Lezione XXIII

(Composizione di moti armonici, Onde nei mezzi elastici:

Classificazione

Funzione propagazione delle Onde)

FRUIZIONE E UTILIZZO DEI MATERIALI DIDATTICI

- **E' vietata** la **copia**, la **rielaborazione**, la **riproduzione** dei contenuti e immagini presenti nelle lezioni in qualsiasi forma

- **E' inoltre vietata** la **diffusione**, la **redistribuzione** e la **pubblicazione** dei contenuti e immagini, incluse le registrazioni delle videolezioni con qualsiasi modalità e mezzo non autorizzati espressamente
dall'autore o da Unica

Relazione fra il moto armonico e il moto circolare uniforme

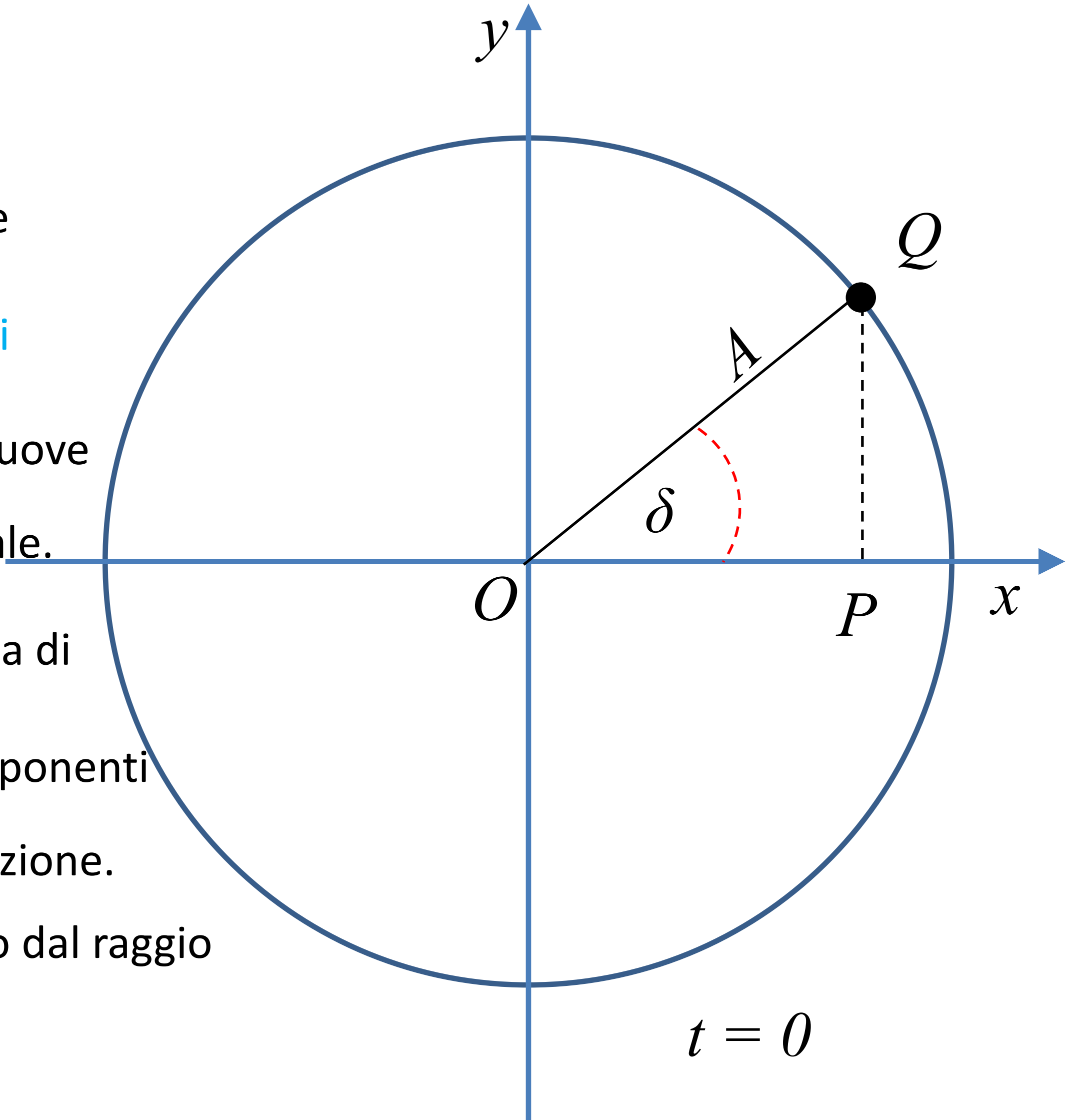
Vedremo adesso che c'è una interessante relazione fra il moto armonico **rettilineo** e il moto **circolare uniforme**. Inoltre, **il moto circolare uniforme è anche l'esempio di una composizione di moti armonici semplici**, un fenomeno che incontreremo spesso nello studio delle onde.

Si consideri un punto Q che si muove su di un cerchio di raggio A con velocità angolare costante ω rad /sec. Il punto P è la proiezione di Q sul diametro orizzontale, e cioè sull'asse delle x.

Chiameremo Q punto di riferimento e il cerchio su cui Q si muove «cerchio di riferimento». Mentre Q gira, P si muove avanti e indietro sul diametro orizzontale.

La coordinata x di P è sempre la stessa di quella di Q. Analogamente per le componenti orizzontali della velocità e dell'accelerazione.

Al tempo $t = 0$, sia δ l'angolo formato dal raggio OQ con l'asse x (angolo iniziale).



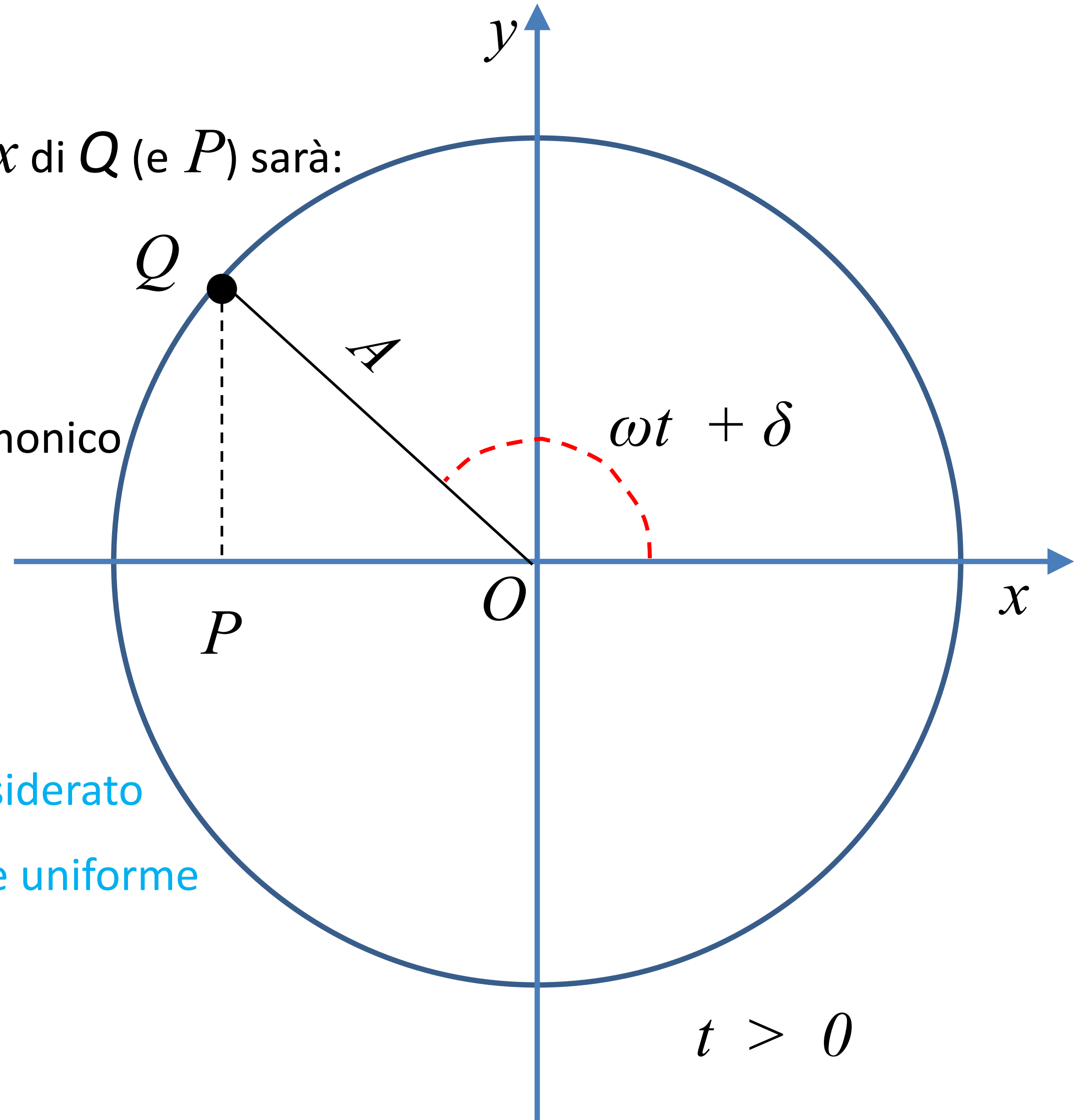
Poiché la velocità angolare ω è costante, ad ogni istante di tempo successivo, l'angolo

fra il raggio OQ e l'asse delle x sarà dato da $(\omega t + \delta)$

Pertanto, ad ogni istante la coordinata x di Q (e P) sarà:

$$x = A \cos (\omega t + \delta)$$

Quindi il punto P si muove di moto armonico



Cioè: il moto armonico può essere considerato

come la proiezione di un moto circolare uniforme

su di un diametro.

