Lezione XX

(Dinamica rotatoria: esempi
Oscillazioni: intro,
oscillatore armonico,
legge di Hooke
Moto Armonico semplice)

FRUIZIONE E UTILIZZO DEI MATERIALI DIDATTICI

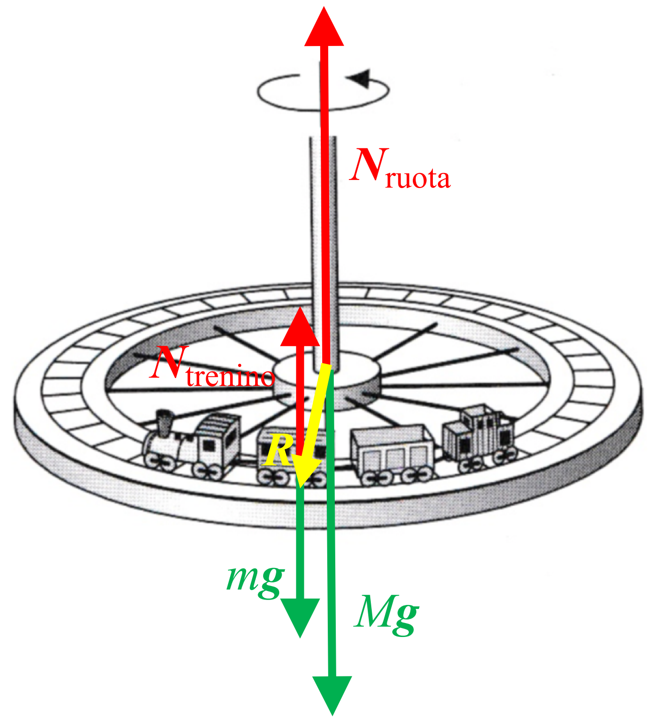
- **E' vietata** la **copia**, la **rielaborazione**, la **riproduzione** dei contenuti e immagini presenti nelle lezioni in qualsiasi forma

- **E' inoltre vietata** la **diffusione**, la **redistribuzione** e la **pubblicazione** dei contenuti e immagini, incluse le registrazioni delle videolezioni con qualsiasi modalità e mezzo non autorizzati espressamente
dall'autore o da Unica

Esempio F :

Un trenino giocattolo viene montato su una ruota libera di ruotare senza attrito attorno al suo asse verticale (vedi figura). Sia m la massa del trenino inizialmente a riposo; a un certo punto si avvia il motore elettrico e il trenino aumenta la sua velocità fino a raggiungere una situazione stazionaria in cui la sua velocità rispetto al binario vale v. Si calcoli la velocità angolare della ruota supponendo che la sua massa valga M e il suo raggio R. (Si trascuri la massa dei raggi della ruota.)

Il sistema ruota + trenino è soggetto alla forza di interazione gravitazionale e alle reazioni vincolari in direzione normale al piano in cui avviene il moto. Le forze di attrito tra il trenino e la ruota sono forze interne e quindi non possono alterare il momento angolare del sistema. Per la ruota la forza di gravità, applicata al centro della ruota stessa, viene bilanciata dalla reazione normale; per il trenino la forza di gravità e la reazione normale hanno, rispetto al centro della ruota, momenti di forza uguali e opposti e quindi non variano il momento angolare del sistema. Siamo pertanto in una condizione in cui il momento angolare totale del sistema si conserva; possiamo allora scrivere, scegliendo come polo fisso il centro della ruota e considerando la ruota come un anello,

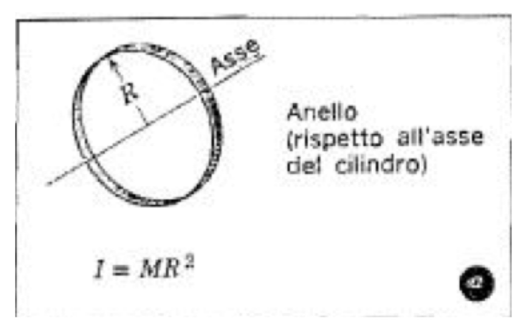


$$\boldsymbol{L}_i = \boldsymbol{L}_f \Rightarrow 0 = I_{\text{trenino}}\omega_{\text{trenino}} + I_{\text{ruota}}\omega_{\text{ruota}} \Rightarrow mR^2\frac{v_{\text{trenino}}}{R} = -MR^2\omega_{\text{ruota}}$$

e infine

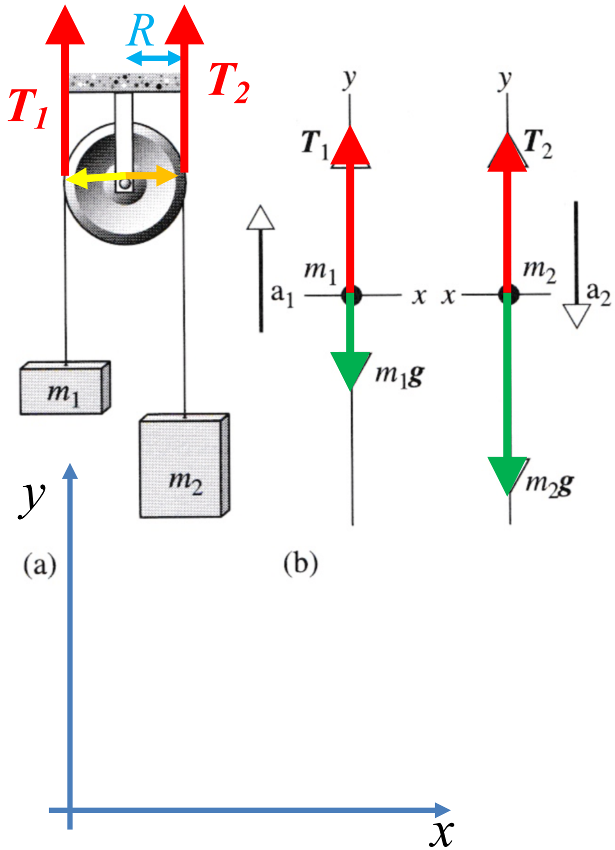
$$\omega_{\text{ruota}} = -\frac{m}{M}\frac{v_{\text{trenino}}}{R} = -\frac{m}{M}\omega_{\text{trenino}}\,.$$

La ruota si muove nella direzione opposta a quella del trenino e la sua velocità angolare scala secondo il rapporto tra le masse del trenino e della ruota.



Esempio G : la macchina di Atwood

In una macchina di Atwood un blocco ha massa 512 g e l'altro 463 g. La puleggia è montata su cuscinetti privi di attrito e ha raggio di 4,90 cm. Quando il sistema viene lasciato libero di muoversi, si osserva che il blocco più pesante scende di 76,5 cm in 5,11 s. Si calcoli il momento d'inerzia della puleggia.

