'investimento è inferiore all'anno è più conveniente investire nel regime finanziario dell'interesse semplice, mentre per periodi superiori all'anno a parità di tempo, il fattore di capitalizzazione è superiore nel regime finanziario dello sconto commerciale. In t=1, i fattori di capitalizzazione sono tutti uguali cioè r(1) = 1+i, infatti le tre curve si intersecano in t=1.

Confronto fra i principali regimi finanziari



Il grafico mostra l'andamento del montante nei tre regimi visti.

Confronto fra i principali regimi finanziari

Riepilogando, dal grafico si evince che:

per $0<t<1$	per $t>1$	per $t=1$
$M_{IS} > M_{IC} > M_{SC}$	$M_{SC} > M_{IC} > M_{IS}$	$M_{SC} = M_{IC} = M_{IS}$

Definizioni fondamentali: operazioni finanziarie

Si definisce **operazione finanziaria** un insieme di incassi e pagamenti caratterizzati dalle rispettive date di esigibilità. Convenzionalmente si usa la notazione vettoriale: un'operazione finanziaria si rappresenta mediante una coppia di vettori ad *n* componenti reali **x/t** dove **x** = $\{x_0,\ldots,x_n\}$ rappresenta il vettore dei pagamenti (e/o incassi); e **t** = $\{t_0,\ldots,t_n\}$ rappresenta le scadenze, ordinate in senso crescente.

Per semplicità chiameremo pagamenti anche gli incassi, differenziandoli dai pagamenti veri e propri usando il segno algebrico opposto.

Si può inoltre definire la somma di due operazioni finanziarie **x'/t'** e **x"/t"** come quella operazione finanziaria **x/t** ottenuta con lo scadenzario unione t=t' U t" e sommando algebricamente i pagamenti che cadono alle stesse date.

Ad esempio sommando **x'/t'**= {-95,100}/{0,1} con **x"/t"**={100,-3,-103}/ {0,1/2,1} si ottiene **x/t**= {5,-3,-3} / {0,1/2,1}.

Conclusioni

- In questo modulo abbiamo introdotto le operazioni finanziarie.
- Abbiamo affrontato le caratteristiche dei principali regimi finanziari: l'interesse semplice, lo sconto commerciale, l'interesse composto.
- Abbiamo definito e imparato a calcolare le grandezze fondamentali quali i fattori di montante e di sconto, i tassi d'interesse e di sconto.

Principali regimi finanziari

Legge dell'interesse semplice

In ciascun periodo di capitalizzazione l'interesse è calcolato sempre sul capitale iniziale.

Legge di capitalizzazione lineare

Legge dello sconto commerciale

L'interesse e il montante hanno un andamento quadratico.

Legge di capitalizzazione iperbolica

Legge dell'interesse composto

Alla fine di ciascun periodo l'interesse generato entra a far parte del capitale.

Legge di capitalizzazione esponenziale

LA LEGGE ESPONENZIALE

Argomenti

- Obiettivi.
- Introduzione.
- Tassi equivalenti.
- Il tasso nominale d'interesse.
- Il tasso istantaneo.
- La legge esponenziale.
- Forza d'interesse (intensità istantanea d'interesse).
- Valore di un'operazione finanziaria in base alla legge esponenziale.
- Operazioni eque.
- Proprietà funzionali della legge esponenziale.
- Proprietà funzionali della legge esponenziale: la scindibilità.
- Scomposizione di operazioni finanziarie.

Obiettivi

Gli *obiettivi* di questo modulo sono:

- comprendere il significato dell'equivalenza tra tassi d'interesse;
- conoscere le modalità di applicazione della legge esponenziale alla matematica finanziaria;
- analizzare le variabili fondamentali nel caso del regime esponenziale;
- conoscere il significato di forza di interesse e le variabili che da essa derivano;
- riconoscere un'operazione finanziaria equa;
- analizzare le quattro proprietà funzionali della legge esponenziale;
- approfondire la legge finanziaria scindibile;
- analizzare le operazioni finanziarie mediante la loro scomposizione.

Introduzione

In questo modulo utilizzeremo un'importante **funzione reale di variabile reale**, molto utilizzata sia in matematica che in altre scienze: la funzione **esponenziale**.
Nella matematica finanziaria tale funzione è indispensabile, in via generale, per esprimere il montante e il valore attuale di un capitale rispetto al tempo nel regime dell'interesse composto.
La conoscenza della funzione esponenziale e della sua **rappresentazione grafica** è uno strumento semplice, ma fondamentale, per costruirne il modello matematico che serva a studiare l'andamento di alcune variabili finanziarie fondamentali.
Nella trattazione che segue, indicheremo col simbolo "log" o "ln" il **logaritmo naturale**, cioè il logaritmo in base "e", essendo e=2,718281828459… un numero irrazionale chiamato costante di Nepero, dal nome del matematico del secolo XVI che ne studiò le particolari caratteristiche. Utilizzeremo quindi funzioni esponenziali in cui la base non è genericamente un numero $a > 0$, ma proprio la costante *e*.

Tassi equivalenti

Le leggi di capitalizzazione valgono sia se il tasso è annuo, sia se il tasso è relativo ad un periodo temporale pari ad una frazione di anno, purché il tempo sia calcolato assumendo come unità di misura il periodo di capitalizzazione.

Due tassi sono **equivalenti** in un prefissato regime di capitalizzazione se, applicati a capitali uguali per la stessa durata, producono montanti uguali.

Tassi equivalenti

Regime finanziario dell'interesse semplice.

L'equivalenza dei tassi può essere studiata in tutti i regimi finanziari.

Consideriamo il regime finanziario dell'interesse semplice: **r(t) = 1+i·t**.

Se esprimiamo il tempo in anni, per il tasso effettivo annuo scriviamo

$$i(t) = i \cdot t$$

Poiché un semestre è uguale a ½ di anno il tasso semestrale equivalente risulta

$$i_{1/2} = i(1/2) = \frac{1}{2} \cdot i$$

In generale il tasso periodale $i_{1/m}$ (*m* rappresenta le frazioni di anno) è legato al tasso annuo *i* dalla relazione

$$i_{1/m} = i(1/m) = \frac{1}{m} \cdot i$$

Per esempio il tasso quadrimestrale (3 volte in un anno) $i_{1/3}$ equivalente al tasso annuo *i=6%* è $i_{1/3}$ = i/3=0,02

Tassi equivalenti

Legge degli interessi composti.
Indichiamo con $i_{1/m}$ il tasso periodale, *m* rappresenta il numero di frazioni in un anno; e i il tasso annuale.

$$\boxed{1+i=(1+i_{1/m})^m}$$

Quando i tassi sono equivalenti

$$i_{1/m}=(1+i)^{1/m}-1$$

Passare da un tasso annuo ad un tasso equivalente periodale

$$i=(1+i_{1/m})^m-1$$

Passare da un tasso periodale ad un Tasso equivalente annuo

Tassi equivalenti

Esempi.
La ricerca dei tassi periodali è utile per confrontare operazioni finanziarie espresse su scale temporali differenti.

Partendo dal tasso annuo *i=15%* trovare i corrispondenti tassi: semestrale,quadrimestrale, trimestrale e mensile

$i_{\frac{1}{2}}$ (*tasso semestrale*)

$i_{\frac{1}{3}}$ (*tasso quadrimestrale*)

$i_{\frac{1}{4}}$ (*tasso trimestrale*)

$i_{\frac{1}{12}}$ (*tasso mensile*)

$$i_{\frac{1}{2}} = (1+0,15)^{1/2} - 1 = 0,07238$$

$$i_{\frac{1}{3}} = (1+0,15)^{1/3} - 1 = 0,04769$$

$$i_{\frac{1}{4}} = (1+0,15)^{1/4} - 1 = 0,03556$$

$$i_{\frac{1}{12}} = (1+0,15)^{1/12} - 1 = 0,01172$$

Il tasso nominale d'interesse

Prendiamo in considerazione il regime finanziario dell'interesse composto

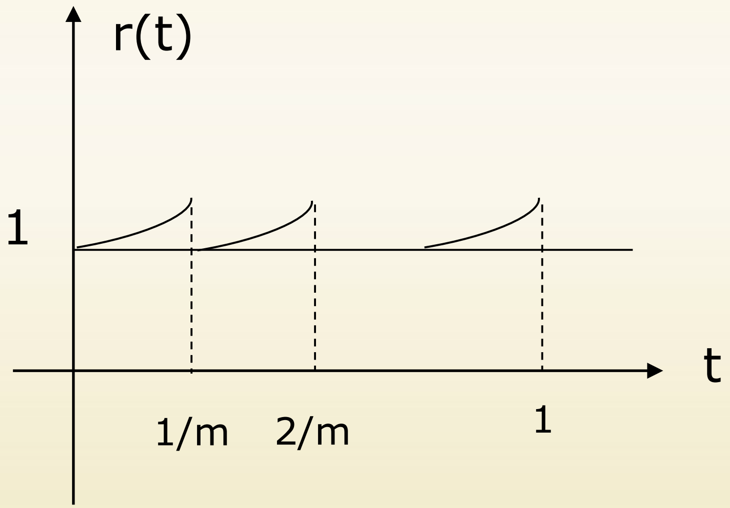
$$r(t) = (1+i)^t$$

e valutiamo la situazione in cui investiamo un capitale *C*, ma **l'interesse via via prodotto è corrisposto con una prefissata periodicità**, ad esempio *m* volte in un anno. L'interesse maturato è staccato e messo a disposizione dell'investitore. All'inizio di ogni m-esimo di anno il capitale a frutto ammonta esattamente a *C* e alla fine di ogni m-esimo di anno l'interesse maturato è

$$I = C \cdot i_{1/m}$$

Il tasso nominale d'interesse

Su ogni unità di capitale investita l'investitore si trova ad aver riscosso *m* rate di ammontare $i_{1/m}$, ciascuna pagata al termine di 1/m di anno.