A seguito di questa definizione del moto armonico riferito al moto circolare uniforme si ha:

- La frequenza angolare ω di un moto armonico è la **velocità angolare** del **punto di riferimento**
- La frequenza del moto armonico equivale al numero di rivoluzioni nell'unità di tempo del punto di riferimento
- Quindi $f = \omega / 2\pi$, e di conseguenza $\omega = 2\pi f$
- Il tempo impiegato dal punto di riferimento a compiere una rivoluzione completa equivale al periodo T del moto armonico.
- Quindi $T = 2\pi / \omega$ ossia $\omega = 2\pi / T$
- L'ampiezza del moto armonico equivale al **raggio del cerchio di riferimento**
- La fase $(\omega t + \delta)$ del moto armonico corrisponde **all'angolo formato dal raggio rotante nel cerchio di riferimento**

Se avessimo considerato la proiezione y invece che la proiezione x avremmo ottenuto il seguente risultato:

$$y = A \sin(\omega t + \delta)$$

Si tratta nuovamente di moto armonico, che differisce dal precedente soltanto per la fase iniziale: $(\delta - \pi/2)$ invece di δ

Infatti: $A \cos(\omega t + \delta - \pi/2) = A [\cos(\omega t + \delta) \cos(-\pi/2) - \sin(\omega t + \delta) \sin(-\pi/2)] =$
$= A [0 - \sin(\omega t + \delta)(-1)] = A \sin(\omega t + \delta)$

E infatti il moto armonico può essere ottenuto come proiezione su un qualunque diametro del moto sul cerchio del punto di riferimento Q.

Inversamente, **il moto circolare uniforme può essere ottenuto come combinazione di due moti armonici**

Composizione di moti armonici

Vediamo allora il caso più generale di moti risultanti dalla combinazione di moti armonici fra loro ortogonali

In fisica occorre di frequente il caso in cui un moto sia la combinazione di due moti armonici rettilinei fra loro ortogonali, cioè la somma di due oscillazioni indipendenti

Ci soffermeremo adesso sul caso in cui le frequenze delle due vibrazioni sono le stesse:

$$x = A_x \cos\ (\omega t + \delta_x)$$

$$y = A_y \cos\ (\omega t + \delta_y)$$

Le due relazioni indicano due moti armonici ortogonali (uno lungo x e uno lungo y) aventi la stessa frequenza angolare ω ma diversa ampiezza e fase

Nel caso in cui anche le fasi iniziali δ_x e δ_y siano equali, è facile rendersi conto che il moto nel piano x-y è rettilineo. Infatti considerando le due equazioni:

$$x = A_x \cos\ (\omega t\ + \delta_0)$$

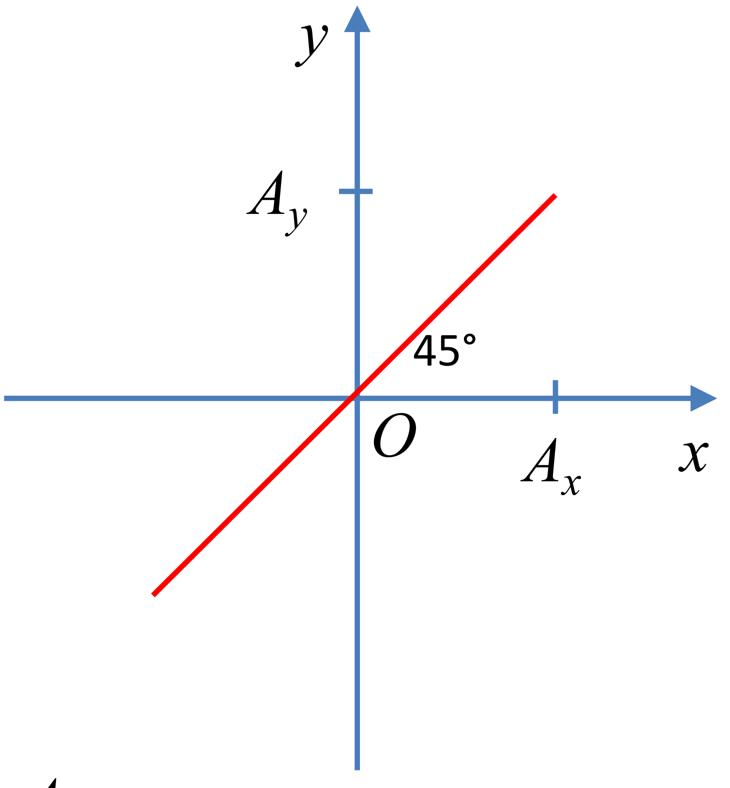
$$y = A_y\ \cos\ (\omega t\ + \delta_0)$$

e dividendole membro a membro, si ha:

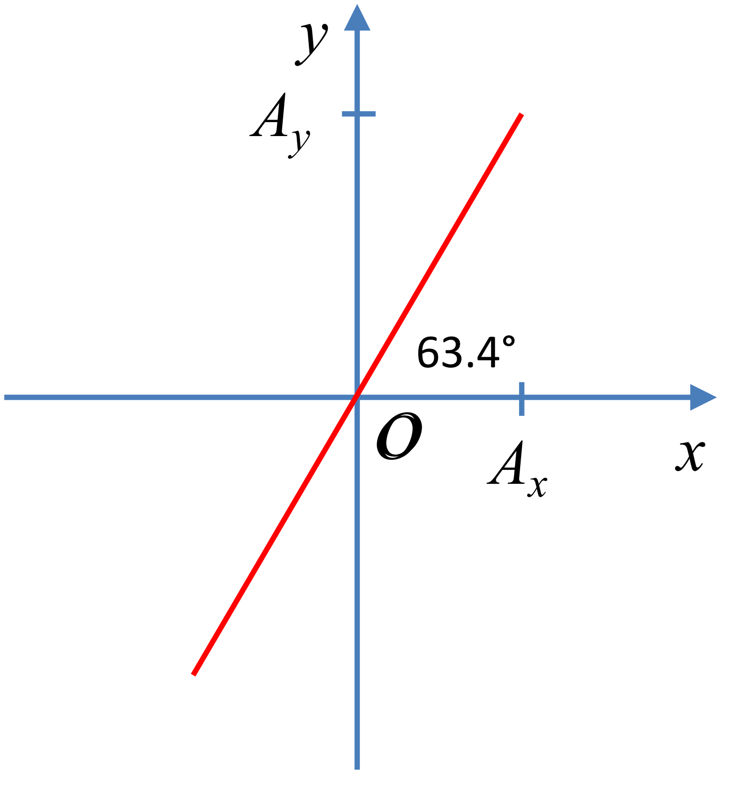
$$\frac{x}{y} = \frac{A_x}{A_y} \qquad \text{e cioè} \rightarrow \qquad y = \frac{A_y}{A_x} x$$

Questa è l'equazione di una retta nel piano x-y con pendenza A_y / A_x

Quindi per $\delta_x = \delta_y$ si hanno per esempio i seguenti moti:

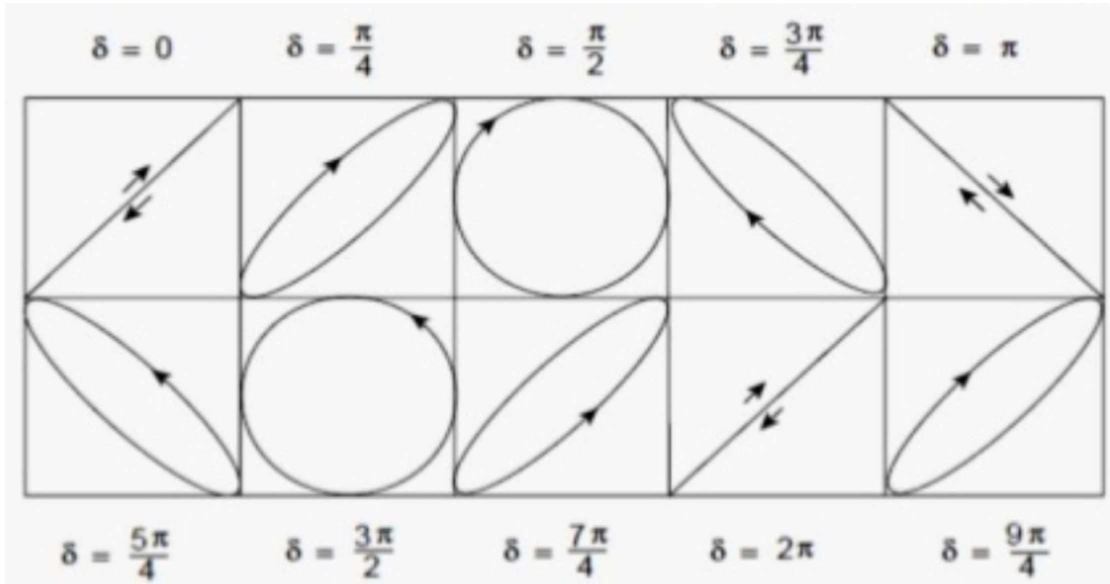


$$\frac{A_y}{A_x} = 1$$



$$\frac{A_y}{A_x} = 2$$

Se invece $\delta_x \neq \delta_y$ si avranno in generale dei moti ellittici. Posto $\delta_x - \delta_y = \delta$