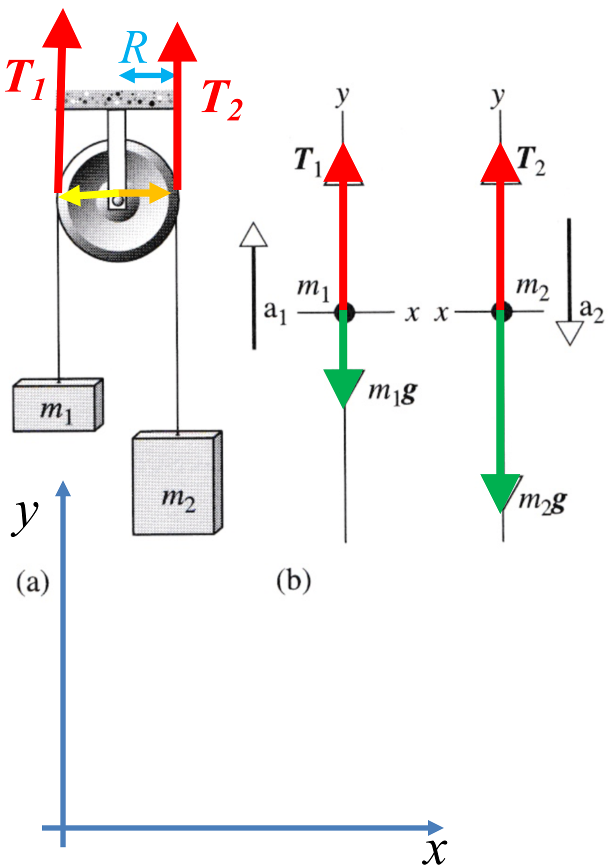


Indichiamo con $\boldsymbol{T}_2$ e $\boldsymbol{T}_1$ le tensioni della fune agganciata rispettivamente al blocco più pesante e a quello più leggero. Il blocco più pesante scende sotto l'azione della risultante $\boldsymbol{F}_2 = m_2\boldsymbol{g} + \boldsymbol{T}_2$, mentre quello più leggero sale per effetto della risultante $\boldsymbol{F}_1 = m_1\boldsymbol{g} + \boldsymbol{T}_1$ e inoltre la puleggia è messa in rotazione dal momento risultante di modulo $T_2R - T_1R$. Scegliamo un sistema di riferimento con l'asse y positivo diretto verso l'alto e proiettiamo le equazioni del moto, tenendo presente che, se la componente dell'accelerazione del blocco 1 è a, quella del blocco 2 è $-a$:

$$\begin{cases} T_2 - m_2 g = m_2(-a) \\ T_1 - m_1 g = m_1 a \\ T_2 R - T_1 R = I\alpha \\ \alpha = a/R \end{cases}$$

da cui si ricava in particolare:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{I/R^2 + m_1 + m_2}\, g\,.$$



$$a = \frac{m_2 - m_1}{I/R^2 + m_1 + m_2} g\,.$$

Poiché risulta che l'accelerazione dei blocchi è costante, possiamo trovarne il valore applicando la legge oraria del moto uniformemente accelerato con i dati del problema (naturalmente dopo averli trasformati in unità del SI):

$$a = \frac{2s}{t^2} = \frac{2(0{,}765\ \text{m})}{(5{,}11\ \text{s})^2} = 5{,}86 \cdot 10^{-2}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}\,.$$

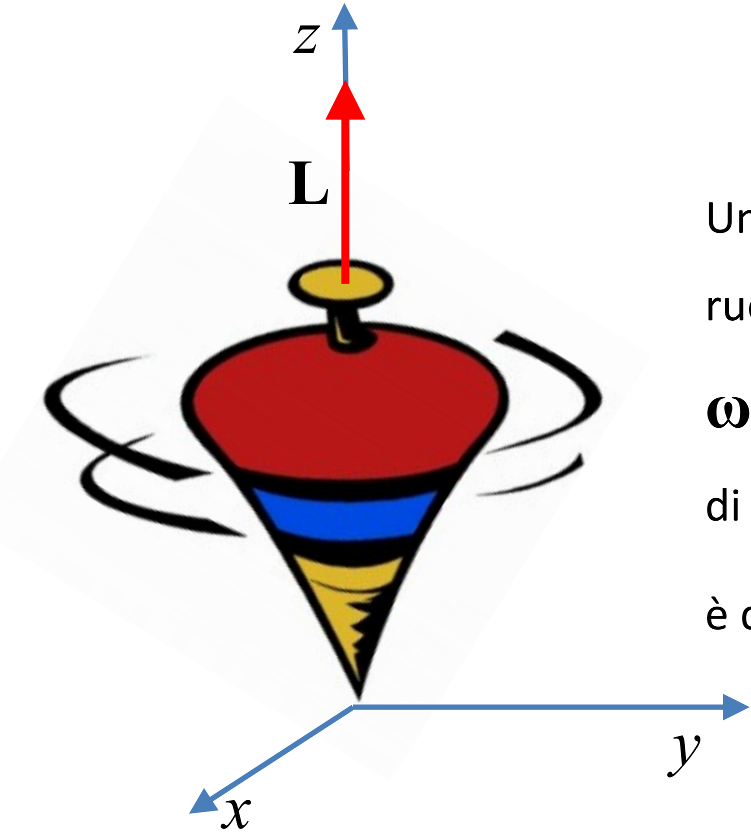
Sostituendo il valore così trovato di a nell'equazione precedente e risolvendo rispetto a I si ottiene:

$$I = R^2 \left[(m_2 - m_1)\frac{g}{a} - (m_1 + m_2) \right] = 0{,}0173\ \text{kg} \cdot \text{m}^2\,.$$

Le tensioni della fune ai due lati della carrucola risultano quindi:

$$T_1 = 5{,}05\ \text{N} \qquad \text{e} \qquad T_2 = 4{,}51\ \text{N}\,.$$

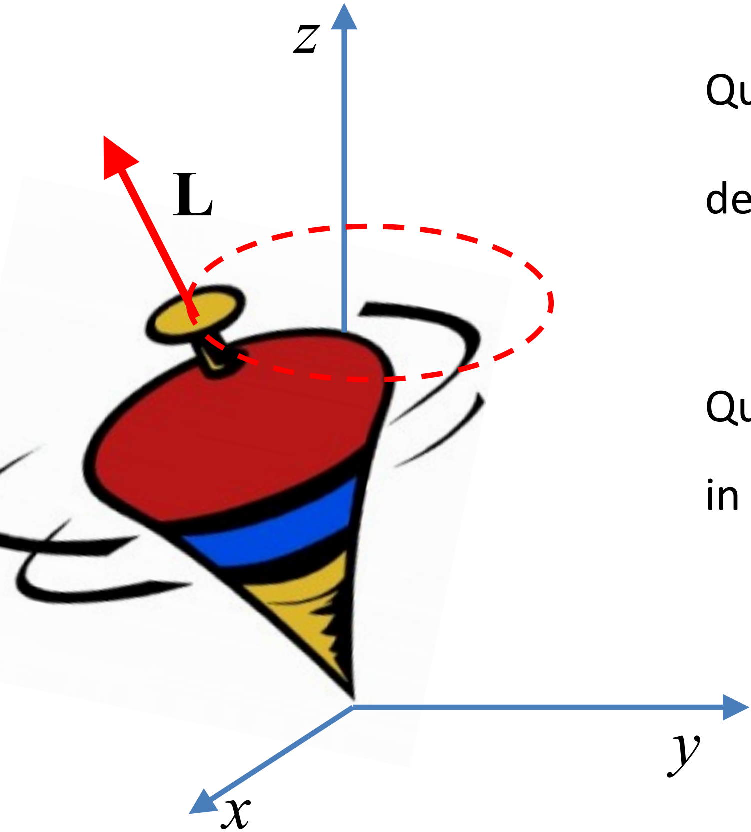
Esempio H : il moto di precessione di una trottola