Il tasso nominale d'interesse

Quello che abbiamo definito è il **tasso nominale convertibile *m* volte in un anno** indicato con **J(m)**.

$$J(m) = m \cdot i_{1/m}$$

Valido per ogni regime finanziario

$$i_{1/m} = (1+i)^{1/m} - 1$$

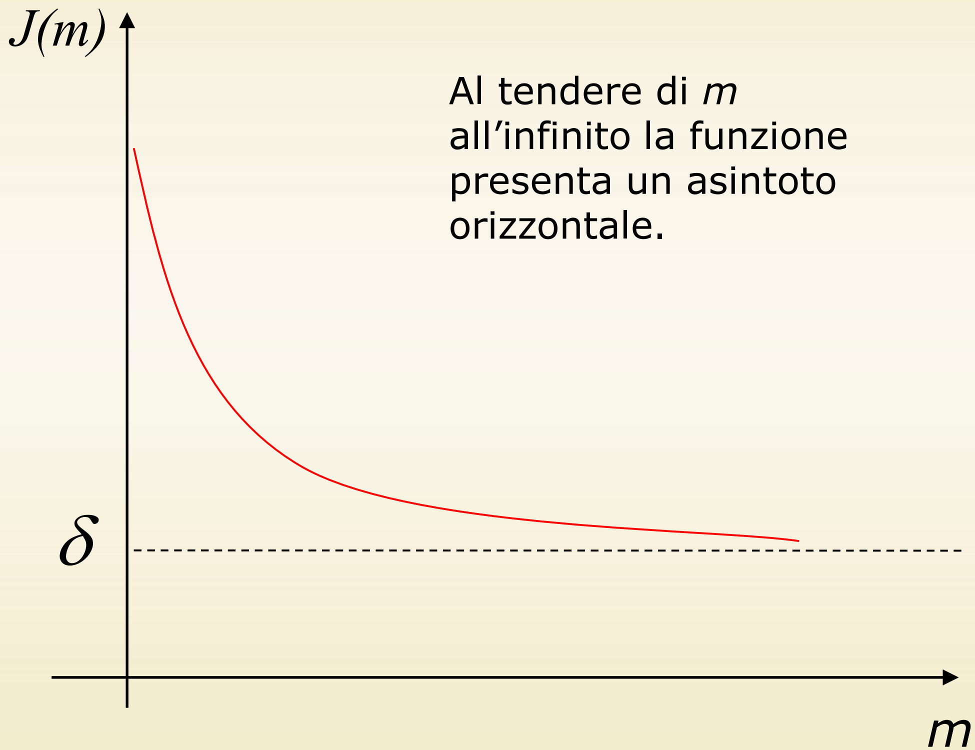
nel regime dell'interesse composto

$$J(m) = m \cdot \left[(1+i)^{1/m} - 1 \right]$$

Il tasso nominale d'interesse

Andamento di *J(m)* a partire da un tasso prefissato *i*.

m	*J(m)*
1	0,2000
2	0,1909
3	0,1880
4	0,1865
5	0,1857
6	0,1851
….	….
100	0,1825



Al tendere di *m* all'infinito la funzione presenta un asintoto orizzontale.

100 è un valore significativo perché molto grande.

Il tasso nominale d'interesse

Risultano utili le seguenti formule inverse:

$$J(m) = m \cdot i_{1/m}$$

$$\boxed{i_{1/m} = \frac{J(m)}{m}}$$

$$J(m) = m \cdot \left[(1+i)^{1/m} - 1 \right]$$

$$\frac{J(m)}{m} + 1 = (1+i)^{1/m}$$

$$\boxed{i = \left(1 + \frac{J(m)}{m}\right)^m - 1}$$

Il tasso istantaneo

Al crescere di *m*, aumentando il numero delle rate corrisposte in un anno, si abbrevia l'intervallo tra una rata e l'altra, anticipando il pagamento delle rate, si paga nominalmente di meno.
Se consideriamo il tasso nominale d'interesse *J(m)* e facciamo tendere *m* all'infinito, otteniamo:

$$\lim_{m \to +\infty} J(m) = \lim_{m \to +\infty} m \cdot \left[(1+i)^{1/m} - 1 \right] = \delta = \log(1+i)$$

Il valore δ è noto come **tasso istantaneo** o **tasso nominale annuo d'interesse convertibile infinite volte in un anno**. La retta y=δ è un asintoto orizzontale della funzione *J(m)*, come si può vedere dal grafico precedente. Al tendere di *m* all'infinito le rate si trasformano in un flusso continuo e uniforme durante tutto l'anno per un ammontare nominale pari a δ.

Il tasso istantaneo

$$\lim_{m\to+\infty} J(m) = \lim_{m\to+\infty} m \cdot \left[(1+i)^{1/m} - 1 \right] = \lim_{m\to+\infty} \frac{(1+i)^{1/m} - 1}{\frac{1}{m}} = \frac{0}{0}$$

Teorema di De L'Hospital:

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{(1+i)^{1/m} \cdot \log(1+i) \cdot \frac{-1}{m^2}}{\frac{-1}{m^2}} = 1 \cdot \log(1+i)$$

$$\Rightarrow \lim_{m\to+\infty} J(m) = \log(1+i)$$

La legge esponenziale

Se gli interessi formatisi istantaneamente venissero staccati e reinvestiti al tasso effettivo i (regime finanziario dell'interesse composto) per tutto il resto dell'anno, il montante percepito alla fine sarà esattamente pari a i.
Esistono alcune relazioni notevoli basate su tasso δ.

$$e^{\delta} = e^{\log(1+i)} \rightarrow e^{\delta} = 1 + i$$

$$i = e^{\delta} - 1$$

$$e^{\delta \cdot t} = (1+i)^t = r(t)$$

La legge esponenziale

Come si può notare $(1+i)^t$ è la legge di capitalizzazione dell'interesse composto.
Mediante l'utilizzo dei tassi istantanei le formule fondamentali della legge degli interessi composti possono riscriversi:

$$\boxed{r(t) = e^{\delta \cdot t}}$$

capitalizzazione

$$\boxed{v(t) = e^{-\delta \cdot t}}$$

attualizzazione

$$\boxed{M = C \cdot e^{\delta \cdot t}}$$

$$\boxed{C = M \cdot e^{-\delta \cdot t}}$$

Il regime dell'interesse composto è detto anche della **capitalizzazione esponenziale** o **legge esponenziale**.

La legge esponenziale

Prendiamo in considerazione la legge esponenziale $r(t) = e^{\delta \cdot t}$ avendo supposto δ reale e positivo. Per qualunque valore del tempo *t*, la quantità $e^{\delta t}$ rappresenta il valore in *t* di un euro investito all'istante 0.

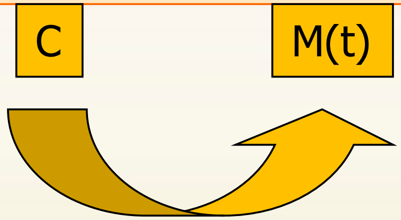
Per *t=0* l'uguaglianza è verificata in quanto $e^0 = 1$.
Generalizzando:

$$\boxed{M(t) = C \cdot e^{\delta \cdot t}}$$

M(t) è, quindi, il montante di *C*, secondo la legge esponenziale all'istante *t>0*.

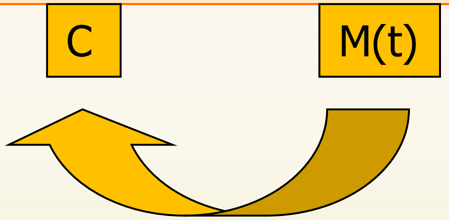
La legge esponenziale

M(t) è il montante di C calcolato in *t*.



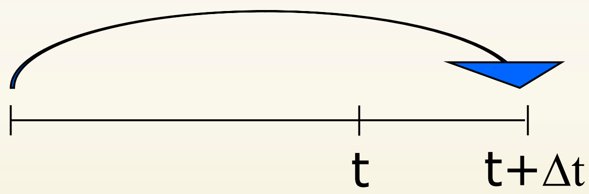
equivale a

C è il valore attuale di M(t) calcolato in 0.



Forza d'interesse (intensità istantanea d'interesse)

La forza d'interesse è una nuova grandezza.
Consideriamo la generica legge di produzione del montante ad una variabile *r(t)*.
Assegnato un capitale *C*, l'interesse che risulta prodotto in un periodo infinitesimale di tempo, tra *t* e *t+Δt* è dato dalla differenza fra i montanti calcolati nei due periodi:



$$\boxed{\Delta t > 0} \quad M(t) = C \cdot r(t)$$

$$M(t+\Delta t) = C \cdot r(t+\Delta t)$$

$$\boxed{\Delta M(t) = M(t+\Delta t) - M(t)} \longleftarrow$$

la differenza è l'interesse prodotto nel periodo infinitesimo Δt

Forza d'interesse (intensità istantanea d'interesse)

$$\Delta M(t) = M(t+\Delta t) - M(t)$$

$$\Delta M(t) = C \cdot \left(r(t+\Delta t) - r(t) \right)$$

$$\Delta M(t) = M \cdot \frac{r(t+\Delta t) - r(t)}{r(t)}$$

Ricordando che:

$$\boxed{C = \frac{M}{r(t)}}$$

Se la funzione *r(t)* è derivabile in *t* , il suo incremento può approssimarsi con il differenziale calcolato nello stesso punto, otteniamo quindi:

$$\boxed{\Delta M(t) \approx M \cdot \frac{r'(t)}{r(t)} dt} \longrightarrow \boxed{\Delta M(t) = M(t) \cdot \delta(t) \cdot dt}$$

Forza d'interesse (intensità istantanea d'interesse)

Abbiamo posto

$$\delta(t) = \frac{r'(t)}{r(t)} = \frac{d}{dt} \log r(t)$$

Possiamo concludere dicendo che se il differenziale di r(t) può sostituirsi al suo incremento effettivo, l'interesse prodotto nell'intervallo di tempo Δt è direttamente proporzionale all'ammontare della somma accumulata all'inizio dell'intervallo, M(t), e alla lunghezza dell'intervallo dt.

Definiamo $\delta(t)$ l'interesse prodotto durante un periodo di tempo infinitesimale (t, t+dt) da un capitale pari a 1 in t.
La quantità $\delta(t)$ prende il nome di **forza d' interesse** o **intensità istantanea d'interesse**.
Avremo perciò per un capitale unitario:

$$I(t, t+dt) \cong \delta(t) \cdot dt$$

Forza d'interesse (intensità istantanea d'interesse)

Possiamo affermare che la forza d'interesse rappresenta un fattore di proporzionalità nella produzione del montante.

Abbiamo stabilito che la forza d'interesse è la derivata logaritmica della legge di capitalizzazione:

se $\delta(t) = \dfrac{r'(t)}{r(t)} = \dfrac{d}{dt}\log r(t)$ allora $\displaystyle\int_0^t \delta(s)ds = [\log r(s)]_0^t = \log r(t)$

Usando gli esponenziali:

$$e^{\log r(t)} = e^{\int_0^t \delta(s)ds} \Longrightarrow \boxed{r(t) = e^{\int_0^t \delta(s)ds}}$$

Forza d'interesse (intensità istantanea d'interesse)

Abbiamo visto che data la forza d'interesse possiamo risalire alla legge di capitalizzazione.
Vediamo ora la forza d'interesse nei principali regimi finanziari.

$r(t)$		
$\boxed{1+i\cdot t}$	Interesse semplice	$\longrightarrow$ $\boxed{\delta(t)=\dfrac{i}{1+i\cdot t}}$
$\boxed{\dfrac{1}{1-d\cdot t}}$	Sconto commerciale	$\longrightarrow$ $\boxed{\delta(t)=\dfrac{d}{1-d\cdot t}}$
$\boxed{(1+i)^t}$	Interesse composto	$\longrightarrow$ $\boxed{\delta(t)=\log(1+i)}$

Notiamo che nell'interesse semplice la forza d'interesse è una funzione decrescente, nella capitalizzazione iperbolica una funzione crescente, mentre nella legge dell' interesse composto la forza d'interesse è una costante.

Forza d'interesse (intensità istantanea d'interesse)

Esempio.
Sapendo che la forza d'interesse vigente sul mercato è

$\delta(t) = 0{,}055\dfrac{2t}{1+t^2}$ dedurne il fattore di capitalizzazione.