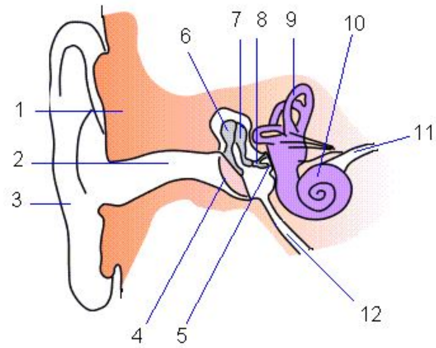
In questo caso l'orientazione dell'ellisse è data sempre dal rapporto $\dfrac{A_y}{A_x}$ mentre la differenza di fase determina il rapporto fra i due semiassi dell'ellisse: infatti anche un segmento è un caso particolare di ellisse «chiusa»

ONDE NEI MEZZI ELASTICI

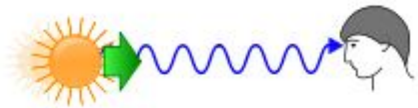
Il fenomeno ondulatorio si presenta in diversi campi della fisica.   A noi sono familiari per esempio le onde d’acqua:

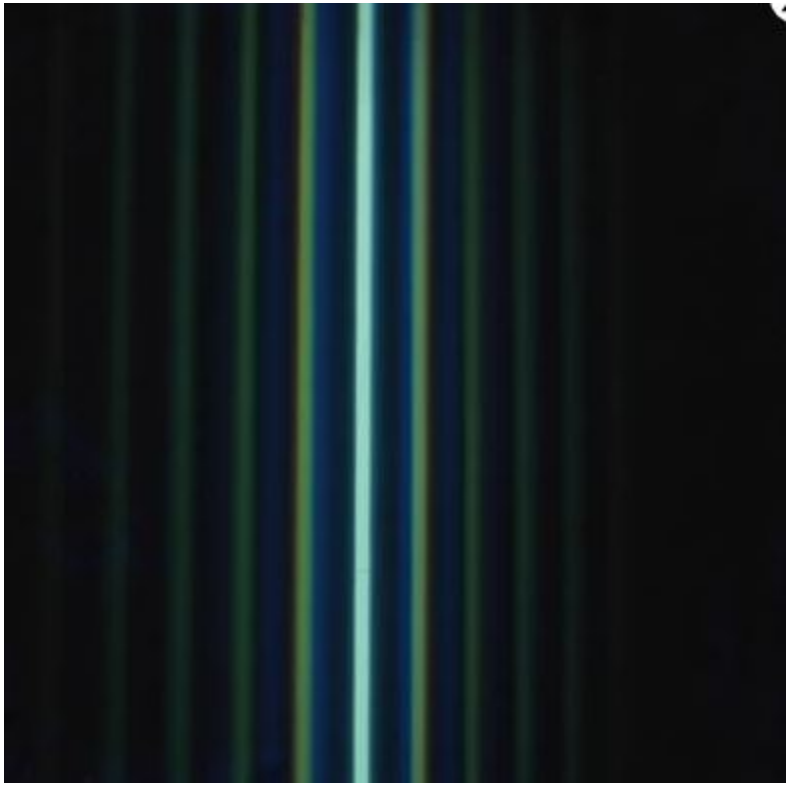
Ma ci sono altre onde che incontrerete nel corso dei vostri studi:

- **Le onde sonore**



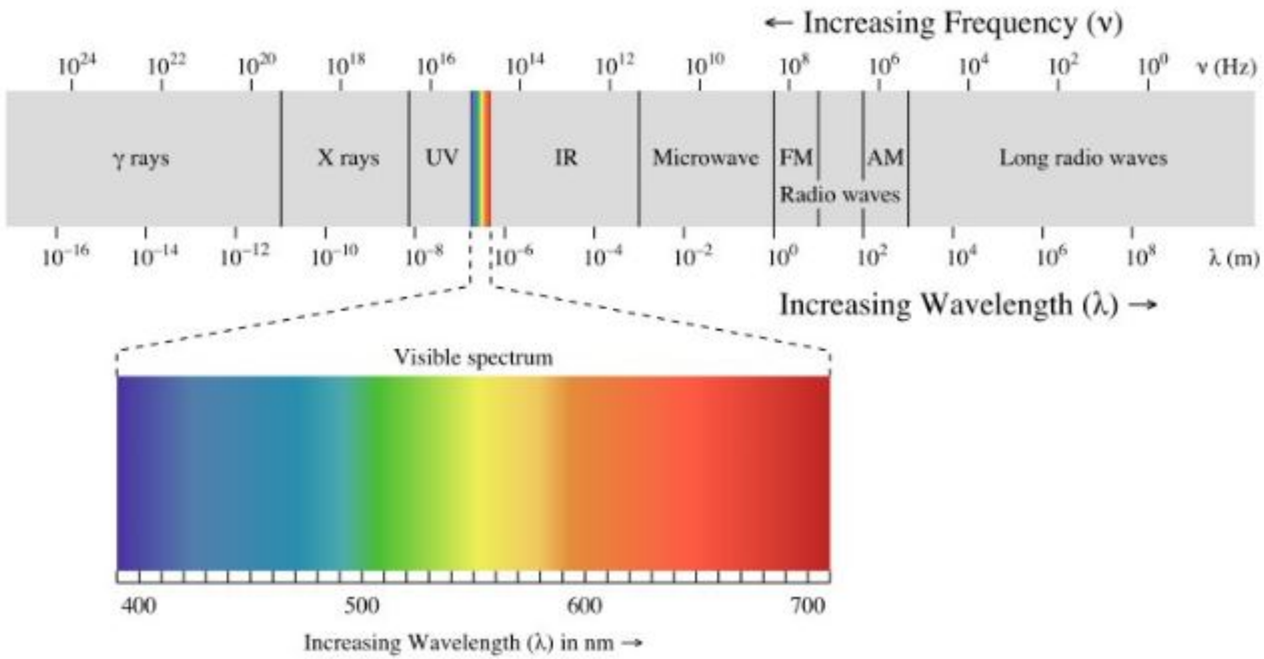
- **Le onde luminose**





Le onde radio

Altre onde elettromagnetiche



Quindi le proprietà e il comportamento delle onde sono di primaria importanza.

Onde nei mezzi deformabili elastici

(altresì note come **onde meccaniche**)

Sarà interessante notare che molto del formalismo e delle proprietà delle onde meccaniche si applicano a tutti i fenomeni ondosi e costituiscono quindi un'importante tappa dei vostri studi.

Infatti, studiando le **onde meccaniche**, parleremo di:

- Propagazione delle onde
- Sovrapposizione delle onde
- Interferenza delle onde
- Onde stazionarie
- Risonanza, etc…

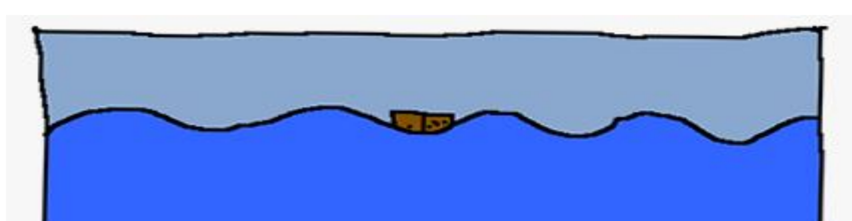
Tutti questi fenomeni sono comuni a tutti i fenomeni ondulatori

Le onde meccaniche hanno origine dallo spostamento (perturbazione) di una porzione del mezzo elastico dalla sua posizione normale, con successiva oscillazione attorno alla posizione di equilibrio.

A causa delle proprietà elastiche del mezzo, **la perturbazione si trasmette** (cioè «cammina») **nel mezzo stesso**. Quindi questa perturbazione o **ONDA SI PROPAGA** nel mezzo.