Una trottola è un oggetto a simmetria cilindrica che ruota attorno al suo asse di simmetria. Indicando con $\boldsymbol{\omega}$ la sua velocità angolare e con I il suo momento di inerzia rispetto all'asse, il suo momento angolare è dato da:

$$\mathbf{L} = I\,\boldsymbol{\omega}$$

Poiché il momento angolare di un sistema isolato **si conserva**, una trottola su cui non agiscono forze esterne o attriti mantiene in eterno il suo stato di moto **immutato**.



Questa affermazione è vera, **qualsiasi sia la direzione**

del momento angolare $\mathbf{L} = I\,\boldsymbol{\omega}$

Quindi anche nel caso di una trottola inclinata come

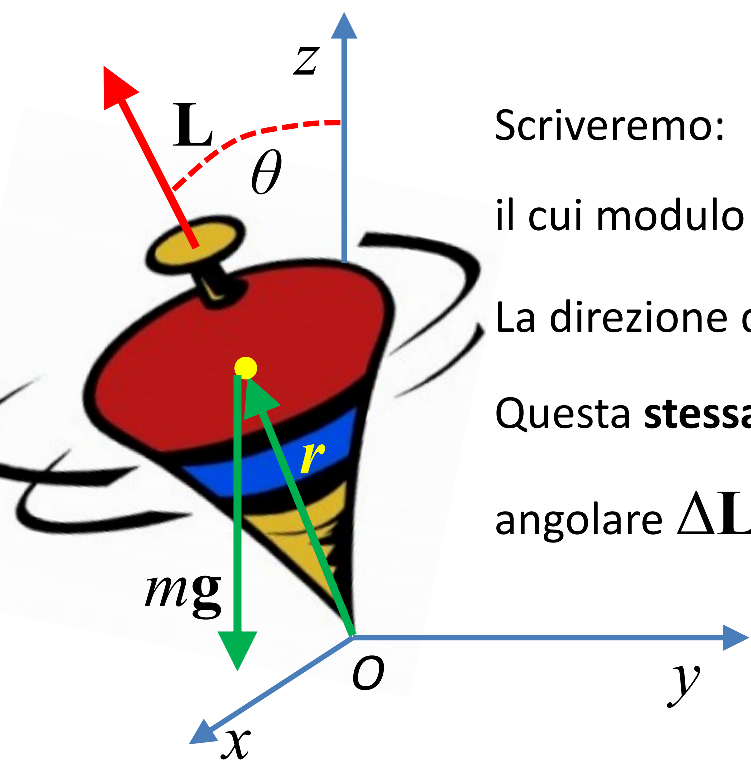
in figura, il moto rotatorio continua all'infinito **immutato.**

Eppure l'esperienza ci insegna che se l'asse è inclinato, la trottola subisce un moto

di **precessione**, cioè la direzione del vettore $\mathbf{L}$ varia continuamente, quindi $\mathbf{L} \neq$ costante.

Come spieghiamo questo fenomeno ?

Evidentemente nel caso reale la trottola **non è un sistema isolato**: su di essa agisce la forza di gravitazione. Vediamo allora di capire cosa succede. Sia m la massa della trottola, sia θ l'angolo dell'asse della trottola rispetto alla verticale, e consideriamo il momento $\boldsymbol{\tau}$ rispetto al punto di appoggio *O* esercitato dalla forza di gravità $m\mathbf{g}$ sul baricentro della trottola, individuato da un vettore $\boldsymbol{r}$ come in figura.



Scriveremo: $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r}\ \mathbf{x}\ m\ \mathbf{g}$

il cui modulo è: $\tau = \mathrm{r}\ m\ \mathrm{g}\ \sin\theta$

La direzione di $\boldsymbol{\tau}$ è ortogonale al piano individuato da $\boldsymbol{r}$ e $\mathbf{g}$

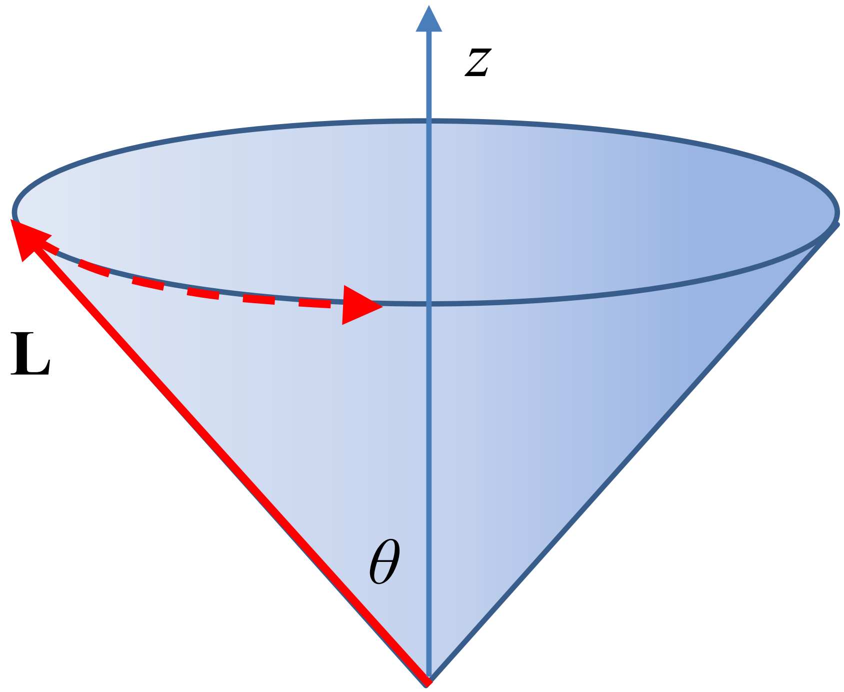
Questa **stessa** sarà quindi la direzione della variazione di momento angolare $\Delta\mathbf{L}$ in un breve tempo Δt , in quanto risulta: $\Delta\mathbf{L} = \boldsymbol{\tau}\ \Delta t$

Risulta quindi che dopo un breve intervallo di tempo Δt il momento angolare $\mathbf{L}$