La legge di capitalizzazione è

$$r(t) = e^{\int_0^t \delta(s)ds}$$

Osserviamo che nel calcolo dell'integrale, abbiamo indicato con *s* la variabile di integrazione in modo da non creare confusione con l'epoca finale *t*.

Forza d'interesse (intensità istantanea d'interesse)

Calcoliamo preliminarmente l'integrale della forza d'interesse:

$$\int_0^t \delta(s)\, ds = \int_0^t 0{,}055 \frac{2s}{1+s^2}\, ds = 0{,}055 \cdot \int_0^t \frac{2s}{1+s^2}\, ds =$$

$$= 0{,}055 \cdot \left[\log\left|1+s^2\right| \right]_0^t = 0{,}055 \cdot \left(\log\left(1+t^2\right) - \log 1 \right) =$$

$$= \log\left(1+t^2\right)^{0{,}055}$$

$$\boxed{r(t) = e^{\int_0^t \delta(s) ds} = e^{\log\left(1+t^2\right)^{0{,}055}} = \left(1+t^2\right)^{0{,}055}}$$

Forza d'interesse (intensità istantanea d'interesse)

Esempio.
Data la forza d'interesse $\delta(\mathrm{t}) = i/(t+1)$, calcolare il montante di 100 dopo tre periodi se il tasso di rendimento è il 5%.
Calcoliamo prima l'integrale che ci permette di risalire alla legge di capitalizzazione e quindi il montante.

$$\int_0^t \frac{i}{1+s}\,ds = i \cdot \int_0^t \frac{1}{1+s}\,ds = i \cdot \Big[\log|s+1|\Big]_0^t = i \cdot \big(\log(t+1) - \log 1\big) = i \cdot \log(t+1)$$

$$\boxed{r(t) = e^{i \cdot \log(t+1)}}$$

$$\boxed{M(t) = C \cdot r(t) = 100 \cdot e^{i \cdot \log(t+1)} = 100 \cdot e^{0,05 \cdot \log 4} = 107,177}$$

Valore di una operazione finanziaria in base alla legge esponenziale

Consideriamo un'operazione finanziaria
x/t=$\{x_1, x_2,\ldots, x_n\}/\{t_1,t_2,\ldots, t_n\}$
e valutiamo, secondo la legge esponenziale con intensità δ assegnata, il valore attuale riferito all'istante *t=0* dell'importo generico x_k:

$$A(0,x_k) = x_k \cdot e^{-\delta \cdot t_k} \qquad k = 1,2,\ldots,n$$

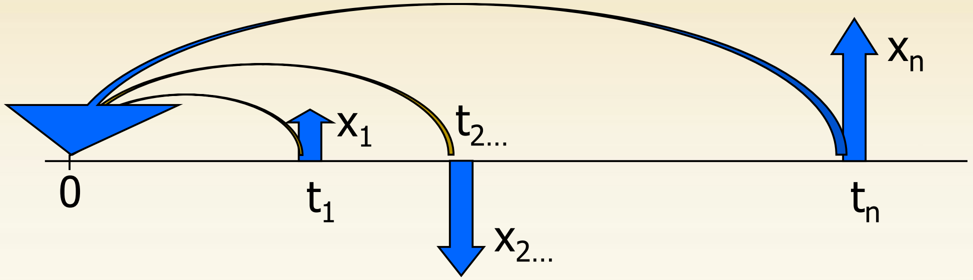
Definiamo il **valore attuale dell'operazione finanziaria x**, la *somma dei valori attuali di ogni singolo flusso*:

$$A(0,x) = \sum_{k=1}^{n} A\left(0,x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot e^{-\delta \cdot t_k}$$

o anche:

$$A(0,x) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \left(1+i\right)^{-t_k}$$

Valore di una operazione finanziaria in base alla legge esponenziale



Considerando un istante generico *t>0* possiamo capitalizzare il valore attuale A(0,x) da *0* a *t* mediante il fattore $e^{\delta . t}$:

$$M(t,x) = A\big(0,x\big) \cdot e^{\delta \cdot t}$$

per ottenere il **valore**, non più attuale ma in *t*, di **x**.
Sostituendo in quest'ultima uguaglianza la definizione di valore attuale si ottiene:

$$M(t,x) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot e^{\delta \cdot (t-t_k)} = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot (1+i)^{t-t_k}$$

Operazioni eque

Un’operazione finanziaria **x** si dice **equa** al tempo *t*, conformemente alla legge esponenziale adottata, se M(t,**x**) = 0.
Il significato di equità dipende, quindi, dalla legge esponenziale adottata e, a priori, dall’istante *t*; intuitivamente possiamo dire che un’operazione non può essere equa se ogni elemento x_k è positivo o negativo. Deve esistere almeno un importo x_k che presenta un segno diverso dagli altri importi.
A titolo di esempio, costruiamo una operazione equa partendo dall’operazione: {3 ; 103} / {0,25 ; 0,75}
secondo la legge esponenziale il cui tasso annuo è $i=5\%$.
Per fare ciò calcoliamo il valore attuale A(0,x):
$A(0,x) = 3 \cdot 1{,}05^{-0{,}25} + 103 \cdot 1{,}05^{-0{,}75} = 2{,}9636 + 99{,}2991 = 102{,}2627$
e “costruiamo” appositamente l’operazione equa:
{-102,2627 ; 3 ; 103} / {0 ; 0,25 ; 0,75} aggiungendo all’operazione data proprio il valore attuale trovato.

Proprietà funzionali della legge esponenziale

Invece di considerare una generica legge di capitalizzazione, consideriamo in particolare la legge di capitalizzazione esponenziale. Per essa valgono le seguenti proprietà funzionali:

1 – Proprietà invariantiva.

> **Se un'operazione finanziaria è equa all'istante** *t* secondo una assegnata legge esponenziale, **lo è in qualsiasi altro istante.**

2 – Proprietà additiva.

> **Se due operazioni finanziarie sono eque** in un medesimo istante, secondo la stessa legge esponenziale, **anche l'operazione finanziaria somma è equa** allo stesso istante.

Proprietà funzionali della legge esponenziale

3 – Proprietà di uniformità nel tempo.

Se un’operazione finanziaria è equa all’istante t secondo una assegnata legge esponenziale, **l’operazione avente tutte le scadenze traslate di un intervallo di lunghezza τ è equa nell’istante t+τ** conformemente alla stessa legge.

4 – Proprietà di scindibilità.

La somma di due operazioni eque in due istanti diversi secondo una medesima legge esponenziale, **è un’operazione equa**, secondo la stessa legge, in un qualsiasi istante.

Proprietà funzionali della legge esponenziale

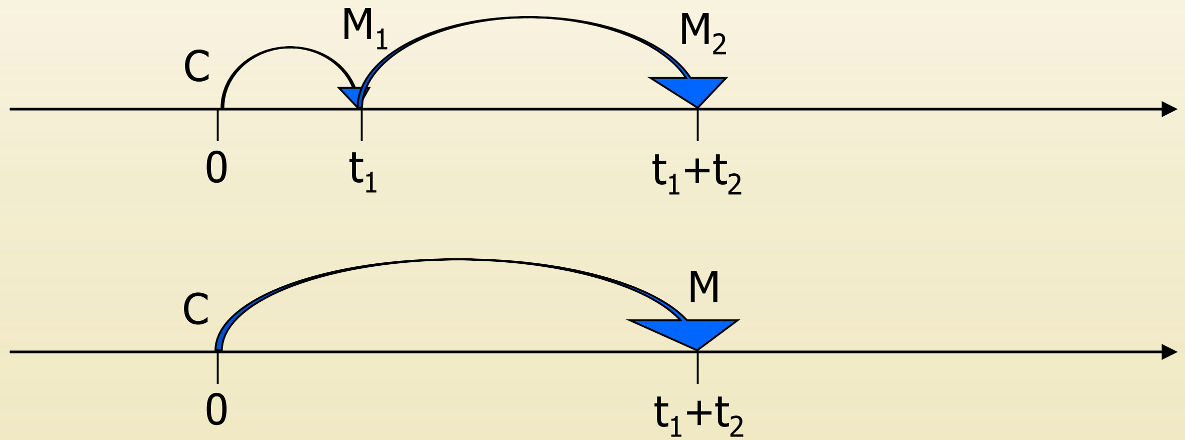
Chiaramente tali proprietà non sono sempre verificate se si cambia legge di capitalizzazione.
Commentiamole una per una.

- **La prima proprietà** sostanzialmente esprime che l'equità non cambia se cambiamo l'istante *t* di osservazione. Ciò si dimostra semplicemente riconducendo il valore M(t',x) al prodotto di M(t,x) (pari a zero) moltiplicato una costante positiva.
- **La seconda proprietà** è intuitivamente semplice, e si dimostra sfruttando la proprietà additiva delle sommatorie.
- **La terza proprietà** esprime il concetto secondo il quale traslando un'operazione finanziaria, essa rimane equa rispetto alla medesima legge.
- **La quarta proprietà** è il risultato combinato della prima e della seconda proprietà, e si può dimostrare che coincide con la seguente proprietà dei fattori di sconto:

Proprietà funzionali della legge esponenziale: la scindibilità

$$v(t_0,t_2)= v(t_0,t_1)\cdot v(t_1,t_2) \quad \text{con } t_0<t_1<t_2$$

Questa è chiamata equazione funzionale della **scindibilità**. Ricordiamo ora che una legge di capitalizzazione si dice "scindibile" se il montante ottenuto da un capitale *C* all'epoca $t_1+ t_2$ al tasso *i* è uguale al montante ottenuto dallo stesso capitale *C* all'epoca t_1 al tasso *i*, capitalizzato ulteriormente fino all'epoca t_2.



La scindibilità

In generale una legge di capitalizzazione è scindibile se date le 3 epoche *x*, *y*, *z*   (*x*< *y*< *z*):

$$\boxed{r(x,z)=r(x,y)\cdot r(y,z)}$$

o in maniera equivalente

$$\boxed{v(x,z)=v(x,y)\cdot v(y,z)}$$

Significa che se capitalizzo in un unico tempo o spezzo l'operazione il risultato non cambia.
Consideriamo innanzitutto il regime esponenziale e calcoliamo sia il montante *M*, ottenuto capitalizzando *C* per il tempo t_1 e capitalizzando il risultato ancora per il tempo t_2, che il montante M_2, ottenuto capitalizzando *C* per il tempo t_1+t_2:

$$M=C\cdot(1+i)^{t_1}\cdot(1+i)^{t_2}=C\cdot(1+i)^{t_1+t_2}$$

$$M_2=C\cdot(1+i)^{t_1+t_2}$$

Perciò $M=M_2$.

La scindibilità

Quindi giungiamo ad un importante risultato: **la legge di capitalizzazione esponenziale è scindibile**.

Consideriamo ora il regime dell'interesse semplice e calcoliamo *M* e M_2.