NOTA: Il mezzo nel suo insieme NON si muove: sono le varie parti del mezzo che **oscillano** entro limiti ristretti

E' interessante notare come un tappo di sughero sulle onde dell'acqua mette in evidenza il moto oscillatorio dell'acqua (in alto e in basso e avanti e indietro) mentre le onde si propagano: cioè le onde sono in grado di trasmettere energia: col moto ondulatorio si può trasmettere energia (e quindi informazione) a distanza.



E’ necessario che ci sia della materia per la trasmissione delle onde meccaniche, mentre per esempio le onde elettromagnetiche si propagano anche nel vuoto.

Il mezzo che trasmette l’onda meccanica deve avere inerzia (massa) ed elasticità.

Abbiamo già studiato il moto armonico: un sistema composto da una **molla e una massa** è composto sia di inerzia (la massa) che di elasticità (la molla). Tuttavia il suo **movimento oscillatorio (il moto armonico) NON è un moto ondulatorio**, in quanto **non si propaga**. Quindi NON si ha trasmissione di energia.

Il punto è che in questo caso l’ **inerzia e l’elasticità sono separate**. Nel caso di **onde meccaniche, inerzia e elasticità sono distribuite nel mezzo.**

Se una molla possiede anche inerzia (come nel caso reale), in essa possono avere luogo onde, e quindi in essa può avvenire trasporto di energia.

Classificazione delle onde

Dall'esame del movimento delle particelle materiali, rispetto alla direzione di propagazione delle onde, si possono distinguere e classificare diversi tipi di onde.

Onde Trasversali: se i movimenti trasmessi dall'onda alle particelle materiali sono diretti **ortogonalmente** alla direzione di propagazione dell'onda, si ha un'onda trasversale.

Per esempio, quando una fune elastica tesa orizzontalmente viene posta in oscillazione in su e in giù ad un estremo, lungo la corda si propaga un'onda trasversale: la perturbazione si sposta lungo la corda, mentre le particelle oscillano in direzione perpendicolare a quella di propagazione dell'onda.

Onde trasversali in una corda:

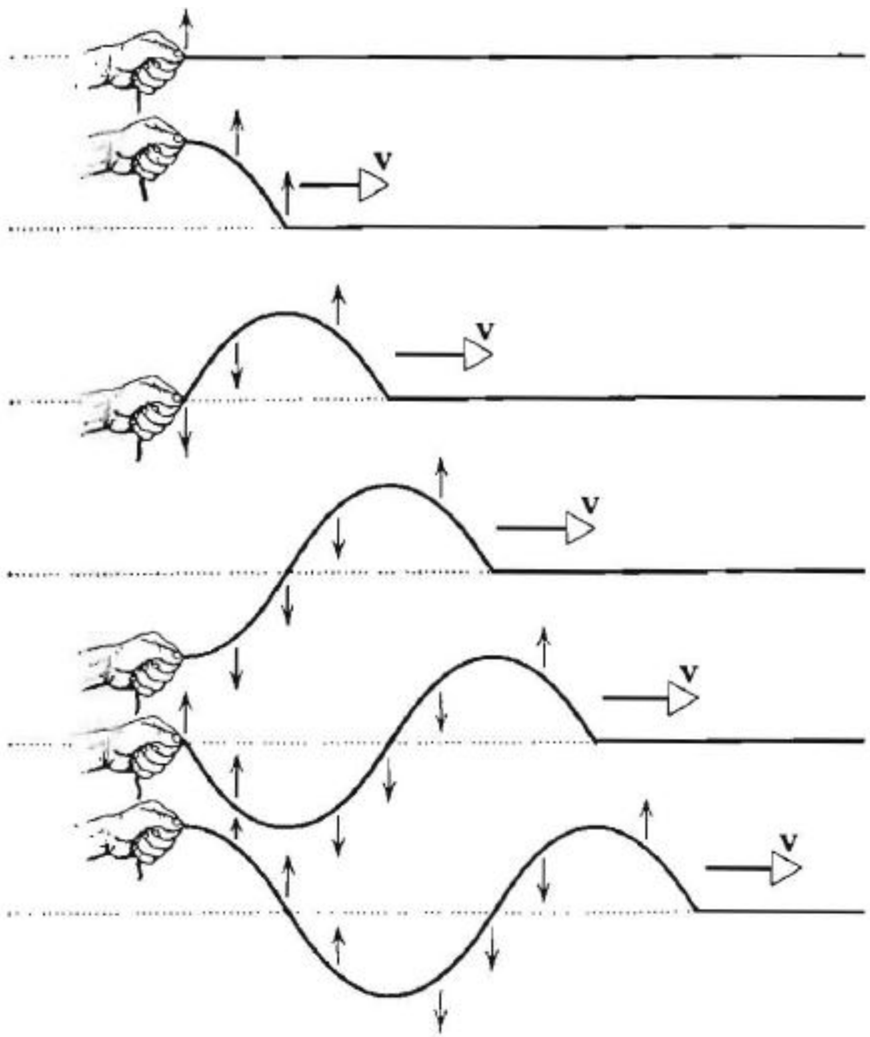
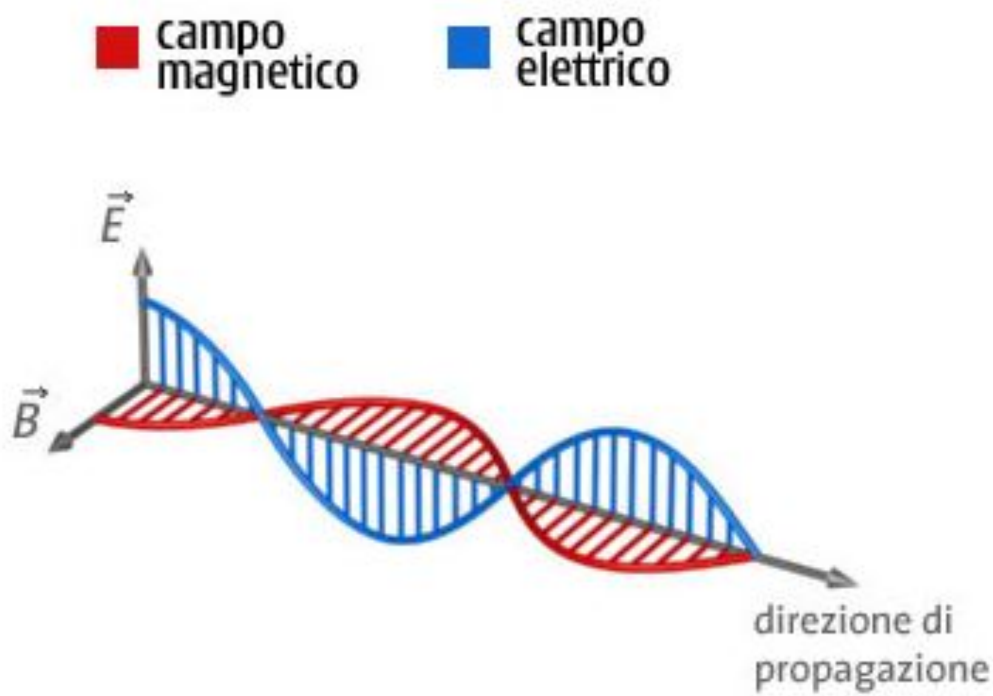


Fig. 19-1. – In un'onda trasversale le particelle del mezzo (corda) vibrano perpendicolarmente alla direzione di propagazione dell'onda.

Un altro esempio di onde trasversali sono le onde elettromagnetiche che però NON sono onde meccaniche: la perturbazione che si propaga NON è dovuta a oscillazioni di materia, ma ad oscillazioni del campo elettromagnetico. Poiché il campo elettrico e il campo magnetico di un’onda sono perpendicolari alla direzione di propagazione, si tratta di onde trasversali.



Onde longitudinali: se invece il movimento trasmesso alle particelle da un’onda meccanica avviene con **oscillazioni avanti e indietro lungo la direzione di propagazione** della perturbazione, allora siamo in presenza di un’onda longitudinale.