è diventato $\mathbf{L} + \Delta\mathbf{L}$

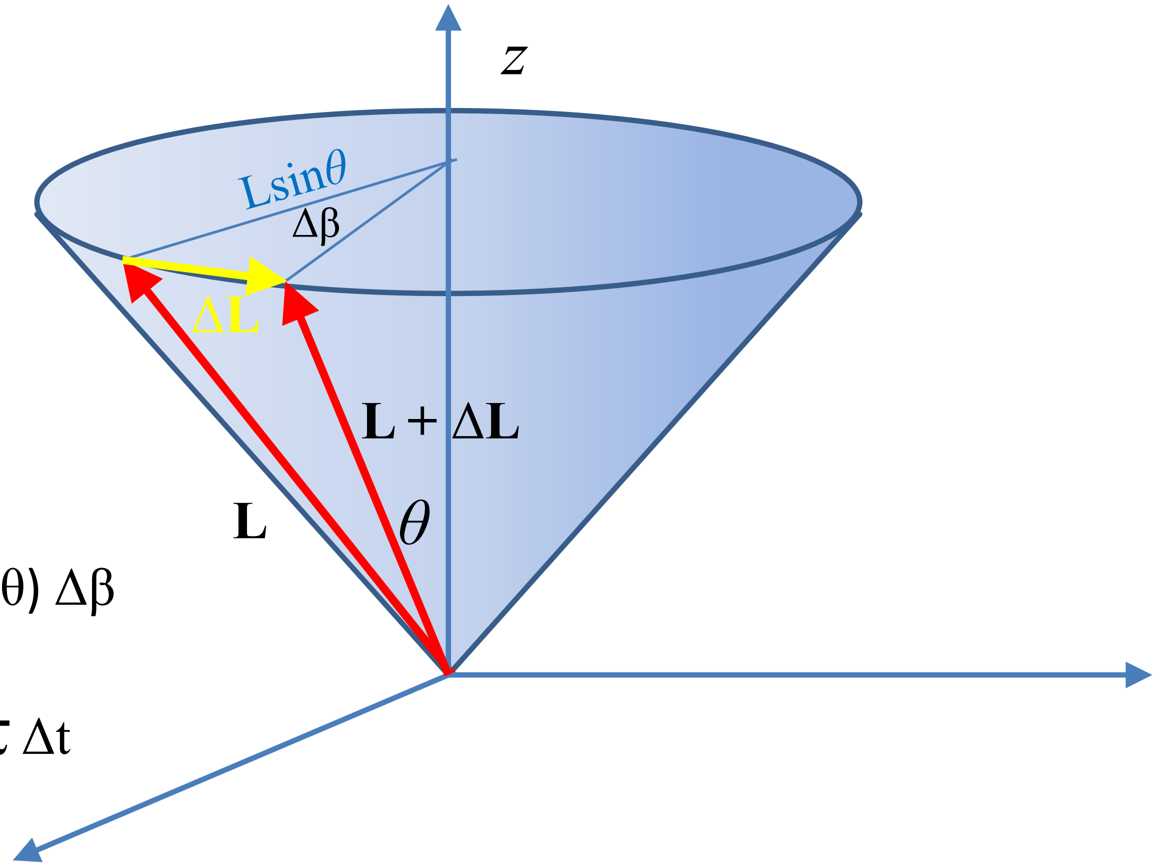
Poiché $\Delta\mathbf{L}$ è ortogonale a $\mathbf{L}$ ed è supposto molto piccolo rispetto a $\mathbf{L}$ il nuovo

vettore momento angolare ha lo stesso modulo del vecchio ma una diversa direzione.



Quindi col passare del tempo la punta della freccia del vettore $\mathbf{L}$ si muove lungo un cerchio come in figura

Riferendoci al disegno della slide precedente, vediamo quindi di capire da quali parametri dipende la velocità angolare di precessione $\boldsymbol{\omega_p}$



Vale: $\Delta L = (L\sin\theta)\,\Delta\beta$

E anche: $\Delta L = \boldsymbol{\tau}\,\Delta t$

Si ha per definizione: $\omega_p = \Delta\beta / \Delta t$

Poiché abbiamo assunto $\Delta\mathbf{L} \ll \mathbf{L}$ potremo scrivere

$$\Delta\beta = \frac{\Delta L}{L \sin\theta} = \frac{\tau\,\Delta t}{L \sin\theta}$$

e poiché era : $\tau = \mathrm{r}\, m\, \mathrm{g}\, \sin\theta$

Si ha: $$\Delta\beta = \frac{\mathrm{r}\, m\, \mathrm{g}\, \sin\theta\, \Delta t}{L \sin\theta}$$

E quindi : $\omega_p = \Delta\beta / \Delta t \rightarrow \dfrac{\mathrm{r}\, m\, \mathrm{g}\, \sin\theta\, \Delta t}{L \sin\theta\, \Delta t} = \dfrac{\mathrm{r}\, m\, \mathrm{g}}{L}$

Cioè: per L grande, la velocità angolare di precessione ω_p è piccola

OSCILLAZIONI

Moto periodico

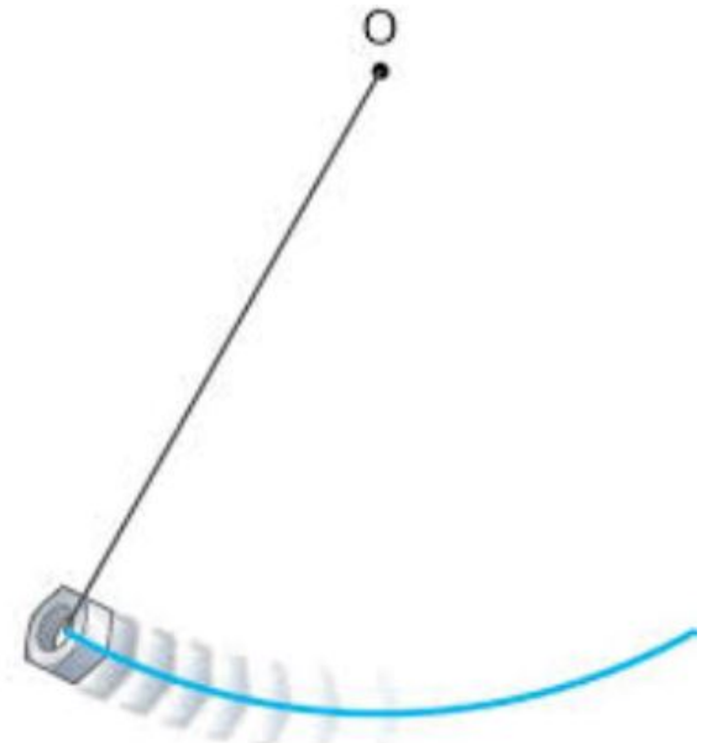
Per **moto periodico intendiamo un moto che si ripete ad intervalli regolari di tempo**.