$M_2=C\cdot(1+i\cdot t_1)\cdot(1+i\cdot t_2)=C\cdot(1+i\cdot t_1+i\cdot t_2+i^2\cdot t_1\cdot t\cdot_2)$

$M=C\cdot[1+i\cdot(t_1+t_2)]=C\cdot(1+i\cdot t_1+i\cdot t_2)$

Da cui si ha $M_2>M$.

Quindi **la legge della capitalizzazione lineare non è scindibile**.

La terza proprietà funzionale si esprime anche nel seguente modo:

In conclusione l'unica legge di capitalizzazione uniforme e scindibile è la legge esponenziale. La verifica di ciò è semplice assumendo il fattore di sconto come $v(t)=\exp(-\delta\cdot t)$ con la condizione $v(0)=1$.

La scindibilità

Esiste una legge molto forte che lega **scindibilità** e **forza d'interesse**.

Teorema per le leggi ad una variabile.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una legge di capitalizzazione sia scindibile è che la sua forza d'interesse sia una costante, ossia non dipenda da *t*.

Interesse semplice $\longrightarrow$ $\delta(t) = \dfrac{i}{1 + i \cdot t}$

Sconto commerciale $\longrightarrow$ $\delta(t) = \dfrac{d}{1 - d \cdot t}$

Interesse composto $\longrightarrow$ $\delta(t) = \log(1 + i)$

È una costante infatti è scindibile

Scomposizione di operazioni finanziarie

Può risultare comodo scomporre un'operazione finanziaria **x**/**t** nella somma di due o più operazioni finanziarie più semplici: ad esempio si possono separare gli importi x_k positivi da quelli negativi ed ottenere rispettivamente un'operazione degli incassi **y**/**t** ed un'operazione dei pagamenti in senso stretto **z**/**t**.

Nell'ipotesi in cui la **x/t** sia equa si dovrà avere:

$$M(t,y)=-M(t,z)$$

in quanto $M(t,x)=M(t,y)+M(t,z)=0$.

Ad esempio scomponiamo la

$$x/t= \{-10{,}577;\ 11\ ;\ -99;\ 102{,}96\} / \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$$

equa conformemente alla legge esponenziale al tasso annuo *i=4%*. Gli incassi sono rappresentati dal vettore

$$\mathbf{y/t}=\{0;11;0;102{,}96\}/\{0;1;2;3\}$$

mentre i pagamenti sono rappresentati dal vettore

$$\mathbf{z/t}=\{-10{,}577;0;-99;0\}/\{0;1;2;3\}$$

Scomposizione di operazioni finanziarie

Calcoliamo ora i valori in *t=0*:

A(0,y)=$11 \cdot 1{,}04^{-1}$ + $102{,}96 \cdot 1{,}04^{-3}$=10,577 + 91,531 = 102,108
A(0,z)=-10,577 - $99 \cdot 1{,}04^{-2}$= -10,577 -91,531= -102,108.
Ovviamente, per l'equità ipotizzata, A(0,y)= - A(0,z).
Un altro modo di scomporre un'operazione finanziaria è considerare gli importi fino ad un istante *t* separati da quelli successivi, in modo che:

M(t,x)= M'(t,x) + V(t,x)

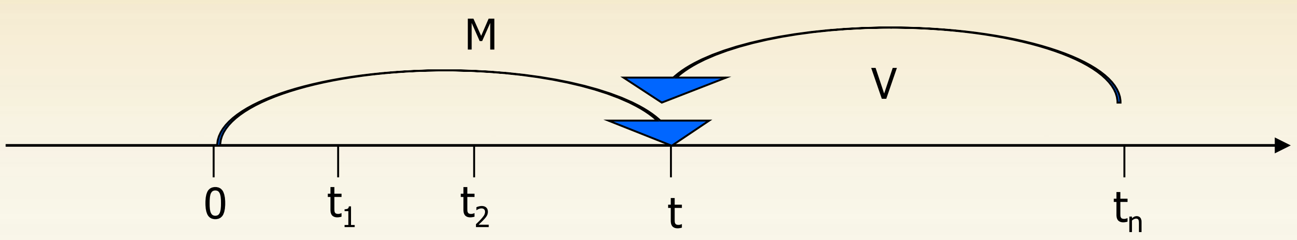
avendo chiamato "montante in *t* dell'operazione" la quantità

$$M'(t,x) = \sum_{k/t_k<t} x_k \cdot e^{\delta\cdot(t-t_k)}$$

ed avendo chiamato "valore residuo in *t*" la quantità

$$V(t,x) = \sum_{k/t_k>t} x_k \cdot e^{-\delta\cdot(t_k-t)}$$

Scomposizione di operazioni finanziarie



Il valore *M′* è chiaramente la somma dei montanti di tutti gli importi x_k fino a *t*, in *t*; così come il valore *V* è la somma dei valori attuali in *t* degli importi successivi a *t*.
Nell'ipotesi in cui **x/t** sia equa, in qualunque istante *t* deve essere:

$$M'(t,x)=-V(t,x)$$

Infatti $M(t,x)=M'(t,x)+V(t,x)=0$ e dalla seconda uguaglianza si ottiene la tesi.

Scomposizione di operazioni finanziarie

Esempio.

Calcoliamo il montante ed il valore residuo in $t=1$ dell'operazione finanziaria **x/t**={-100;2;2;2;102}/{0;0,5;1;1,5;2} valutata secondo la legge esponenziale di intensità $\delta=0,04$.

$M'(1,x)= -100\ e^{0,04.1} +2\ e^{0,04.0,5} +2 = -104,08108 + 2,04040 +2= =-100,04068$

$V(1,x)= 2\ e^{-0,04.0,5} +102\ e^{-0,04.1}= 1,9604 + 98,0005 = 99,9609$

Osserviamo che il montante non è uguale al valore residuo in $t=1$, in quanto manca l'ipotesi di equità.

Al contrario, consideriamo l'intensità $\delta=0,0396$ che rende **x/t** equa.

Tale intensità corrisponde ad un tasso annuo $i=0,0404$ oppure ad un tasso semestrale equivalente del *2%*.

Calcoliamo di nuovo *M'* e *V*:

$M'(1,x)= -100\ e^{0,0396.1} +2\ e^{0,0396.0,5} +2 = -104,04 + 2,04 +2= -100$

$V(1,x)= 2\ e^{-0,0396.0,5} +102\ e^{-0,0396.1}= 1,9608 + 98,0392 = 100$

Conclusioni

- Abbiamo formalizzato il concetto di equivalenza fra tassi d'interesse, sia nel regime composto che in quello semplice.
- Abbiamo definito il tasso nominale annuo per arrivare al tasso istantaneo e individuare la funzione esponenziale nell'ambito della matematica finanziaria, descrivendo le grandezze fondamentali associate.
- Abbiamo introdotto un nuovo fondamentale argomento che è la forza d'interesse.
- Abbiamo definito il valore attuale al tempo generico t di un'operazione finanziaria valutata secondo il regime esponenziale, per poi definire il concetto di operazione equa.
- Abbiamo descritto le proprietà della legge esponenziale mediante lo studio delle quattro proprietà funzionali della legge stessa, approfondendo in particolare la scindibilità.
- Abbiamo infine imparato a scomporre un'operazione finanziaria in due modi diversi, in relazione al concetto di equità nel regime esponenziale.

La legge esponenziale

Proprietà funzionali

- Proprietà invariantiva
- Proprietà additiva
- Proprietà dell'uniformità
- **Proprietà di scindibilità**

Teorema per le leggi a una variabile

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una legge di capitalizzazione sia scindibile è che la sua forza d'interesse sia una costante, ossia non dipenda da *t*

Il regime finanziario dell'interesse semplice non è scindibile

Il regime finanziario dello sconto commerciale non è scindibile

Il regime finanziario dell'interesse composto è scindibile

Ha una forza d'interesse costante

ESERCIZI

FORMULE GENERALI E INTERESSE SEMPLICE

Esercizio 1

- Calcolare tasso di interesse, tasso di sconto e fattore di attualizzazione corrispondenti ad un fattore di capitalizzazione *r =1,10*

$$i = r - 1 = 1,10 - 1 = 0,10$$

$$v = \frac{1}{r} = \frac{1}{1,10} = 0,9091$$

$$d = 1 - 0,80 = 0,09091 = 1 - v$$

Formulario

$$r = \frac{1}{v} = 1 + i = \frac{1}{1-d}$$

$$i = r - 1 = \frac{d}{1-d} = \frac{1-v}{v}$$

$$d = \frac{i}{1+i} = \frac{r-1}{r} = 1 - v$$

$$v = \frac{1}{r} = \frac{1}{1+i} = 1 - d$$

Esercizio 2

- Calcolare tasso d'interesse e di sconto e fattore di anticipazione corrispondenti al fattore di capitalizzazione $r = 1{,}25$.

$$r = 1,25$$

$$i = r - 1 = 0,25 \rightarrow i = 25\%$$

$$d = \frac{r-1}{r} = \frac{1,25-1}{1,25} = 0,2 \rightarrow d = 20\%$$

$$v = \frac{1}{r} = 0,80$$

Esercizio 3

- Calcolare il tasso d'interesse ed i fattori di capitalizzazione e di anticipazione corrispondenti al tasso di sconto del *18%*.

$$d = 18\% \rightarrow d = 0,18$$

$$i = \frac{d}{1-d} = \frac{0,18}{1-0,18} = 0,2195 \rightarrow i = 21,95\%$$

$$r = \frac{1}{1-d} = 1,2195$$

$$v = 1-d = 0,82$$

Esercizio 4

- Qual è il tasso d'interesse anticipato corrispondente:

(a) al *12%* posticipato?

(b) al *7%* posticipato?

$$(a) \quad d = \frac{i}{1+i} = \frac{0,12}{1+0,12} = 0,1071 \rightarrow d = 10,71\%$$

$$(b) \quad d = \frac{0,07}{1+0,07} = 0,0654 \rightarrow d = 6,54\%$$

Esercizio 5

- Qual è il tasso d'interesse posticipato corrispondente:

(a) al *12%* anticipato?

(b) al *7%* anticipato?

$$(a) \quad i=\frac{d}{1-d}=\frac{0,12}{1-0,12}=0,1\overline{36} \rightarrow i=13,64\%$$

$$(b) \quad i=\frac{0,07}{1-0,07}=0,07526 \rightarrow i=7,53\%$$

Esercizio 6

- Avete la possibilità di stipulare un prestito per l’ammontare di capitale *C*, con la scelta se pagare l’interesse anticipatamente al tasso del *9%*, o posticipatamente al tasso dell’*11%*. Quale alternativa sceglierete, se contate d’investire *C* al tasso del *12%* ?

- Interesse anticipato:

$$C \cdot (1 - 0,09) \cdot 1,12 - C = 0,0192 \cdot C$$

→ conviene

- Interesse posticipato:

$$1,12 \cdot C - (C + 0,11 \cdot C) = 0,01 \cdot C$$

Esercizio 7

- Avete la possibilità di stipulare un prestito per l'ammontare di capitale *C*, con la scelta se pagare l'interesse anticipatamente al tasso del *9%*, o posticipatamente al tasso dell'*11%*. Quale alternativa scegliete, se contate d'investire *C* al tasso del *24%* ?

