

# Lezione XXIV

(Onde nei mezzi elastici:  
Equazione delle Onde,  
Potenza trasmessa,  
Principio di sovrapposizione)



## FRUIZIONE E UTILIZZO DEI MATERIALI DIDATTICI

- ➔ **E' vietata** la **copia**, la **rielaborazione**, la **riproduzione** dei contenuti e immagini presenti nelle lezioni in qualsiasi forma
- ➔ **E' inoltre vietata** la **diffusione**, la **redistribuzione** e la **pubblicazione** dei contenuti e immagini, incluse le registrazioni delle videolezioni con qualsiasi modalità e mezzo non autorizzati espressamente dall'autore o da Unica

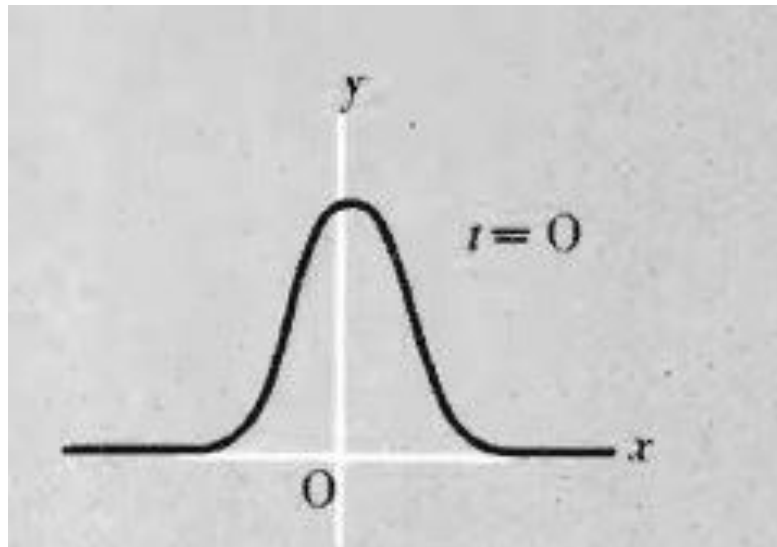
# Equazione delle Onde

# Propagazione delle onde

Consideriamo una corda tesa nella direzione dell'asse delle  $x$ , lungo la quale si propaga un'onda. Ad un certo istante, per esempio a  $t = 0$ , la forma della corda può essere rappresentata da una certa funzione  $y$  di  $x$ , come se gli avessimo fatto una foto:

$$y = f(x)$$

dove  $y$  è lo spostamento trasversale in funzione di  $x$  al tempo  $t$



Al passare del tempo, l'onda si propaga lungo la corda, quindi lungo l'asse  $x$ , **senza cambiare forma**. Ad un dato istante  $t$  l'onda ha percorso un tragitto  $V t$ , dove  $V$  è appunto la velocità dell'onda.

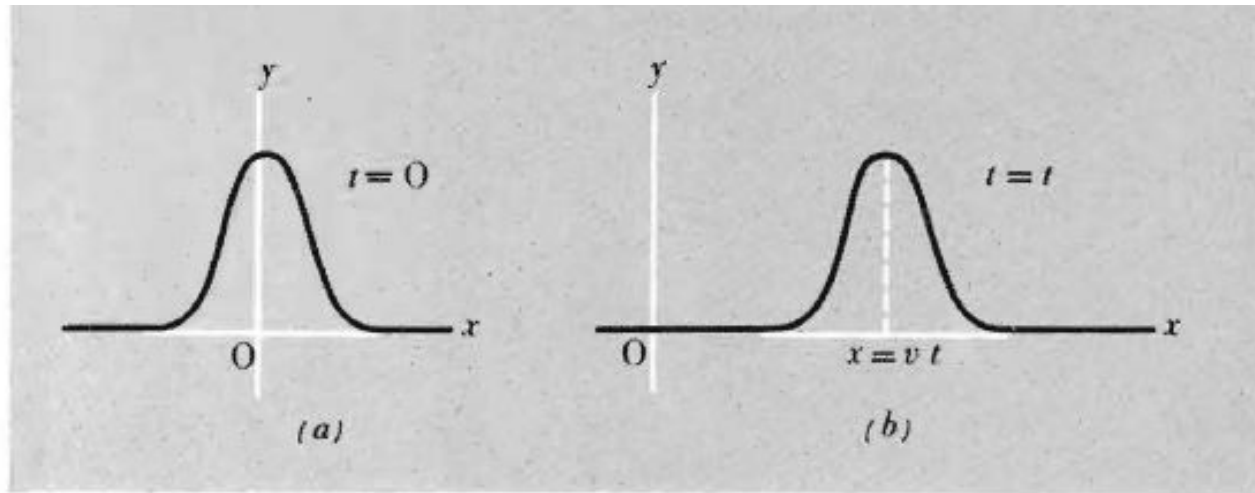


Fig. 19-5. (a) La forma di una corda (nella quale è stato prodotto un impulso) al tempo  $t = 0$ .  
(b) Al tempo  $t > 0$ , l'impulso si è propagato verso destra di  $x = vt$ .

Quindi l'equazione della curva al tempo  $t$  è data dalla:

$$y = f(x - v t)$$

Questa equazione, al punto  $x = v t$  e all'istante  $t$  ci da la stessa forma d'onda che avevamo nel punto  $x = 0$  al tempo  $t = 0$ .

Questa è l'equazione di un'onda che **si propaga verso destra**, cioè nel verso delle  $x$  crescenti.