Per esempio il moto illustrato nell'esempio di seguito, che rientra fra quelli che abbiamo già visitato, è certamente un moto periodico:

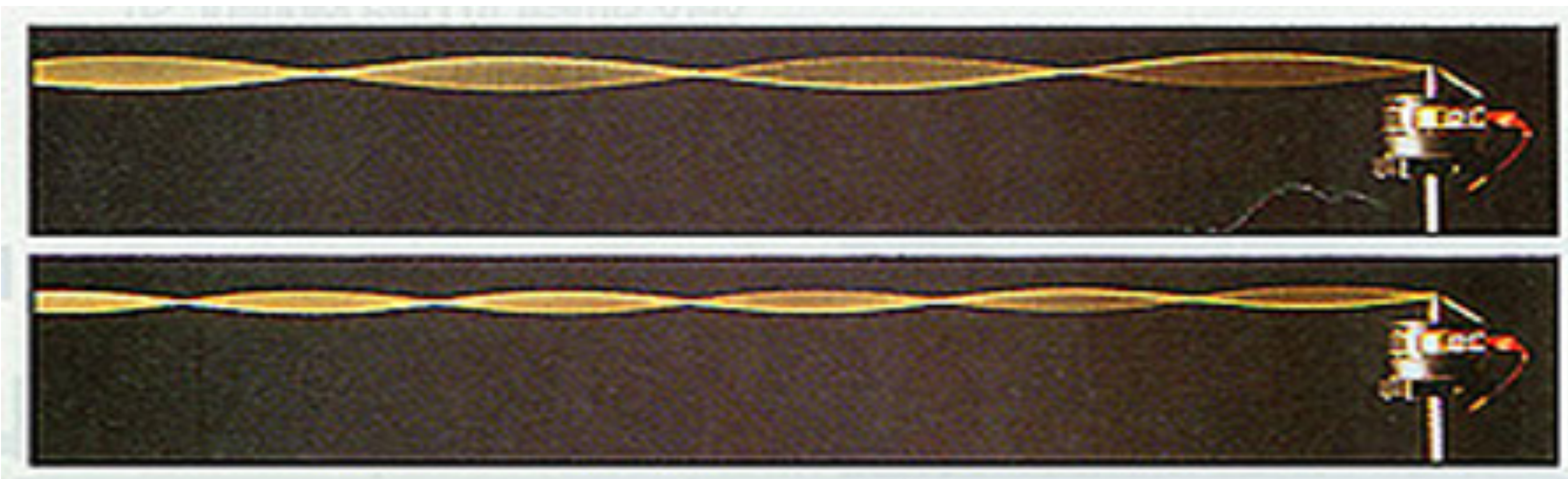
Vedremo nel seguito di studiare in dettaglio alcuni casi esemplificativi del moto periodico procedendo quindi verso lo studio delle cosiddette «oscillazioni» e delle grandezze fisiche che le caratterizzano e che sono propedeutiche allo studio dei fenomeni ondulatori