- Interesse anticipato:

$$C \cdot (1-0,09) \cdot 1,24 - C = 0,1284 \cdot C$$

- Interesse posticipato:

$$1,24 \cdot C - (C + 0,11 \cdot C) = 0,13 \cdot C$$

→ conviene

Esercizio 8

- Quanto deve rendere l’investimento di cui ai due esercizi precedenti, perché le alternative ivi in esame risultino equivalenti ?

- Indichiamo con *x* il tasso incognito:

$$C\cdot(1-0,09)\cdot x-C=x\cdot C-(C+0,11\cdot C)$$

$$(0,91\cdot x-1)\cdot C=(x-1,11)\cdot C$$

$$\to 0,91\cdot x-1=x-1,11$$

$$\to 0,09\cdot x=0,11\to x=1,\overline{2}\to \text{tasso}=22,22\%$$

Esercizio 9

- Supponiamo di avere una somma di $100.000 da investire per un certo periodo di tempo e che il tasso effettivo d’interesse per l’operazione considerata sia del *6%.* Determinare l’interesse prodotto e il capitale disponibile a scadenza (montante).

$$C = 100.000$$

$$i = 0,06$$

$$I = C \cdot i = 100.000 \cdot 0,06 = 6.000$$

$$M = C + I = 100.000 + 6.000 = 106.000$$

oppure

$$M = C \cdot r = C \cdot (1 + i) = 100.000 \cdot (1 + 0,06) = 106.000$$

Esercizio 10

- Abbiamo investito $100.000 per un certo periodo di tempo e al termine del periodo abbiamo riscosso $120.000. Determinare a quale tasso effettivo d'interesse relativo al periodo considerato è stata effettuata l'operazione.

$$M = 120.000; \quad C = 100.000$$

$$I = M - C = 120.000 - 100.000 = 20.000$$

$$i = \frac{I}{C} = \frac{20.000}{100.000} = 0,20 \rightarrow i = 20\%$$

oppure

$$r = \frac{M}{C} = \frac{120.000}{100.000} = 1,2$$

$$i = r - 1 = 1,2 - 1 = 0,2 \rightarrow i = 20\%$$

Esercizio 11

- Dobbiamo riscuotere $1.000.000 fra un dato periodo di tempo supponendo che il tasso effettivo di interesse per l’operazione considerata sia del *7%.* Determinare quale somma ci sarebbe anticipata in sostituzione del nostro credito a scadenza e quale è il tasso effettivo di sconto.

$$M = 1.000.000; \quad i = 0,07$$

$$C = M \cdot v = \frac{M}{1+i} = \frac{1.000.000}{1+0,07} = 934.579$$

$$d = \frac{i}{1+i} = \frac{0,07}{1,07} = 0,0654$$

oppure

$$D = M - C = 1.000.000 - 934.579 = 65.421$$

$$\rightarrow d = \frac{D}{M} = \frac{65.421}{1.000.000} = 0,0654$$

Esercizio 12

- In sostituzione di un debito scadente fra un anno di \$500.000 ci viene richiesta oggi una somma di \$470.000. Supponendo che il tasso effettivo annuo d'interesse per l'operazione considerata è, sul mercato, del *5%*, determinare se l'operazione è per noi conveniente e qual è il tasso effettivo di sconto dell'operazione.

- Si ha C = 470.000, M = 500.000. Se investissimo 470.000 al tasso di mercato avremo alla scadenza:

→
$$M' = C \cdot r = C \cdot (1+i) =$$
$$= 470.000 \cdot (1+0,05) = 493.500$$

E poiché tale importo non è sufficiente per pagare il debito, ne segue che l’operazione è conveniente.

$$D = M - C = 500.000 - 470.000 = 30.000$$

$$d = \frac{D}{M} = \frac{30.000}{500.000} = 0,06 \rightarrow d = 6\%$$

$$i = \frac{d}{1-d} = \frac{0,06}{0,94} = 0,0638$$

tasso mercato

$$\rightarrow C = 500.000 \cdot \frac{1}{1+0,05} = 476.190 > 470.000$$

Esercizio 13

- Calcolare interesse e montante prodotti da un capitale di 1.000 euro, impiegate al tasso (annuo) e per il periodo indicati:

(a) al *3,75%* per un anno;
(b) al *7%* per 15 mesi;
(c) al *9,25%* per 120 giorni;
(d) al *10,50%* dal 12 aprile 1987 al 6 luglio 1987;

$$(a)\ I = 1.000 \cdot 0,0375 \cdot 1 = 37,5$$

$$M = I + C = 1.037,5$$

$$(b)\ I = 1.000 \cdot 0,07 \cdot (15/12) = 87,5; \quad M = 1.087,5$$

$$(c)\ I = 1.000 \cdot 0,0925 \cdot (120/360) = 30,8\overline{3}; \quad M = 1.030,8\overline{3}$$

$$I = 1.000 \cdot 0,0925 \cdot (120/365) = 30,41; \quad M = 1.030,41$$

$$(d)\ I = 1.000 \cdot 0,105 \cdot (85/360) = 24,79$$

$$I = 1.000 \cdot 0,105 \cdot (85/365) = 24,45$$

$$I = 1.000 \cdot 0,105 \cdot (84/360) = 24,50$$

$$M = 1.000 + I$$

Esercizio 14

- Calcolare a quale tasso (annuo) d'interesse:

(a) il capitale di 1.250 produce un interesse di 84,375 in un anno;
(b) il capitale di 800 produce un montante di 900 in 3 anni;
(c) il capitale di 2.000 produce un interesse di 226,667 in 16 mesi;
(d) il capitale di 2.400 produce un montante di 3.000 in 8 mesi;
(e) un capitale generico C raddoppia in 2 anni.

$$i = \frac{I(t)}{C \cdot t} = \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{M}{C} - 1 \right)$$

$$(a)\ 0,0675 \rightarrow 6,75\%$$

$$(b)\ 0,041\overline{6} \rightarrow 4,17\% \quad (t = 3)$$

$$(c)\ 0,085 \rightarrow 8,5\% \quad (t = 16/12)$$

$$(d)\ 0,375 \rightarrow 37,5\% \quad (t = 8/12)$$

$$(e)\ i = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2C}{C} - 1 \right) = 0,5 \rightarrow 50\%$$

Esercizio 15

- Calcolare in quanto tempo, al tasso d'interesse del *7,50%* annuo:

(a) un capitale di 3.500 produce un interesse di 350;

(b) un capitale di 2.500 produce un montante di 3.000;

(c) un capitale generico *C* raddoppia.

$$t = \frac{I}{i \cdot C} = \frac{1}{i} \cdot \left(\frac{M}{C} - 1 \right) \quad i = 0,075$$

$$(a)\ 1,\overline{3} \rightarrow 16 \text{ mesi}$$

$$(b)\ 2,\overline{6} \rightarrow 32 \text{ mesi}$$

$$(c)\ t = \frac{1}{0,075} \cdot \left(\frac{2C}{C} - 1 \right) = 13,\overline{3} \rightarrow 160 \text{ mesi}$$

Esercizio 16

- Calcolare il capitale da investire oggi al *9,50%* annuo per avere:

(a) un montante di 1.000 tra 14 mesi;
(b) un montante di 600 tra 75 giorni;
(c) un interesse di 100 tra 6 mesi.

$$C = \frac{M}{1+i \cdot t} = \frac{I}{i \cdot t} \quad i = 0,095$$

$$(a) \quad C = \frac{1.000}{1+0,095 \cdot (14/12)} = 900,23$$

$$(b) \quad C = \frac{600}{1+0,095 \cdot (75/360)} = 588,36$$

$$C = 588,51 \text{ anno civile}$$

$$(c) \quad C = \frac{100}{0,095 \cdot (6/12)} = 2.105,26$$

Esercizio 17

- Calcolare il tasso:

(a) semestrale equivalente al *10%* annuo;
(b) quadrimestrale equivalente al *10%* annuo;
(c) mensile equivalente al *10%* annuo;
(d) quindicinale equivalente al *10%* trimestrale;
(e) annuale equivalente al *10%* bimestrale.

$$(a)\ i_s = \frac{1}{2} i \rightarrow 5\%$$

$$(b)\ i_q = \frac{1}{3} i \rightarrow 3,33\%$$

$$(c)\ i_m = \frac{1}{12} i \rightarrow 0,83\%$$

$$(d)\ i_{qi} = \frac{1}{24} 4i \rightarrow 1,67\%$$

$$(e)\ i_a = 6i \rightarrow 60\%$$

Esercizio 18

- Calcolare il tasso annuo di sconto *d* associato:

(a) al tasso d'interesse del *10%* annuo;
(b) al tasso d'interesse del *6%* semestrale;
(c) al tasso d'interesse del *12%* per un periodo di 15 mesi.

$$d(t)=\frac{i\cdot t}{1+i\cdot t}$$

$$(a)\ \ d=\frac{0,1}{1+0,1}=0,0909\rightarrow 9,09\%$$

$$(b)\ \ d=\frac{0,06\cdot 2}{1+0,06\cdot 2}=0,1071\rightarrow 10,71\%$$

$$(c)\ \ d=\frac{0,12\cdot(12/15)}{1+0,12\cdot(12/15)}=0,08759\rightarrow 8,76\%$$

Esercizio 19

- Calcolare il tasso di sconto:

(a) semestrale corrispondente al tasso di sconto dell'*11%* annuo;

(b) annuale corrispondente al tasso di sconto del *2%* mensile.

$$d(t)=\frac{d\cdot t}{1+(t-1)\cdot d}$$

$$(a)\ d=\frac{0,11\cdot 0,5}{1+(0,5-1)\cdot 0,11}=0,058201\rightarrow 5,82\%$$

$$(b)\ \ \frac{(1/12)\cdot d}{1+(1/12-1)\cdot d}=0,02\Rightarrow d=0,19672\rightarrow 19,67\%$$

Esercizio 20

- Calcolare il valore attuale dei capitali appresso indicati, secondo i tassi e le scadenze per ciascuno specificati:

(a) 1.250 euro fra 3 mesi, tasso d'interesse *10%* semestrale;
(b) 3.000 euro fra 6 mesi, tasso d'interesse *14%* annuo;
(c) 1.750 euro fra 9 mesi, tasso di sconto *9%* annuo;
(d) 2.400 euro fra un anno, tasso di sconto *5%* semestrale.

$$P = \frac{K}{1 + i \cdot t}$$

$$(a)\ P = \frac{1.250}{1 + 0{,}1 \cdot 2 \cdot (3/12)} = 1.190{,}48$$

$$(b)\ P = \frac{3.000}{1 + 0{,}14 \cdot (6/12)} = 2.803{,}74$$

$$(c)\ P = \frac{1.750}{1 + i \cdot (9/12)} = 1.629{,}16$$

$$\text{con} \quad i = \frac{d}{1-d} = \frac{0{,}09}{1 - 0{,}09} = 0{,}0989$$

$$(d)\ P = \frac{2.400}{1+i} = 2.171,43$$

$$d\left(\frac{1}{2}\right) = 0,05 \rightarrow 0,05 = \frac{(1/2)\cdot d}{1-(1/2)\cdot d} \rightarrow d = 0,09524$$

$$\Rightarrow i = 0,1053$$

Esercizio 21

- Calcolare il valore attuale oggi, al tasso d'interesse dell'*8%* semestrale, delle seguenti posizioni debitorie:

(a) 4.500 euro dovuti tra un anno, con l'interesse del *10%* annuo;

(b) 5.000 euro dovuti tra 9 mesi, interesse *9%* annuo;

(c) 6.000 euro dovuti tra 10 mesi, interesse *8%* semestrale;

(d) 4.500 euro dovuti tra un anno, interesse del *16%* annuo.

$$P = \frac{K}{1 + i \cdot t} \quad i(1/2) = 0,08 \rightarrow i = 0,16$$

$$(a)\ \ M = 4.500 \cdot (1 + 0,1) = 4.950$$

$$\rightarrow P = \frac{4.950}{1 + 0,16} = 4.267,24$$

$$(b)\ \ M = 5.000 \cdot (1 + 0,09 \cdot 9/12) = 5.337,5$$

$$\rightarrow P = \frac{5.337,5}{1 + 0,16 \cdot (9/12)} = 4.765,63$$

$$(c)\ M = 6.000 \cdot (1 + 0,08 \cdot 2 \cdot 10/12) = 6.800$$

$$\rightarrow P = \frac{6.800}{1 + 0,16 \cdot (10/12)} = 6.000$$

$$(d)\ M = 4.500 \cdot (1 + 0,16) = 5.220$$

$$\rightarrow P = \frac{5.220}{1 + 0,16} = 4.500$$

Esercizio 22

- Viene stipulato un prestito per 5.000 euro, da restituire dopo 9 mesi con l’interesse del 12% annuo. Calcolare il valore attuale dopo 6 mesi della somma dovuta, usando il tasso d’interesse del 10% annuo.

- Somma dovuta:

$$M = 5.000 \cdot (1 + 0,12 \cdot 9/12) = 5.450$$

- Valore attuale dopo 6 mesi = valore anticipato di 3 mesi della somma 5.450:

$$P = \frac{5.450}{1 + 0,1 \cdot (3/12)} = 5.317,07$$

Esercizio 23

- Si impiegano 1.500 euro per 15 mesi al *15%.* Qual è il montante finale:

(a) se non si da luogo a capitalizzazione intermedia dell’interesse;

(b) se l’interesse prodotto viene capitalizzato a metà periodo;

(c) se l’interesse prodotto viene capitalizzato dopo 5 mesi;

(d) se l’interesse prodotto viene capitalizzato dopo 10 mesi;

(e) se l’interesse prodotto viene capitalizzato ogni 5 mesi.

$$(a)\ M = 1.500 \cdot (1 + 0,15 \cdot 15/12) = 1.781,25$$

$$(b)\ M = 1.500 \cdot (1 + 0,15 \cdot (15/12) \cdot 0,5)^2 = 1.794,43$$

$$(c)\ M = 1.500 \cdot (1 + 0,15 \cdot 5/12) \cdot (1 + 0,15 \cdot 10/12) = 1.792,97$$

$$(d)\ M = 1.500 \cdot (1 + 0,15 \cdot 10/12) \cdot (1 + 0,15 \cdot 5/12) = 1.792,97$$

$$(e)\ M = 1.500 \cdot (1 + 0,15 \cdot 5/12)^3 = 1.799,19$$

Esercizio 24

- Calcolare a quale tasso annuo d’interesse semplice posticipato corrisponde:

(a) un interesse anticipato di 160 euro su un capitale di 8.000 prestato per 3 mesi;

(b) un interesse anticipato di 125 euro su un capitale di 12.500 prestato per 45 giorni.

$$i = \frac{I(t)}{C \cdot t}$$

→ C = capitale meno interesse anticipato

$$(a)\ i = \frac{160}{7.840 \cdot 0,25} = 0,0816 \rightarrow 8,16\%$$

$$(b)\ i = \frac{125}{12.375 \cdot (45/360)} = 0,0808 \rightarrow 8,08\%$$

Il regime dello sconto commerciale

Esercizio 25

- Calcolare sconto e valore attuale per un capitale a scadenza *K=1.000*, per il tasso annuo di sconto e l'intervallo di tempo indicati:

(a) d=*10%*, t=1 anno
(b) d=*12%*, t=8 mesi
(c) d=*9,50%*, t=14 mesi
(d) d=*10,25%*, t=90 giorni

$$K = 1.000$$

$$(a)\ D = 1000 \cdot 0{,}1 \cdot 1 = 100; \quad P = 900$$

$$(b)\ D = 1.000 \cdot 0{,}12 \cdot (8/12) = 80; \quad P = 920$$

$$(c)\ D = 1.000 \cdot 0{,}095 \cdot (14/12) = 110{,}83; \quad P = 889{,}17$$

$$(d)\ D = 1.000 \cdot 0{,}1025 \cdot (90/360) = 25{,}63; \quad P = 974{,}37$$

$$\text{anno civile}: \quad D = 25{,}27; \quad P = 974{,}73$$

Esercizio 26

- Calcolare il tasso annuo di sconto in base al quale:

(a) 1.000 è il valore attuale di 1.300 disponibili tra 8 mesi;

(b) 1.000 è lo sconto necessario per anticipare di un anno un capitale di 10.000;

(c) il valore attuale di un capitale C disponibile tra 18 mesi è la metà di C.

$$P = K \cdot (1 - d \cdot t)$$

$$(a)\ 1.000 = 1.300 \cdot (1 - d \cdot 8/12) \rightarrow d = 0,3462 \rightarrow 34,62\%$$

$$(b)\ 1.000 = 10.000 \cdot d \cdot 1 \rightarrow d = 10\%$$

$$(c)\ \frac{1}{2}C = C \cdot (1 - d \cdot 18/12) \rightarrow d = 0,\overline{3} \rightarrow 33,33\%$$

Esercizio 27

- Una banca concede prestiti a breve termine al tasso annuo dell'8% d'interesse semplice anticipato. Calcolare la somma che si riscuote in effetti contraendo un prestito di:

(a) 8.000 euro a 3 mesi;
(b) 12.500 euro a 45 giorni;
(c) 7.500 euro dal 10 marzo al 15 maggio dello stesso anno (per *b* e *c*, convenzioni commerciali).

$$(a)\ d = 0,08 \Rightarrow P = 8.000 \cdot (1 - 0,08 \cdot 3/12) = 7.840$$

$$(b)\ P = 12.500 \cdot (1 - 0,08 \cdot 45/360) = 12.375$$

$$(c)\ P = 7.500 \cdot (1 - 0,08 \cdot 65/360) = 7.391,67$$

Esercizio 28

- Una banca concede prestiti al tasso del *9,25%* d'interesse semplice anticipato. Calcolare quale somma deve restituire a scadenza il debitore, e quale tasso annuo d'interesse semplice posticipato gli è stato applicato, se riceve:

(a) 3.500 euro per 7 mesi
(b) 8.000 euro per 90 giorni

$$K = \frac{P}{1 - d \cdot t} \quad d = 0,0925$$

$$(a)\ K = \frac{3.500}{1 - 0,0925 \cdot (7/12)} = 3.699,63$$

$$\Rightarrow I = 199,63 \rightarrow i = \frac{199,63}{3.500 \cdot (7/12)} = 0,09777 \rightarrow 9,78\%$$

$$(b)\ K = \frac{8.000}{1 - 0,0925 \cdot (90/360)} = 8.189,38$$

$$\Rightarrow I = 189,38 \rightarrow i = \frac{189,38}{8.000 \cdot (90/360)} = 0,09468 \rightarrow 9,47\%$$

Esercizio 29

- Calcolare il tasso annuo d’interesse associato:

(a) al tasso di sconto del *10%* annuo;
(b) al tasso di sconto del *6%* semestrale;
(c) al tasso di sconto del *5%* per 5 mesi.

$$(a)\ \text{annuale}: d=\frac{i}{1-i}=\frac{0,1}{1-0,1}=0,\bar{1}\rightarrow 11,11\%$$

$$(b)\ d(1/2)=0,06=d\cdot 1/2\rightarrow d=0,12$$

$$d=\frac{i}{1-i}=\frac{0,12}{1-0,12}=0,1364\rightarrow 13,64\%$$

$$(c)\ d(5m)=0,05=(5/12)\cdot d\rightarrow d=0,12\rightarrow i=13,64\%$$

Esercizio 30

- Calcolare il montante di 1.750 euro dopo 3 mesi in capitalizzazione iperbolica, se il tasso annuo di sconto semplice è il *12,50%*.

$$M = C \cdot r(t)$$

$$r(t) = \frac{1}{1 - d \cdot t} = \frac{1}{1 - 0{,}125 \cdot 3/12} = 1{,}032258$$

$$\rightarrow M = 1.750 \cdot r(t) = 1.806{,}45$$

Il regime dell'interesse composto

Esercizio 31

- Calcolare il montante e l'interesse prodotti (nel regime dell'interesse composto) da ciascuno degli investimenti che seguono:

(a) 1.200 euro al *13%* annuo per 3 anni e 4 mesi;

(b) 950 euro al *10%* annuo per 3 mesi;

(c) 2.500 euro al *7,50%* semestrale per un anno e 8 mesi;

(d) 1.000 euro al *4%* annuo per 21 anni;

(e) 7.500 euro per 2 anni e 6 mesi, al tasso istantaneo del *7,50 %.*

$$(a)\ M = C\cdot(1+i)^{t} = 1.200\cdot(1+0,13)^{3+4/12} = 1.803,47$$

$$I = 1.803,47 - 1.200 = 603,47$$

$$(b)\ M = 950\cdot(1+0,1)^{3/12} = 972,91; \quad I = 22,91$$

$$(c)\ i(1/2) = 0,075 = \sqrt{1+i} - 1 \rightarrow i = 0,155625$$

$$M = 2500\cdot(1+0,155625)^{1+8/12} = 3.181,52 \rightarrow I = 681,52$$

$$(d)\ M = 1.000\cdot(1+0,04)^{21} = 2.278,77 \rightarrow I = 1.278,77$$

$$(e)\ \delta = 0,075 \rightarrow i = 0,07788$$

$$M = 7.500\cdot(1+0,07788)^{2,5} = 9.046,73 \rightarrow I = 1.546,73$$

Esercizio 32

- Calcolare i seguenti tassi equivalenti:

1) mensile, equivalente al *20%* annuo;
2) trimestrale, equivalente al *15%* annuo;
3) per il periodo di 8 mesi, equivalente al *18%* annuo;
4) annuo, equivalente al *9%* bimestrale;
5) annuo, equivalente al *17,50%* per 9 mesi;
6) annuo, equivalente al *10%* semestrale;

7) nominale annuo pagabile due volte, equivalente al *14%* annuo;
8) nominale annuo pagabile due volte, equivalente al *7%* semestrale;
9) annuo, equivalente al *12%* nominale annuo pagabile 3 volte;
10) istantaneo, equivalente al *9%* annuo;
11) istantaneo, equivalente al *6%* quadrimestrale;