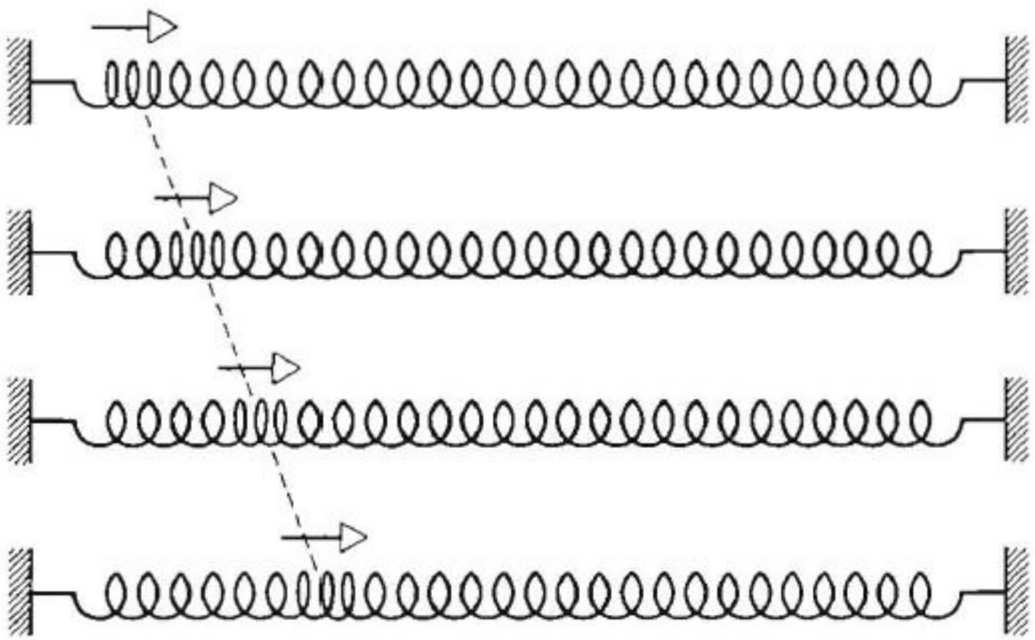
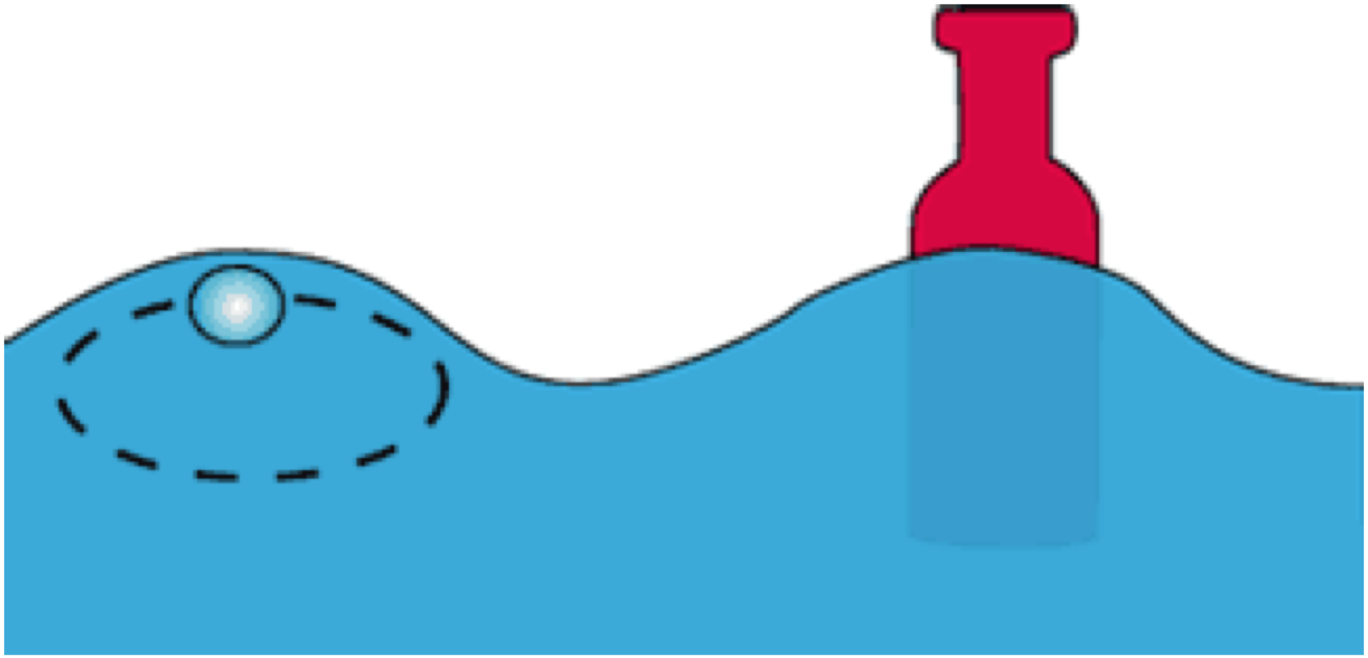


Fig. 19-2. – In un’onda longitudinale le particelle del mezzo (molla) vibrano nella stessa direzione di propagazione dell’onda. Si noti l’impulso di compressione che si sposta verso destra con velocità uniforme.

Onde né puramente trasversali né puramente longitudinali

Alcune onde non sono né puramente trasversali né puramente longitudinali. Per esempio, nel moto ondoso dell'acqua, le particelle d'acqua non solo si muovono verso l'alto e il basso, ma anche in avanti e indietro, **descrivendo delle ellissi**.



Classificazione delle onde in base alle dimensioni del mezzo

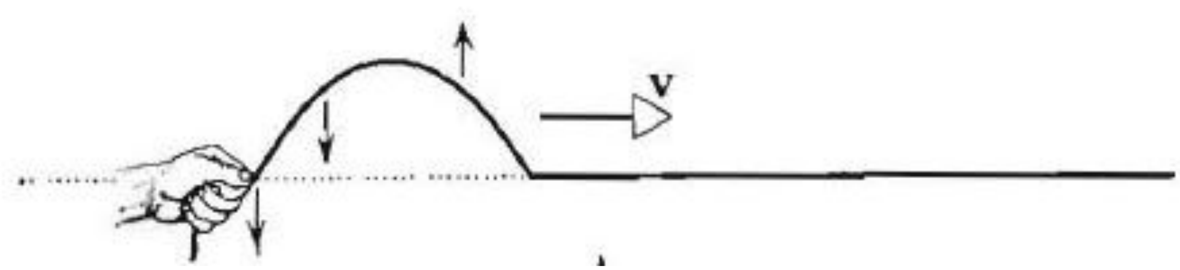
Le onde in generale potranno essere mono-bi-tridimensionali a secondo delle dimensioni del mezzo di propagazione.

- Le onde che si propagano in una fune o in una molla sono **unidimensionali**
- Le onde superficiali, per esempio sulla superficie dell'acqua sono **bidimensionali**
- Le onde sonore e le onde luminose sono **tridimensionali**

Singoli impulsi e treni d'onda

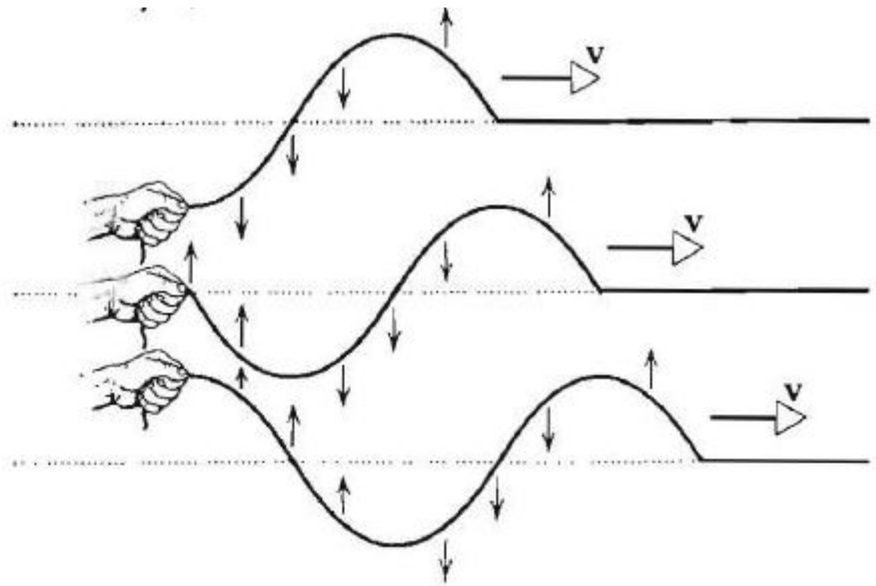
Le onde inoltre possono essere classificate in base al comportamento nel tempo di una data particella del mezzo in cui si propaga l'onda.

Per esempio, noi possiamo produrre un **impulso**, ossia una singola onda, che si propaga lungo una corda tesa, applicando un semplice movimento alla sua estremità



In questo caso, **ciascuna particella** del mezzo, una volta interessata dalla perturbazione impulsiva, si muove **in su e in giù <u>una sola volta</u>**.

Se invece seguitiamo a muovere in su e in giù l’estremità della corda, generiamo **un treno d’onde**, e se il nostro movimento è periodico generiamo un **treno d’onde periodico**.