Altri esempi di moto periodico che ci sono familiari

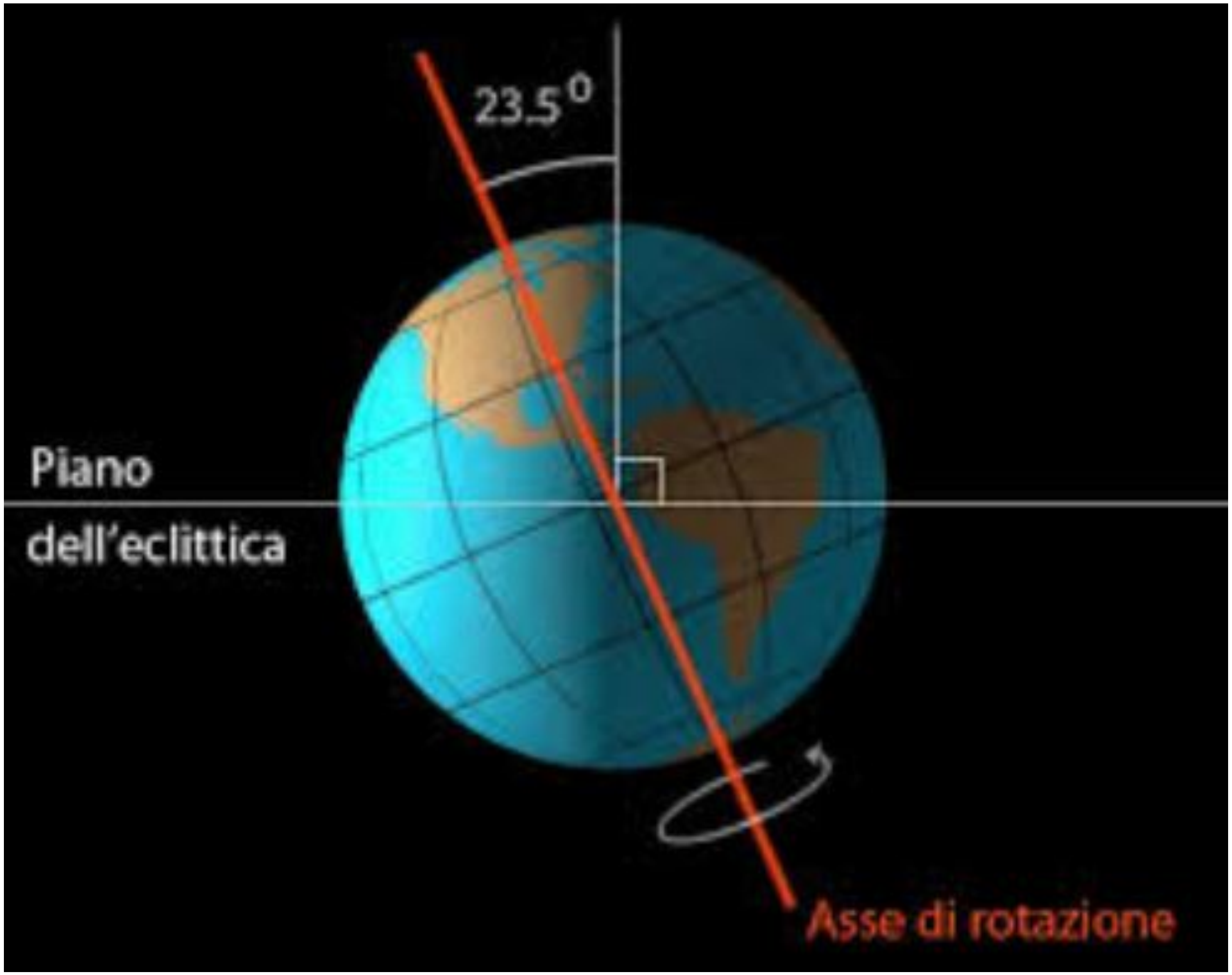
- Il moto del pendolo



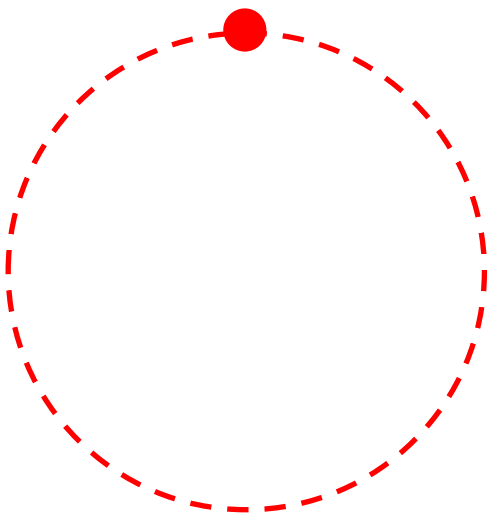
- La vibrazione di una corda di violino



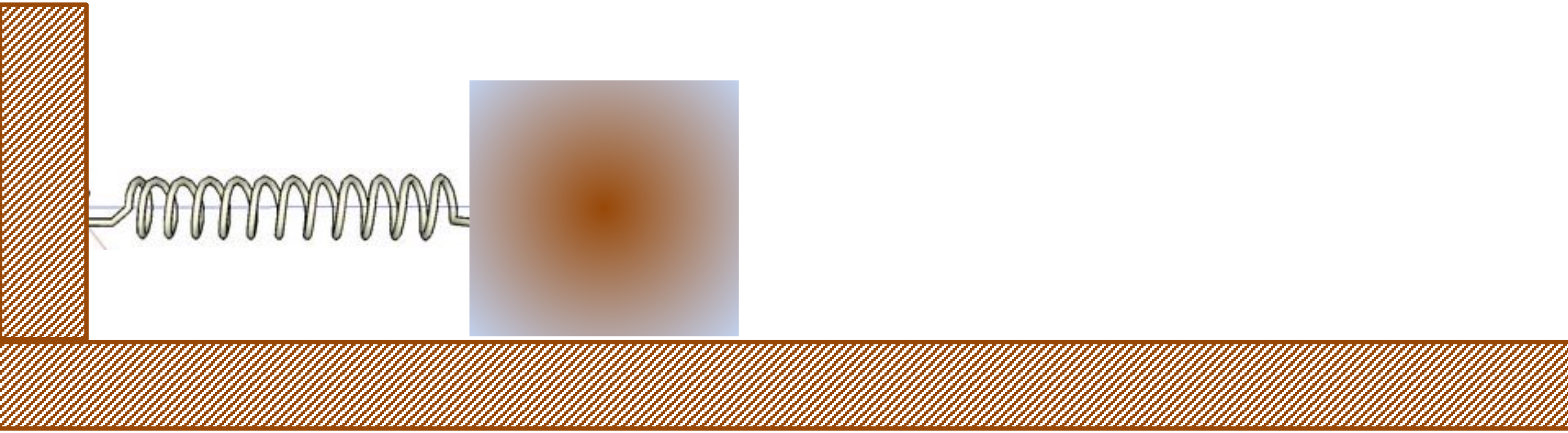
- La rotazione della terra attorno al proprio asse



- Il moto circolare uniforme



- Il moto di una massa attaccata ad una molla



Nella realtà, molti dei moti periodici a noi noti sono solo approssimativamente periodici a causa dell’azione delle forze d’attrito che dissipano l’energia del moto

- Il pendolo smette gradualmente di oscillare

- La corda di violino smette di vibrare

- Etc…

In questi casi il moto viene detto **moto periodico smorzato**

Nel moto periodico ne la velocità ne l’accelerazione sono costanti

(Nel caso del moto circolare uniforme lo sono ma solo in modulo)

Se il **moto va avanti e indietro lungo lo stesso percorso**, viene detto

Moto oscillatorio o vibratorio

- Un ciclo completo del moto si chiama **oscillazione** o **vibrazione**
- Il tempo speso per effettuare una oscillazione completa è denominato **Periodo** T
- La **frequenza** f è il numero di oscillazioni che occorrono nell'unità di tempo

$$f = 1 / T$$

- La posizione in cui nessuna forza agisce sul corpo è denominata **posizione di equilibrio**
- L'**elongazione** (lineare o angolare) è la distanza (lineare o angolare) dalla posizione di equilibrio ad ogni istante
- L' **ampiezza** A del moto **è l'elongazione massima**

L'oscillatore armonico

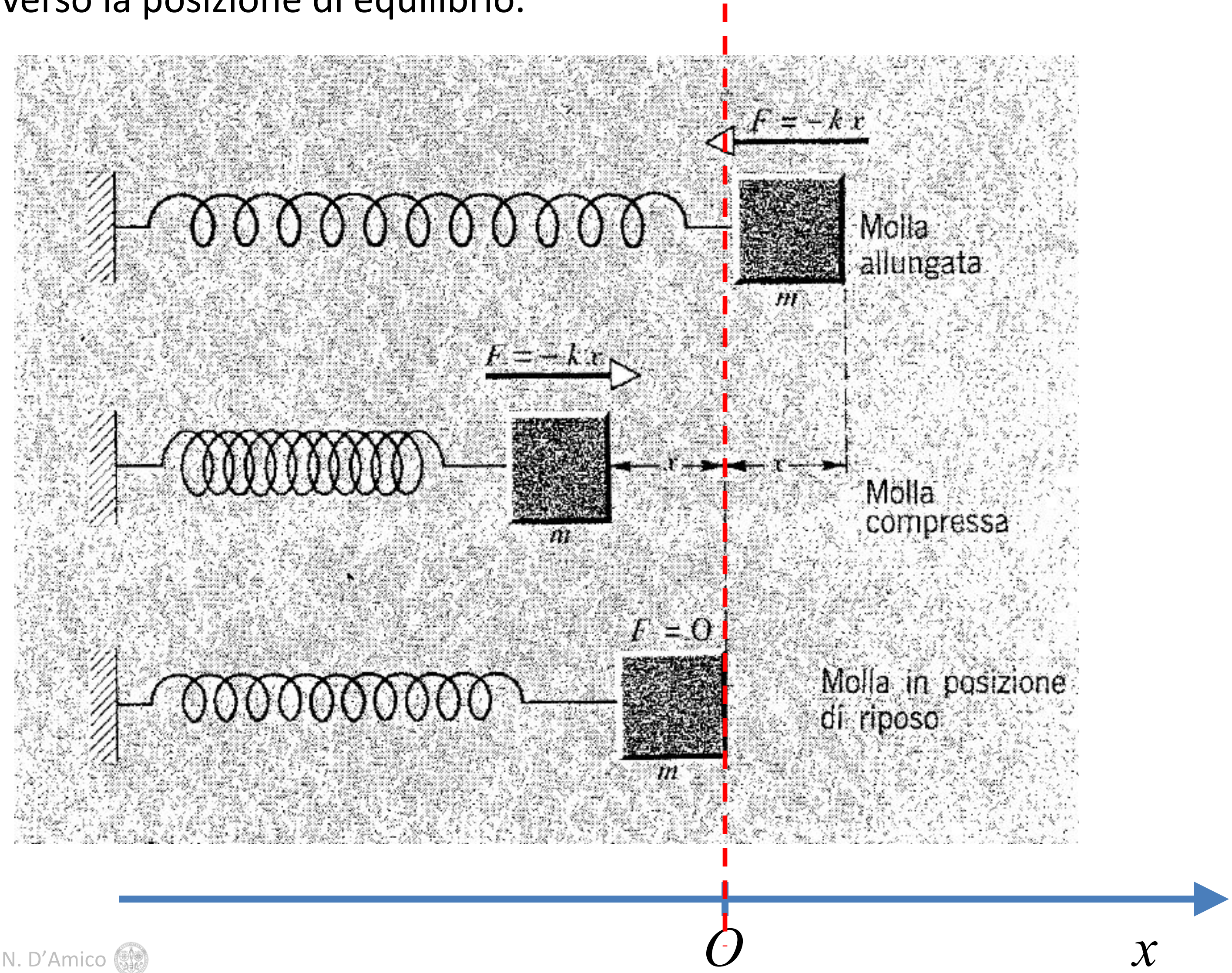
Se una particella vibra (oscilla) attorno ad una posizione di equilibrio sotto l'azione di una forza proporzionale alla elongazione, il suo **moto viene detto armonico**