12) annuo, equivalente al *10%* istantaneo;
13) semestrale, equivalente al *12%* istantaneo.

$$1)\ (1+i_{1/12})^{12} = 1+0,20 \rightarrow i_{1/12} = 0,0153 \rightarrow 1,53\%$$

$$2)\ (1+i_{1/4})^{4} = 1+0,15 \rightarrow i_{1/4} = 0,03555 \rightarrow 3,56\%$$

$$3)\ (1+i_{8/12})^{12/8} = 1+0,18 \rightarrow i_{8/12} = 0,11666 \rightarrow 11,67\%$$

$$4)\ (1+0,09)^{6} = 1+i \rightarrow i = 0,677100 \rightarrow 67,71\%$$

$$5)\ (1+0,175)^{12/9} = 1+i \rightarrow i = 0,239891 \rightarrow 23,99\%$$

$$6)\ (1+0{,}10)^2 = 1+i \rightarrow i = 0{,}21 \rightarrow 21\%$$

$$7)\ 0{,}14 = (1+j(2)/2)^2 - 1 \rightarrow j(2) = 0{,}135415 \rightarrow 13{,}54\%$$

$$8)\ i_{1/m} = j(m)/m \rightarrow 0{,}07 = j(2)/2 \rightarrow j(2) = 0{,}14 \rightarrow 14\%$$

$$9)\ i = (1+0{,}12/3)^3 - 1 = 0{,}124864 \rightarrow 12{,}49\%$$

$$10)\ \delta = \log(1+0{,}09) = 0{,}086177 \rightarrow 8{,}62\%$$

$$11)\ (1+0,06)^3 = 1+i \rightarrow i = 0,191016 \rightarrow$$

$$\delta = \log(1+i) = 0,17480 \rightarrow 17,48\%$$

$$12)\ i = e^{\delta} - 1 \rightarrow i = 0,105170 \rightarrow 10,52\%$$

$$13)\ i = e^{0,12} - 1 = 0,12749$$

$$(1+i_{1/2})^2 = 1+i \rightarrow i_{1/2} = 0,061836 \rightarrow 6,18\%$$

Esercizio 33

- Calcolare il tempo necessario per generare:

(a) un montante di 5.000 euro da un capitale di 4.000 impiegato al *8%* annuo;

(b) un montante di 4.000 euro da un capitale di 2.500 impiegato al *5%* semestrale;

(c) un montante *2C* da un capitale *C* impiegato al *12,50%* annuo;

(d) un interesse di 1.000 da un capitale di 3.500 impiegato al *10%* annuo;

$$(a)\ 5.000 = 4.000 \cdot (1+0,08)^t \rightarrow t = 2,90$$

$$(b)\ (1+0,05)^2 = 1+i \rightarrow i = 0,1025$$

$$4.000 = 2.500 \cdot (1+0,1025)^t \rightarrow t = 4,82$$

$$(c)\ 2C = C \cdot (1,125)^t \rightarrow t = 5,88$$

$$(d)\ 1.000 = 3.500 \cdot \left((1+0,10)^t - 1\right) \rightarrow t = 2,64$$

Esercizio 34

- Se il tasso d’interesse è l’*11%* annuo quale capitale bisogna investire per assicurarsi un gettito d’interesse staccati di 1.000 euro mensili?

$$i = 0{,}11 \rightarrow \delta = 0{,}10436$$

$$I = C \cdot (e^{\delta \cdot t} - 1) \quad \text{con } t = 1/12$$

$$\Rightarrow 1.000 = C \cdot (e^{\delta/12} - 1) \rightarrow C = 114.487{,}29$$

Esercizio 35

- Se il tasso d'interesse è il 6% semestrale, quale capitale bisogna investire per assicurarsi un gettito d'interessi staccati di 1.500 euro ogni due mesi ?

$$i_{1/2} = 0,06 \rightarrow (1+0,06)^2 = 1+i$$

$$\rightarrow i = 0,1236 \rightarrow \delta = 0,11653$$

$$I = C \cdot (e^{\delta \cdot t} - 1) \quad \text{per } t = 2/12$$

$$\Rightarrow 1.500 = C \cdot (e^{\delta/6} - 1) \rightarrow C = 76.480,58$$

Esercizio 36

- Calcolare in base ai tassi d'interesse o di sconto di volta in volta indicati, il valor attuale dei seguenti capitali, dovuti alle rispettive scadenze:

(a) 1.450 euro tra un anno, $i=12,50\%$;
(b) 2.000 euro tra 15 mesi, $i=10\%$;
(c) 2.500 euro tra 9 mesi, $d=13\%$;
(d) 950 euro tra 2 anni e 4 mesi, $d=15\%$;
(e) 3.000 euro tra un anno e mezzo, $j(2)=15\%$;
(f) 5.000 euro tra 2 anni e 9 mesi, $\delta = 12,50\%$ (tasso istantaneo di sconto).

$$(a)\ P = K \cdot v(t)$$

$$v(1) = (1+0{,}125)^{-1} \rightarrow P = 1.288{,}89$$

$$(b)\ P = 2.000 \cdot (1+0{,}1)^{-15/12} = 1.775{,}37$$

$$(c)\ P = 2.500 \cdot (1-0{,}13)^{9/12} = 2.252{,}06$$

$$(d)\ P = 950 \cdot (1-0{,}15)^{28/12} = 650{,}18$$

$$(e)\ P = 3.000 \cdot (1+i)^{-1,5}$$

$$j(2) = 0,15 \rightarrow i_{1/2} = 0,075$$

$$(1+0,075)^2 = 1+i \rightarrow i = 0,155625 \Rightarrow P = 2.414,88$$

$$(f)\ P = 5.000 \cdot (1+i)^{-33/12}$$

$$\delta = 0,125 \rightarrow i = 0,133148$$

$$P = 3.545,53$$

Esercizio 37

- Se il tasso d'interesse vigente è del *9,50%* annuo, conviene:

(a) pagare 3.000 euro oggi, o 300 oggi e 3.000 tra un anno ?

(b) pagare 2.500 euro oggi, o 1.500 tra 6 mesi e 1.500 tra un anno?

- *i = 0,095*

(a) $v(1) = (1,095)^{-1}$

$$P = 3.000 \cdot (1,095)^{-1} = 2.739,73$$

$$300 + 2.739,73 = 3.039,73$$

→ conviene prima alternativa

(b) Valore attuale di 1.500 tra 6 mesi:

$$P = 1.500 \cdot (1,095)^{-1/2} = 1.433,46$$

- 1.500 tra un anno:

$$P = 1.500 \cdot (1{,}095)^{-1} = 1.369{,}87$$

$$P_{tot} = 1.433{,}46 + 1.369{,}87 = 2.803{,}32$$

→ conviene la prima

Esercizio 38

- Un acquisto viene regolato pagando 2.500 euro subito, e due rate semestrali di 3.000 ciascuna. Se il tasso di sconto è il *9%,* quale sarebbe stato il prezzo in contanti del bene acquistato?

- 2.500 subito + 2 rate semestrali di 3.000, con *d* = *0,09*. Valore attuale delle rate?

→ 3.000 dopo 6 mesi:

$$P = 3.000 \cdot (1 - 0,09)^{1/2} = 2.861,82$$

→ 3.000 dopo 1 anno:

$$P = 3.000 \cdot (1 - 0,09)^{1} = 2.730$$

Totale: 2.500 + 2.861,82 + 2.730 =
= 8.091,82

Esercizio 39

- Investite 1.000 euro per 20 mesi, al tasso del *12%* nominale pagabile 3 volte l’anno. Quale montante ricavate al termine, se ogni disponibilità ulteriore vi rende il *10%* l’anno?

$$j(3) = 0,12 \rightarrow i = 0,124864 \rightarrow \delta = 0,11766$$

- 5 rate in 20 mesi.
- ammontare di ciascuna rata:

- 5 rate → 200
- Interesse prodotto dalle rate:

$$R = 1.000 \cdot 0,04 = 40$$

$$40 \cdot (1{,}1^{16/12} + 1{,}1^{1} + 1{,}1^{8/12} + 1{,}1^{4/12}) = 173{,}3356$$

$$I = 173{,}3356 - 4 \cdot 40 = 13{,}3356$$

$$I_{tot} = 200 + 13{,}3356$$

$$M = C + I_{tot} = 1.213{,}34$$

Esercizio 40

- Investite 2.500 euro per due anni, al tasso del *10%* nominale pagabile due volte l'anno. Quale montante ricavate al termine , se ogni disponibilità ulteriore vi rende il *3%* quadrimestrale?

$$j(2) = 0{,}1 \rightarrow i_{1/2} = 0{,}05$$

- Interesse staccato ogni semestre:

$$2.500 \cdot 0{,}05 = 125$$

- 4 rate → 500
- Le prime 3 rate vengono capitalizzate con

$$i_{1/3} = 0{,}03$$

$$\rightarrow (1 + 0{,}03)^3 = 1 + i \rightarrow i = 0{,}092727$$

- Montante delle prime 3 rate:

$$M = 125 \cdot (1,093^{3/2} + 1,093^{1} + 1,093^{1/2}) = 410,04$$

$$I = -3 \cdot 125 + 410,04 = 35,041$$

$$I_{tot} = 535,04$$

$$M = 2.500 + 535,04 = 3.035,04$$

Esercizio 41

- Se il tasso annuo d’interesse è il *10,50%* trovare il montante, in capitalizzazione mista, di una somma di 8.000 euro giacente in un deposito bancario dal 15 ottobre 1984 al 6 aprile 1987.