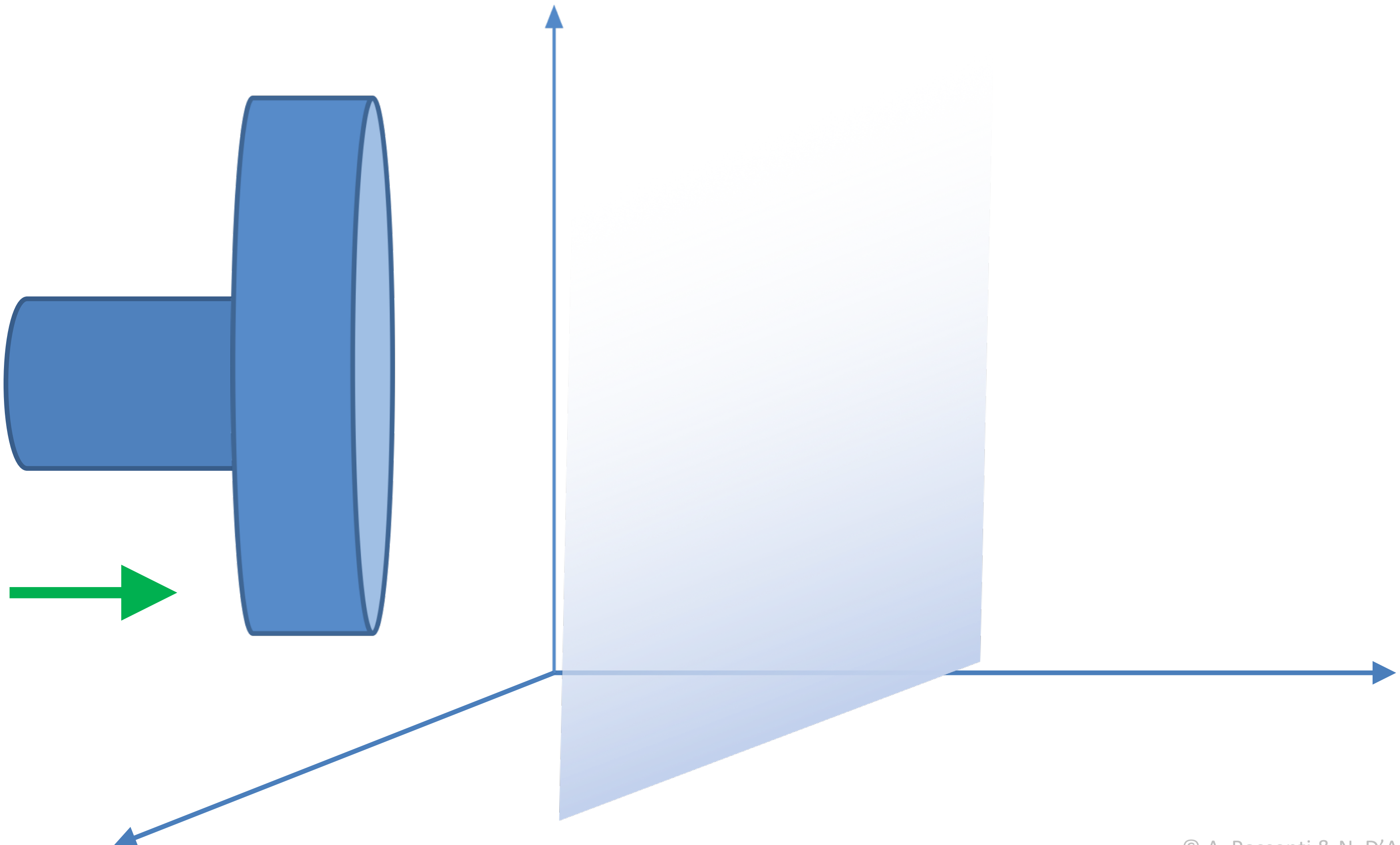


In questo caso **ciascuna particella** del mezzo si muove **su e giù di continuo**.

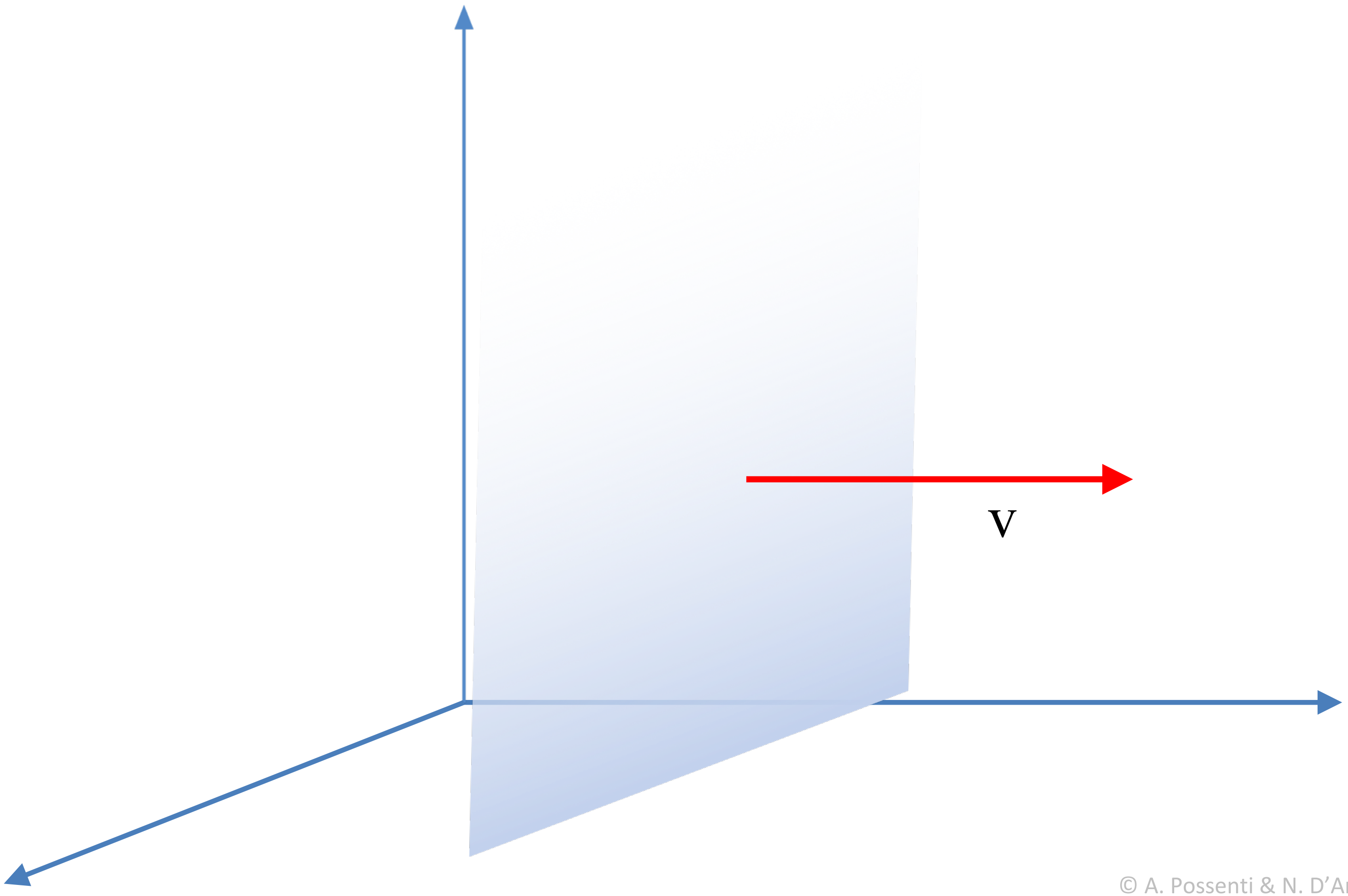
Onde piane e onde sferiche

Consideriamo un impulso in uno spazio tridimensionale. Per esempio un impulso di pressione generato nell'aria, o in generale in un fluido, da un gigantesco stantuffo.

Consideriamo un impulso in uno spazio tridimensionale. Per esempio un impulso di pressione generato nell'aria ,o in generale in un fluido, da un gigantesco stantuffo.