Questa forza di richiamo è sempre diretta verso la posizione di equilibrio e dà origine al tipo più semplice di moto armonico

L'esempio classico di oscillatore armonico lo abbiamo già visitato ed è costituito da una massa m legata ad una molla priva di massa e di costante elastica k, disposta su un piano senza attrito. Supponendo che il moto avvenga lungo x e che la posizione di riposo coincida con l'origine O, quando la massa di trova su un punto di coordinata x la forza esercitata su di essa dalla molla è data dalla:

$$F = -kx$$

Ricordiamo che il segno negativo indica il fatto che se l'elongazione è nel verso positivo dell'asse x, la forza della molla agisce nel verso negativo, e viceversa, cioè la forza è diretta sempre verso la posizione di equilibrio.



Applichiamo la II Legge di Newton a questo sistema:

$$F = m\,a$$

per la forza F scriveremo:

$$F = -k\,x$$

e per l'accelerazione a scriveremo:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Quindi:

$$F = ma \quad \rightarrow \quad -k\,x = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + k\,x = 0$$

Questa equazione differenziale:

$$\boxed{m \frac{d^2x}{dt^2} + k\,x = 0}$$

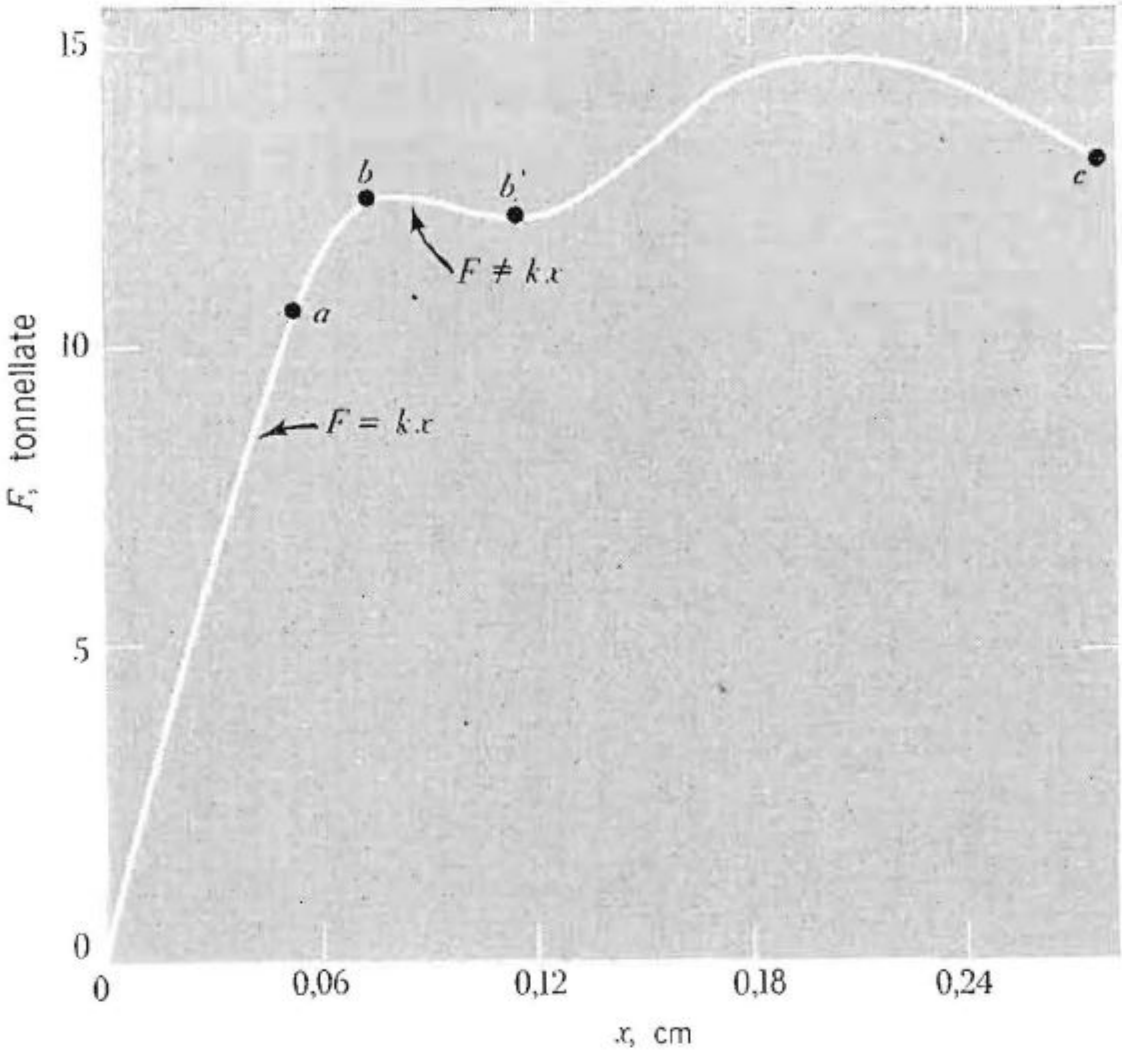
è l'equazione del moto di un oscillatore armonico.

Questa è una equazione di grande importanza in fisica, sia perché interviene in ogni problema connesso a vibrazioni meccaniche, sia perché un gran numero di fenomeni fisici sono governati da questa stessa equazione in acustica, in ottica nei circuiti elettrici, etc…

La legge di Hooke ha una sua formulazione generale, di cui il caso della molla è semplicemente un caso particolare:

Hooke: *Quando un solido viene deformato, esso si oppone alla deformazione con una forza proporzionale all’entità della deformazione stessa, purché questa non sia troppo grande*.

Quando questo limite (che dipende dalle caratteristiche di elasticità del solido) viene superato, si passa dal comportamento **elastico** al comportamento **plastico**: un corpo che subisce una deformazione elastica tende a riacquisire la sua forma, un corpo che subisce una deformazione plastica, rimane deformato.   Se su un corpo soggetto a deformazione plastica continua ad insistere una forza esterna superiore ad un certo limite, il corpo può andare incontro alla frattura definitiva.



Tipico grafico della forza applicata in funzione dell'allungamento x prodotto in una sbarra di alluminio sotto tensione. La sbarra era lunga circa 40 cm e aveva una sezione di 7 cm^2. Si noti che si può scrivere $F = k\,x$ solo per il tratto $O\,a$, poichè oltre questo punto la pendenza non è più costante ma varia in modo complicato con x. Il punto a si chiama *limite di elasticità*. Fra b e b' l'allungamento aumenta anche se la forza è costante; il materiale si comporta come un fluido viscoso. Oltre c il campione non si allunga più ma si spezza in due.