- Capitalizzazione mista, *i = 0,105*; *C = 8.000*

(1) 15 ott. 84 → 31 dic. 84:

$$r_1(t) = 1 + 0{,}105 \cdot (77/365)$$

(2) 2 anni: $r_2(t) = 1{,}105^2$

(3) 1 gen. 87 → 6 apr. 87:

$$r_3(t) = 1 + 0{,}105 \cdot (96/365)$$

$$M = 8.000 \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = 10.260{,}31$$

Esercizio 42

- Verificare se sono scindibili le seguenti leggi finanziarie

$$(a)\ r(x,y) = 1 + i \cdot \left(1 - \exp(x - y)\right)$$

$$(b)\ r(x,y) = 1 + i \cdot \log(1 + y - x)$$

$$(c)\ r(x,y) = \exp\left(0,5 \cdot \left(y^2 - x^2\right)\right)$$

$$(a)\ \delta = \frac{\partial}{\partial y}\log\left[1+i\cdot\left(1-e^{x-y}\right)\right] = \frac{i\cdot e^{x-y}}{1+i-i\cdot e^{x-y}} \quad \text{No}$$

$$(b)\ \delta = \frac{\partial}{\partial y}\log\left[1+i\cdot\log(1+y-x)\right] =$$

$$\frac{i}{1+i\cdot\log(1+y-x)}\cdot\frac{1}{1+y-x} \quad \text{No}$$

$$(c)\ \delta = \frac{\partial}{\partial y}\log\left[e^{\frac{1}{2}\left(y^2-x^2\right)}\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{2}\left(y^2-x\right)^2\right] = y \quad \text{Si}$$

Esercizio 43

- Si consideri un capitale che, al tempo $t = 0{,}4$ ammonta a 3.500 euro. Calcolarne il montante di proseguimento in $t = 1{,}2$ se esso rappresenta a sua volta il montante di un operazione iniziata in $t = 0{,}1$:

(a) nel RFIS, tasso annuo d'interesse *8,50%*;
(b) nel RFIC, tasso annuo d'interesse *8,50%*.

$$C = 3.500; \quad t = 0,4$$

$$(a)\ i = 0,085$$

$$\rightarrow M = \frac{3.500}{1 + 0,085 \cdot (0,4 - 0,1)} \cdot \left(1 + 0,085 \cdot (1,2 - 0,1)\right) = 3.732,08$$

$$(b)\ i = 0,085$$

$$\rightarrow M = \frac{3.500}{(1 + 0,085)^{0,3}} \cdot (1 + 0,085)^{1,1} = 3.736,04$$

Esercizio 44

- Calcolare il montante che si produce in un anno e due mesi investendo un capitale di 1.250 se:

$$(a)\ \delta(t) = 0{,}1 \quad (t\text{: anni})$$

$$(b)\ \delta(t) = 0{,}1 \quad (t\text{: semestri})$$

$$(c)\ \delta(t) = 0{,}08 \quad (\text{primo anno})$$

$$= 0{,}12 \quad (\text{successivamente, } t\text{: anni})$$

$$(d)\ \delta(t) = 1 - \exp(-t) \quad (t\text{: anni})$$

$$M = ? \quad t = 7/6 \quad C = 1.250$$

$$M(t) = C \cdot e^{\int_0^t \delta(s)ds}$$

$$(a)\ \delta(t) = 0,1$$

$$\rightarrow M = 1.250 \cdot e^{0,1 \cdot 7/6} = 1.404,68$$

$$(b)\ \delta(t) = 0,1$$

$$\rightarrow M = 1.250 \cdot e^{0,1 \cdot (7/6) \cdot 2} = 1.578,50$$

$$(c)\ \delta(t) = 0,08; \quad \delta(t) = 0,12$$

$$\rightarrow M = 1.250 \cdot e^{(0,08+0,12\cdot 1/6)} = 1.381,46$$

$$(d)\ \delta(t) = 1 - e^{-t}$$

$$\rightarrow M = 1.250 \cdot e^{\int_0^{7/6}\left(1-e^{-s}\right)ds} = 1.250 \cdot e^{\left[s+e^{-s}\right]_0^{7/6}} =$$

$$= 1.250 \cdot e^{0,4781} = 2.016,20$$

Forza d'interesse

Esercizio 45

- Un operazione finanziaria produce interessi in base ad un tasso istantaneo d'interesse pari a $\delta = 0,09.$
  Calcolare dopo quanto tempo raddoppia un capitale iniziale di 1.000.000 investito a tali condizioni; verificare inoltre il tempo necessario alla formazione di un montante pari a 2.320.000.

$$M = C \cdot e^{\delta \cdot t} \Rightarrow 2 = e^{\delta \cdot t} \Rightarrow t = \frac{\log 2}{\delta} = 7,7016$$

$$M = 2.320.000$$

$$\Rightarrow \frac{M}{C} = e^{\delta \cdot t} \Rightarrow t = \frac{\log \frac{M}{C}}{\delta} = \frac{\log \frac{2.320.000}{1.000.000}}{0,09} = 9,3507$$

Esercizio 46

- Assegnata la forza d'interesse $\delta(t) = 0,4 + 0,05 \cdot e^{t}$

→ calcolare il montante prodotto in un anno e due mesi da un capitale iniziale di 1.250.000 euro.

$$M(t) = C \cdot e^{\int_0^t \delta(s)ds} = 1.250.000 \cdot e^{\int_0^{14/12} \delta(s)ds}$$

$$\int_0^{14/12} \delta(s)ds = \int_0^{14/12} (0,4 + 0,05 \cdot e^s)ds = \left[0,4 \cdot s + 0,05 \cdot e^s\right]_0^{14/12}$$

$$= 0,4 \cdot \frac{14}{12} + 0,05 \cdot e^{14/12} - 0,05 = 0,577 \rightarrow e^{0,577} = 1,781$$

$$\Rightarrow M = 1.250.000 \cdot 1,781 = 2.226.372,87$$

Esercizio 47

- Data la forza d'interesse $\delta(t) = \dfrac{2i}{1+2i \cdot t}$:

1. esplicitare la formula della legge di capitalizzazione;
2. calcolare il valore in *t=0* di uno zero coupon bond che paga 100 dopo 8 mesi se *i=6%*.

$$M(t) = C \cdot r(t) = C \cdot e^{\int_0^t \delta(s)ds}$$

$$\int_0^t \delta(s)ds = \int_0^t \frac{2i}{1+2i \cdot s} ds = 2i \cdot \int_0^t \frac{ds}{1+2i \cdot s} =$$

$$= \left[\log|1+2i \cdot s|\right]_0^t = \log(1+2i \cdot t)$$

$$\Rightarrow r(t) = 1+2i \cdot t$$

$$P = 100 \cdot v\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$v(t) = e^{-\int_0^t \delta(s)ds} = e^{-\log(1+2i \cdot t)} = \frac{1}{1+2i \cdot t}$$

$$P = 100 \cdot \frac{1}{1+2 \cdot 0,06 \cdot \frac{2}{3}} = 92,59$$

Esercizio 48

- Data la seguente forza d'interesse (intensità istantanea d'interesse) $\delta(t) = i$, calcolare il montante di 100 dopo tre anni se il tasso *i* è pari al 6%.

$$M(t) = C \cdot r(t)$$

$$r(t) = e^{\int_0^t \delta(s)ds}$$

$$\int_0^3 0,06ds = 0,18 \Rightarrow e^{0,18} = 1,1972$$

$$\Rightarrow M = 100 \cdot 1,1972 = 119,72$$

Esercizio 49

- Data la seguente forza d'interesse (intensità istantanea d'interesse) $\delta(t) = \log(1 + i/2)$, calcolare il montante di 100 dopo tre anni se il tasso *i* è pari al *10%*.

$$M(t) = C \cdot r(t)$$

$$r(t) = e^{\int_0^t \delta(s)ds}$$

$$\delta(t) = \log(1 + 0,05) = 0,04879$$

$$\int_0^3 0,04879ds = 0,14637 \Rightarrow e^{0,14637} = 1,1576$$

$$\Rightarrow M = 100 \cdot 1,1576 = 115,76$$

Esercizio 50

- Sapendo che la forza d'interesse vigente sul mercato è $\delta(t)=\alpha+\beta\cdot t$, calcolare il montante di 100 dopo tre anni se $\alpha=0,02$ e $\beta=0,10$.

$$M(t) = C \cdot r(t)$$

$$r(t) = e^{\int_0^t \delta(s)ds}$$

$$\int_0^3 (0,02 + 0,10t)dt = \left[0,02t + \frac{0,10}{2}t^2 \right]_0^3 = 0,51$$

$$\Rightarrow e^{0,51} = 1,6653$$

$$\Rightarrow M = 100 \cdot 1,6653 = 166,53$$

Esercizio 51

- Data la forza d'interesse $\delta(t)=\dfrac{i}{t+1}$

  calcolare il montante di 100 dopo tre periodi se il tasso di rendimento è il *5%*.

$$\int_0^3 \frac{0,05}{t+1} dt = 0,05 \cdot \left[\log|t+1|\right]_0^3 = 0,05 \cdot \log 4 = 0,06931$$

$$\Rightarrow e^{0,06931} = 1,0718$$

$$\Rightarrow M = 107,18$$

Esercizio 52

- Sapendo che la forza d'interesse vigente sul mercato è

$$\delta(t) = 0,055 \cdot \frac{2t}{1+t^2}$$

→ dedurne il fattore di capitalizzazione.

$$\int_0^t 0,055 \cdot \frac{2s}{1+s^2}\,ds = 0,055 \cdot \left[\log|1+s^2|\right]_0^t =$$

$$= 0,055 \cdot \log\left(1+t^2\right) = \log\left(1+t^2\right)^{0,055}$$

$$\Rightarrow r(t) = \left(1+t^2\right)^{0,055}$$

Esercizio 53

- Un operazione finanziaria, a fronte di un investimento unitario consente di ottenere all'epoca t un montante pari a

$$\frac{1,2 \cdot t + 2}{t + 2}$$

- Calcolare la forza d'interesse corrispondente.

- Per definizione avremo:

$$M(t) = C \cdot e^{\int_0^t \delta(s)ds}$$

$$\rightarrow \frac{1,2 \cdot t + 2}{t+2} = e^{\int_0^t \delta(s)ds}$$

$$\rightarrow \log\left(\frac{1,2 \cdot t + 2}{t+2}\right) = \int_0^t \delta(s)ds$$

- Per cui derivando membro a membro:

$$\delta(t) = \frac{1,2\cdot(t+2) - 1\cdot(1,2\cdot t+2)}{(t+2)^2}\cdot\frac{t+2}{(1,2\cdot t+2)} =$$

$$= \frac{0,4}{(t+2)\cdot(1,2\cdot t+2)}$$

Esercizio 54

- La forza di interesse corrispondente ad un ipotetico regime finanziario è:

$$\delta(t) = 2^t$$

- Calcolare la legge di capitalizzazione corrispondente e verificare se la stessa sia scindibile.

$$r(t) = e^{\int_0^t \delta(s)\,ds}$$

$$\int_0^t \delta(s)\,ds = \int_0^t 2^s\,ds = \left[\frac{2^s}{\log 2}\right]_0^t = \frac{2^t - 1}{\log 2}$$

$$\Rightarrow r(t) = e^{\frac{2^t - 1}{\log 2}}$$

- La legge non è scindibile in quanto $\delta(t)$ dipende da t.

Esercizio 55

- Data la seguente forza d'interesse (intensità istantanea di interesse)

$$\delta(t) = \frac{0{,}8 \cdot i \cdot t}{1+t^2}$$

- a) scrivere l'equazione del fattore di capitalizzazione;
- b) calcolare il valore attuale di un importo pari a 500 disponibile dopo 4 anni se il tasso *i* è pari al *5%*.

$$r(t) = e^{\int_0^t \delta(s)ds}$$

$$\int_0^t \delta(s)ds = \int_0^t \frac{0,8 \cdot i \cdot s}{1+s^2} ds = 0,4 \cdot i \cdot \int_0^t \frac{2 \cdot s}{1+s^2} ds =$$

$$= 0,4 \cdot i \cdot \left[\log\left(1+s^2\right) \right]_0^t = 0,4 \cdot i \cdot \log\left(1+t^2\right) =$$

$$= \log\left(1+t^2\right)^{0,4 \cdot i}$$

$$\Rightarrow r(t) = \left(1+t^2\right)^{0,4 \cdot i}$$

- Calcolo del valore attuale:

$$\Rightarrow v(t) = \frac{1}{\left(1+t^2\right)^{0,4\cdot i}}$$

$$P = \frac{500}{17^{0,02}} = \frac{500}{1,0583} = 472,456$$