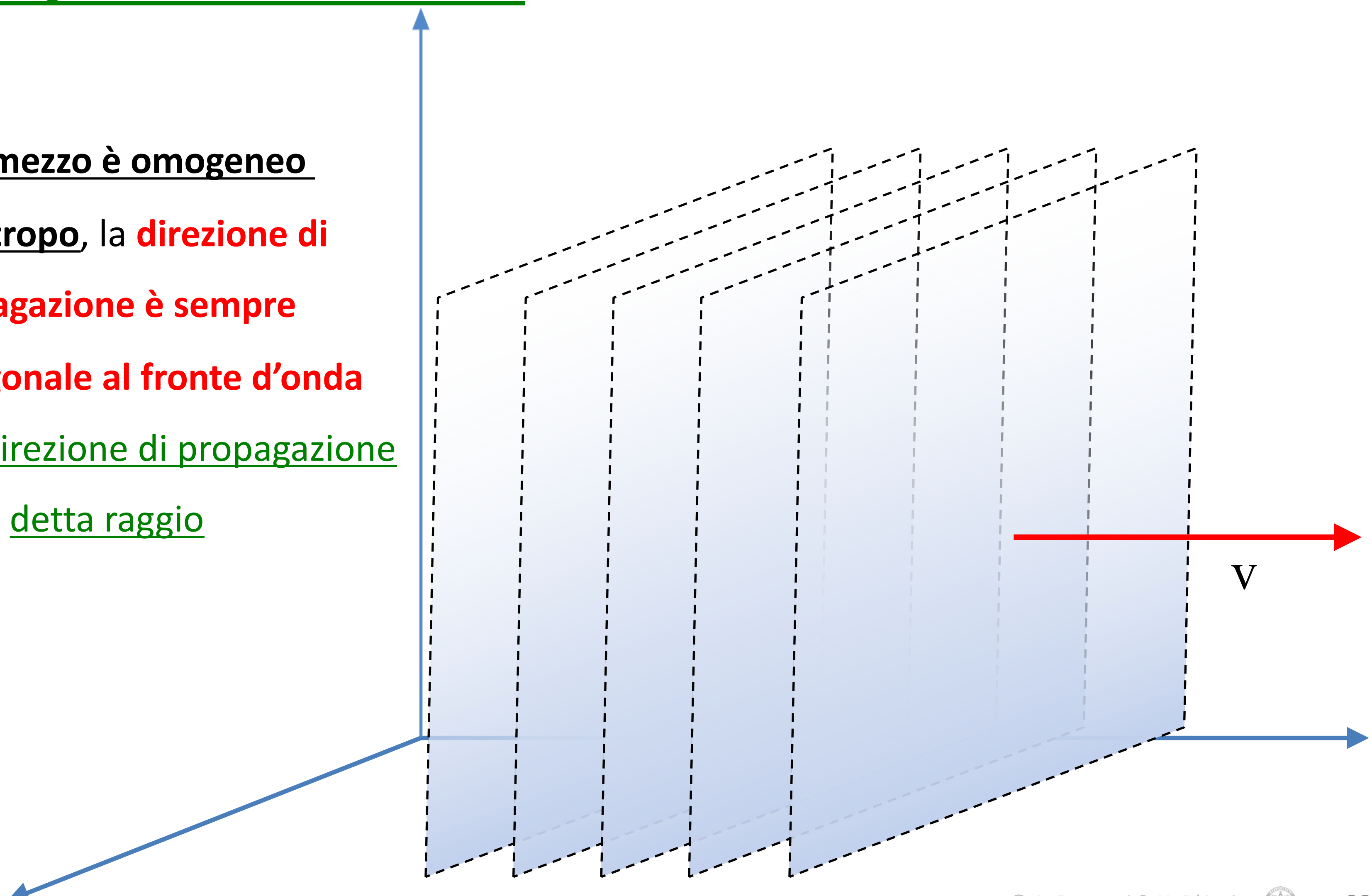


Nella slide precedente abbiamo individuato la superfice composta da tutti i punti sottoposti, ad un certo istante, alla stessa perturbazione. Al passare del tempo la superfice si sposta, mostrando in sostanza come si **propaga** nel mezzo la perturbazione, ad una certa velocità V.



Possiamo generalizzare l'idea al caso di **un'onda periodica**, considerando **le superfici** i cui punti, durante il moto di propagazione hanno la **stessa fase**. Queste superfici vengono dette **fronti d'onda**.

Se **il mezzo è omogeneo e isotropo**, la **direzione di propagazione è sempre ortogonale al fronte d'onda** e la direzione di propagazione viene detta raggio



I fronti d'onda possono avere forme diverse. Se la perturbazione si propaga in **una direzione**, le onde prendono il nome di **onde piane**.

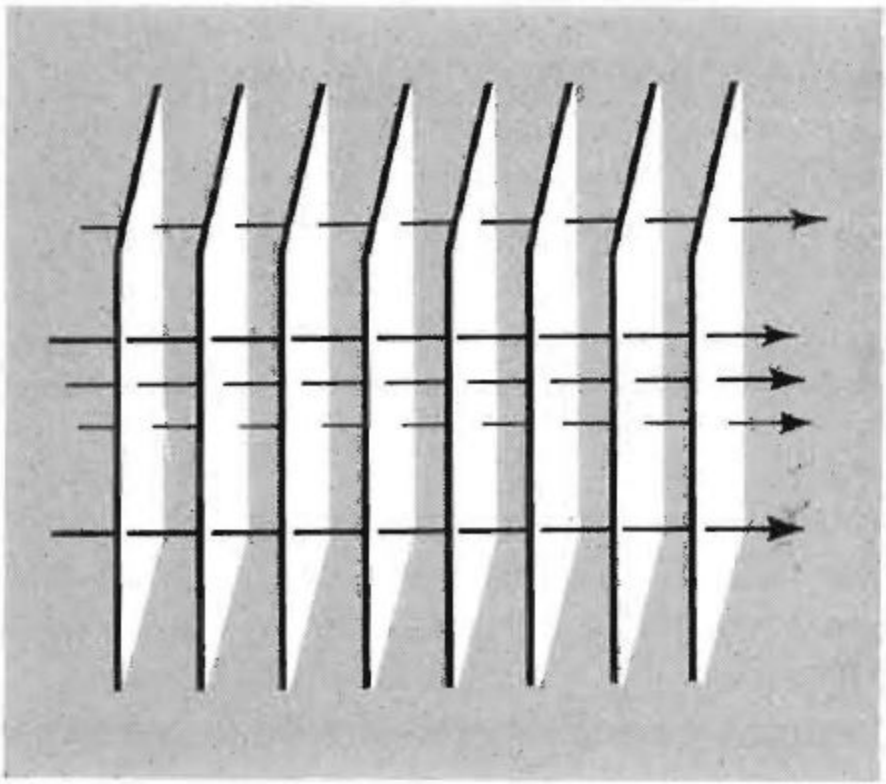


Fig. 19-3. – Un'onda piana. I piani raffigurano i fronti d'onda, distanziati di una lunghezza d'onda, e le frecce indicano i raggi.

Se la perturbazione si propaga in **tutte le direzioni** a partire da un punto, che è la sorgente delle onde, si hanno delle **onde sferiche**. Soltanto lontano dalla sorgente le onde sferiche hanno una piccola curvatura e possono essere considerate onde piane

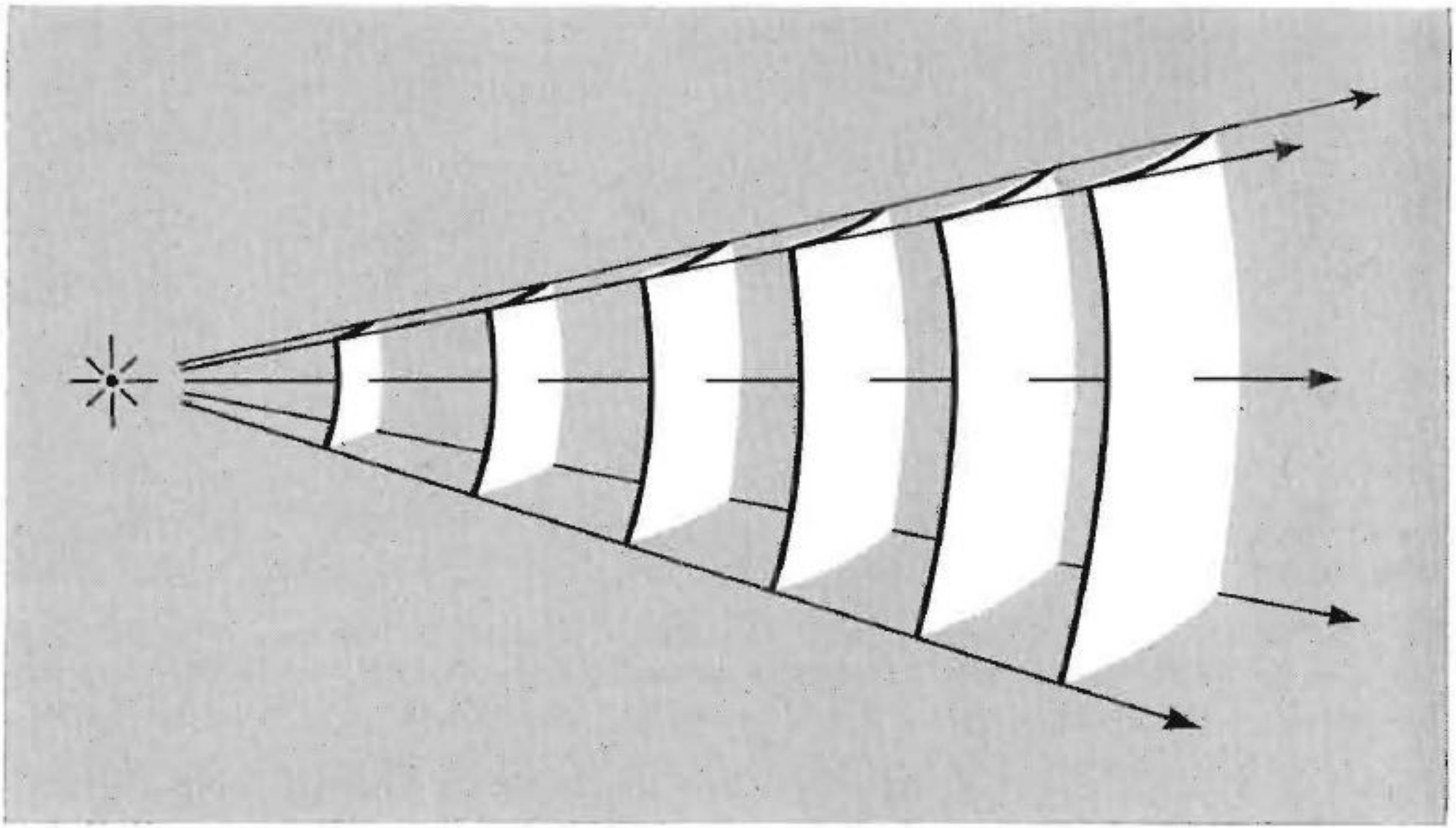


Fig. 19-4. – Un'onda sferica. I raggi escono radialmente ed i fronti d'onda, distanziati di una lunghezza d'onda, formano dei gusci sferici. Tuttavia a grande distanza dalla sorgente, piccole zone dei fronti d'onda sono quasi piane.