Nel caso unidimensionale, la **Legge di Hooke** si riduce come abbiamo già visto, alla semplice formula che abbiamo già visitato:

$$F = -k\,x$$

dove abbiamo visto che:

- x rappresenta la *deformazione*, cioè l'allungamento o la compressione rispetto alla *posizione non deformata*.
- F è la resistenza offerta dal solido
- k è la costante elastica del solido
- Il segno negativo tiene conto del fatto che F si oppone alla deformazione

Un **solido** deformato elasticamente possiede una certa energia potenziale U

data dalla relazione

$$U = \frac{1}{2}\, k\, x^2$$

Per il solido non deformato ($x = 0$) l'energia potenziale è minima e quindi $x = 0$

è una posizione di **equilibrio stabile**

La forza di richiamo e l'energia potenziale di un corpo elastico e di un oscillatore armonico sono esattamente le stesse (finché siamo nel limite di elasticità). Quindi un solido deformato elasticamente comincerà a vibrare esattamente come l'oscillatore armonico. Le corde vibranti, le vibrazioni sonore, le oscillazioni elettriche, manifestano lo stesso **moto armonico** e cioè sono descritte tutte dalle stesse equazioni dell'oscillatore armonico.

Nel caso esemplificativo del moto armonico, e cioè l'oscillatore armonico, k è la costante di elasticità della molla; in altri sistemi oscillanti k potrà essere connessa ad altre caratteristiche del sistema in esame, che vanno analizzate caso per caso.

L'oscillatore armonico *(cioè il sistema massa-molla) costituisce il nostro* ***prototipo*** *per lo studio del* ***moto armonico***

Il moto armonico

Adesso risolviamo quindi l'equazione:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + k\,x = 0$$

Questa è una equazione **differenziale**. Dobbiamo cioè trovare una funzione $x(t)$ che soddisfi a questa relazione.

Riscriviamola nella forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}\,x$$

Cioè: stiamo cercando una funzione $x(t)$ tale che la sua **derivata seconda** sia equale alla funzione stessa cambiata di segno, a parte un fattore moltiplicativo k/m

Dall'analisi matematica, sappiamo che le funzioni seno e coseno hanno questa proprietà, in particolare:

$$\frac{d}{dt}\cos t = -\sin t \quad \rightarrow \quad \frac{d^2}{dt^2}\cos t = \frac{d}{dt}(-\sin t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\cos t = -\cos t$$

Cioè: la derivata seconda di una funzione coseno è eguale alla funzione stessa cambiata di segno. Questa proprietà vale anche per la funzione seno.

Tenuto conto che la nostra equazione contiene un fattore costante, possiamo valutare come tentativo per la funzione che cerchiamo una funzione del tipo:

$$x(t) = A\, cos\, (\omega t + \delta)$$

E' interessante notare che una funzione coseno scritta in questa forma generale:

$$A \cos(\omega t + \delta)$$

rappresenta di fatto una generica combinazione lineare di funzioni seno e coseno e rappresenta quindi una soluzione del tutto generale.

<u>Infatti:</u>

$$\cos(\theta + \delta) = \cos\delta \cos\theta \ - \sin\delta \sin\theta \ = \ a\cos\theta + b\sin\theta$$

Generica combinazione lineare di funzioni seno e coseno

Consideriamo quindi la soluzione

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$$

e calcoliamone la derivata seconda:

$$\frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \delta)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \delta)$$

Introducendo la derivata seconda nell’equazione differenziale:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

abbiamo:

$$-\omega^2 A \cos(\omega t + \delta) = -\frac{k}{m} A \cos(\omega t + \delta)$$

In questa relazione:

$$-\omega^2 A\, cos\,(\omega t + \delta) \;=\; -\frac{k}{m} A\, cos\,(\omega t + \delta)$$

se scegliamo la costante ω in modo che sia:

$$\omega^2 = \; k\,/\,m$$

si ha un'identità, e cioè la funzione prescelta:

$$x\,(t) = A\, cos\,(\omega t + \delta)$$

è una soluzione dell'oscillatore armonico.

In tutto questo, A e δ risultano indeterminati, cioè qualsiasi coppia di valori di A e δ risulta in una possibile soluzione del moto dell'oscillatore armonico, che infatti presenta una grande **varietà di moti**. Quindi, $\boldsymbol{\omega}$ **è comune a tutti i moti permessi** per un dato oscillatore di **massa** $\boldsymbol{m}$ e **costante elastica** $\boldsymbol{k}$, mentre come vedremo A e δ dipendono di volta in volta dalla **condizioni iniziali** del moto.

Vediamo adesso di capire il <u>significato fisico della costante ω</u> :

Se nella funzione

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$$

il tempo t aumenta della quantità $\Delta t = 2\pi / \omega$ si ha:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta) \rightarrow x(t+\Delta t) = A\cos(\omega[t + 2\pi / \omega] + \delta)$$

$$= A\cos(\omega t + 2\pi + \delta) = A\cos(\omega t + \delta)$$

Cioè: la funzione si **ripete** identica dopo un tempo pari a $\Delta t = 2\pi / \omega$

Cioè: **$2\pi / \omega$ è il periodo T di ripetizione del moto,** e poiché si era posto $\omega^2 = k / m$

si ha:

$$T = 2\pi / \omega = 2\pi \sqrt{(m / k)}$$

Quindi: tutti i moti regolati dall'equazione

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

hanno lo **stesso periodo** di ripetizione T, che dipende **solo dalla massa** m **e dalla costante elastica** k secondo la

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

La **frequenza dell'oscillatore**, cioè il numero di vibrazioni compiute nell'unità di tempo è data dalla:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

E di conseguenza:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi / T$$

La quantità $\omega = 2\pi / T$ **è denominata frequenza angolare (o pulsazione)** e ha le dimensioni di una velocità angolare, quindi la sua **unità di misura** è il **radiante/sec**

La quantità A nella funzione $x\ (t) = A\ cos\ (\omega t + \delta)$ ha un semplice significato fisico: la funzione coseno assume valori fra −1 e 1. Quindi l'elongazione x ha il suo valore massimo proprio nel valore A. Cioè A **è l'ampiezza del moto** e poiché A non è determinata dalla equazione differenziale, né dai parametri del sistema (m e k), ma solo dalle **condizioni inziali**, un dato oscillatore può oscillare con varie ampiezze.

Cioè: il periodo di oscillazione di un oscillatore armonico **non** dipende dalla ampiezza del moto

La quantità $(\omega t + \delta)$ è denominata **fase del moto**. La costante δ è la **costante di fase**

Due moti di un dato oscillatore possono avere la stessa ampiezza e frequenza e costante di fase differente.

Riassumendo, in un oscillatore armonico:

Il periodo di ripetizione è determinato dai **parametri** dell'oscillatore (m e k)

L'ampiezza e la costante di fase del moto sono determinate dalle **condizioni iniziali** della particella oscillante (ampiezza dell'elongazione inziale e velocità iniziale)

Un aspetto caratteristico del moto armonico è la relazione fra l'**elongazione**, la **velocità** e l'**accelerazione** istantanee:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \delta)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \delta)$$

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \delta)$$