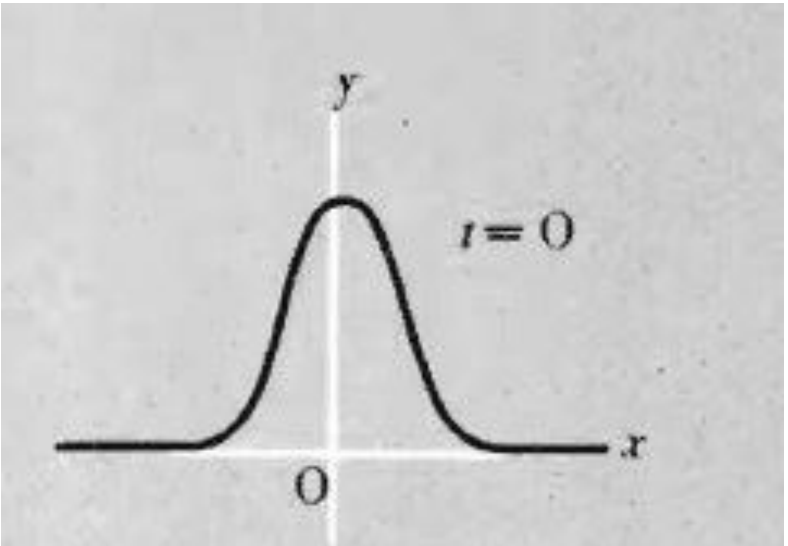
Equazione delle Onde

Propagazione delle onde

Consideriamo una corda tesa nella direzione dell'asse delle x, lungo la quale si propaga un'onda. Ad un certo istante, per esempio a $t = 0$, la forma della corda può essere rappresentata da una certa funzione y di x, come se gli avessimo fatto una foto:

$$y = f(x)$$

dove y è lo spostamento trasversale in funzione di x al tempo t



Al passare del tempo, l'onda si propaga lungo la corda, quindi lungo l'asse x, **senza cambiare forma**. Ad un dato istante t l'onda ha percorso un tragitto $\mathrm{v}\, t$, dove v è appunto la velocità dell'onda.

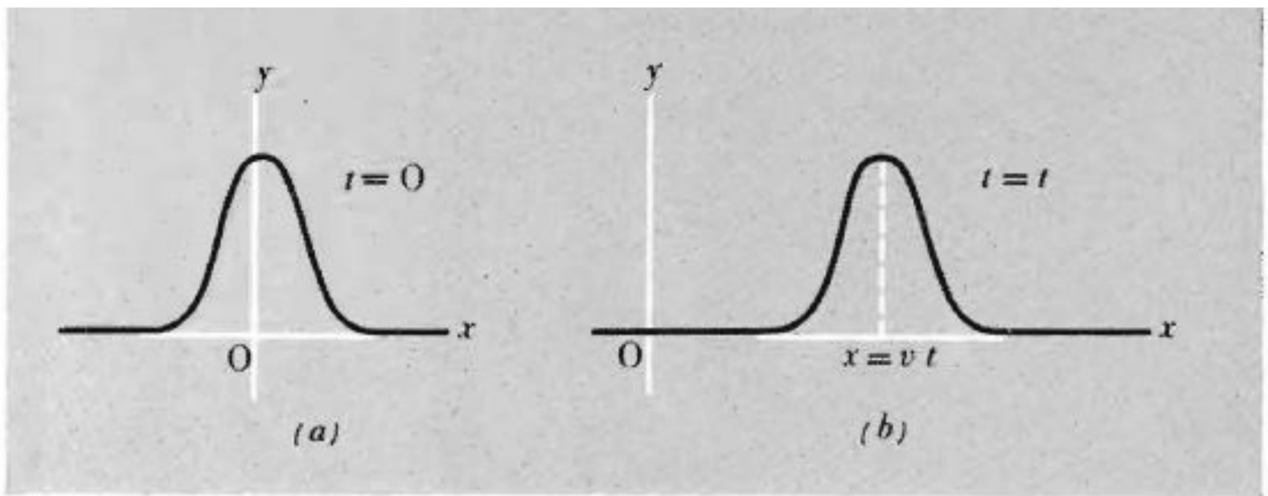


Fig. 19-5. (*a*) La forma di una corda (nella quale è stato prodotto un impulso) al tempo $t = 0$. (*b*) Al tempo $t > 0$, l'impulso si è propagato verso destra di $x = v\,t$.

.

Quindi l’equazione della curva al tempo t è data dalla:

$$y = f\,(x - \mathrm{v}\;t)$$

Questa equazione, al punto $x = \mathrm{v}\;t$ e all’istante t ci da la stessa forma d’onda che avevamo nel punto $x = 0$ al tempo $t = 0$.

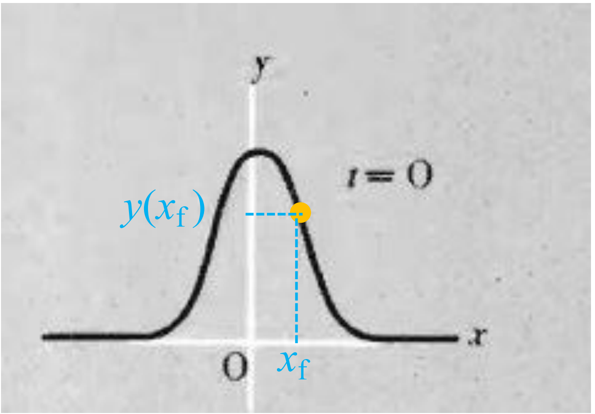
Questa è l’equazione di un’onda che si propaga verso **destra,** cioè nel verso delle x crescenti.

Invece l’equazione

$$y = f\,(x + \mathrm{v}\;t)$$

rappresenta un’onda che si propaga verso **sinistra**

Ogni particolare parte dell'onda (nel disegno ad esempio il punto ●) è denominata **fase**.



La velocità dell'onda così come l'abbiamo definita è allora la **velocità di fase**

Infatti, considerata una certa prefissata fase, risulta che, ad ogni tempo, per quella specifica fase dell'onda, deve valere:

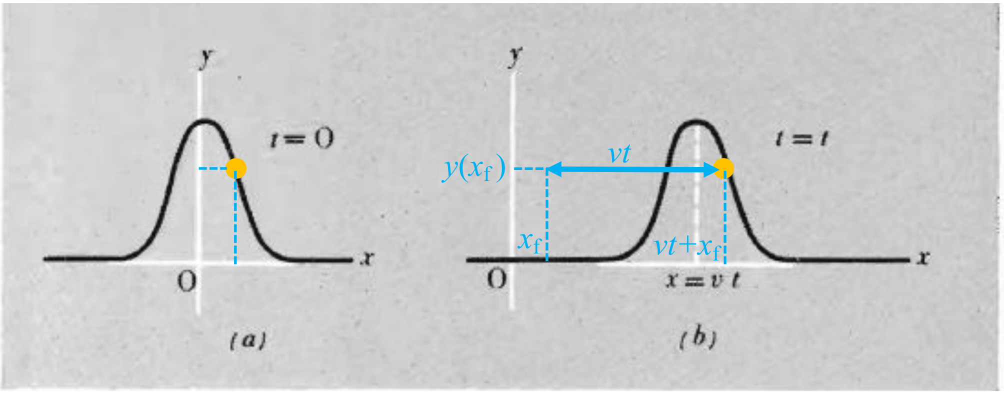
$$x - \mathrm{v}\, t = \text{costante}$$

differenziando si ottiene:

$$dx - \mathrm{v}\, dt = 0$$

e cioè:

$$dx / dt = \mathrm{v}$$



La velocità di fase è la velocità del punto ● e di ogni altro punto equivalente

Quindi **V** è proprio la **velocità della fase assegnata** dell'onda