Invece l'equazione

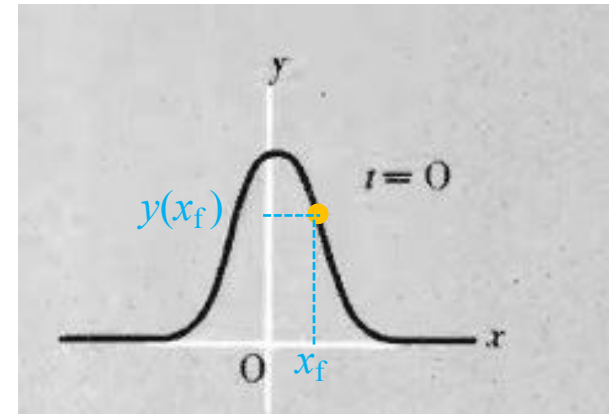
$$y = f(x + v t)$$

rappresenta un'onda che **si propaga verso sinistra**

Ogni particolare parte dell'onda (nel disegno ad esempio il punto ●) è denominata **fase**.

La velocità dell'onda così come l'abbiamo definita è

allora la **velocità di fase**



Infatti, considerata una certa prefissata fase, risulta che, ad ogni tempo, per quella specifica fase dell'onda, deve valere:

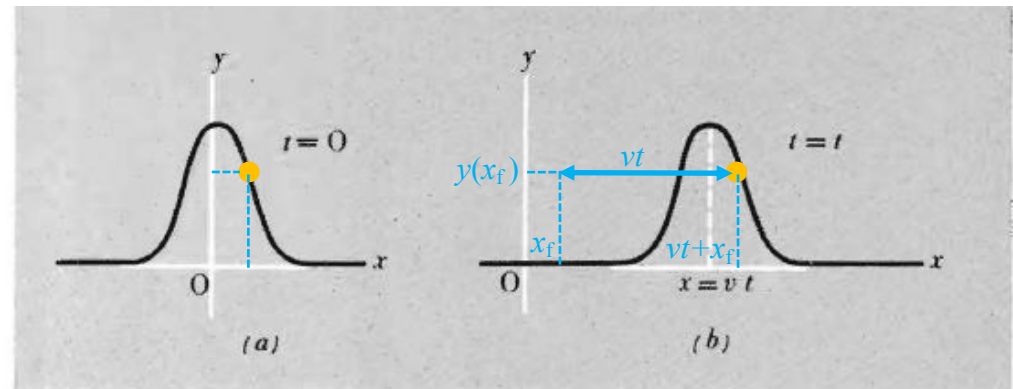
$$x - \mathbf{v} t = \text{costante}$$

differenziando si ottiene:

$$dx - \mathbf{v} dt = 0$$

e cioè:

$$dx / dt = \mathbf{v}$$



*La velocità di fase è la velocità del punto ● e di ogni altro punto equivalente*

Quindi  $\mathbf{v}$  è proprio la **velocità della fase assegnata** dell'onda

## Sul significato dell'equazione d'onda:

- Per un dato valore di  $t$ , l'equazione d'onda  $y = f(x - v t)$  ci dà  $y$  in funzione di  $x$ ,  
cioè ci fornisce una **fotografia della forma del mezzo all'istante  $t$**
- Per un dato valore di  $x$ , l'equazione d'onda  $y = f(x - v t)$  ci dà  $y$  in funzione di  $t$ ,  
cioè descrive **come varia nel tempo il mezzo in quel punto**.

Adesso prenderemo in considerazione **una particolare forma d'onda**, che come vedremo nel seguito ha una notevole importanza. Supponiamo che al tempo  $t$  si abbia in una fune un treno d'onda descritto dalla relazione:

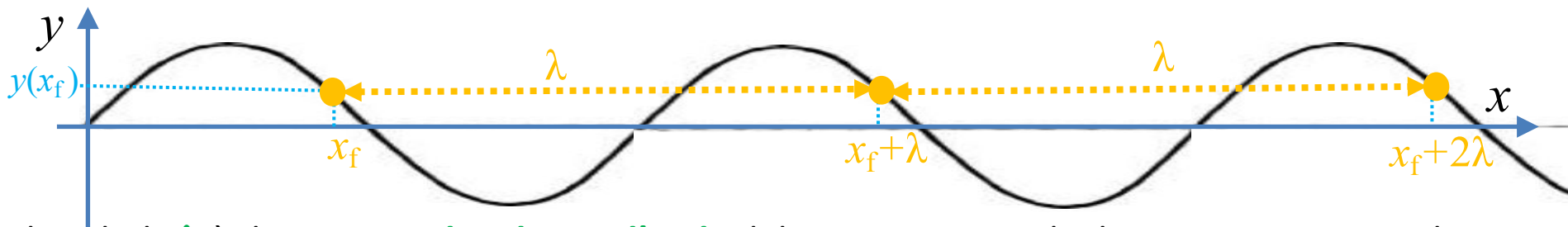
$$y(x) = y_m \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right)$$

**Notiamo che:**

La **forma** dell'onda è una **sinusoide**.

Lo spostamento massimo  $y_m$  dà l'**ampiezza** della sinusoide.

Lo spostamento trasversale  $y(x_f)$  in un dato punto  $x_f$  è lo stesso come in  $x_f + \lambda$ ,  $x_f + 2\lambda$ , etc..



Il simbolo  $\lambda$  è denominato **lunghezza d'onda** del treno e misura la distanza minima tra due punti dell'onda aventi **la stessa fase**.

Supponiamo che al passare del tempo, l'onda viaggi verso destra con una velocità di fase  $V$ .

Quindi l'equazione d'onda al tempo  $t$  risulta essere:

$$y(x,t) = y_m \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right)$$

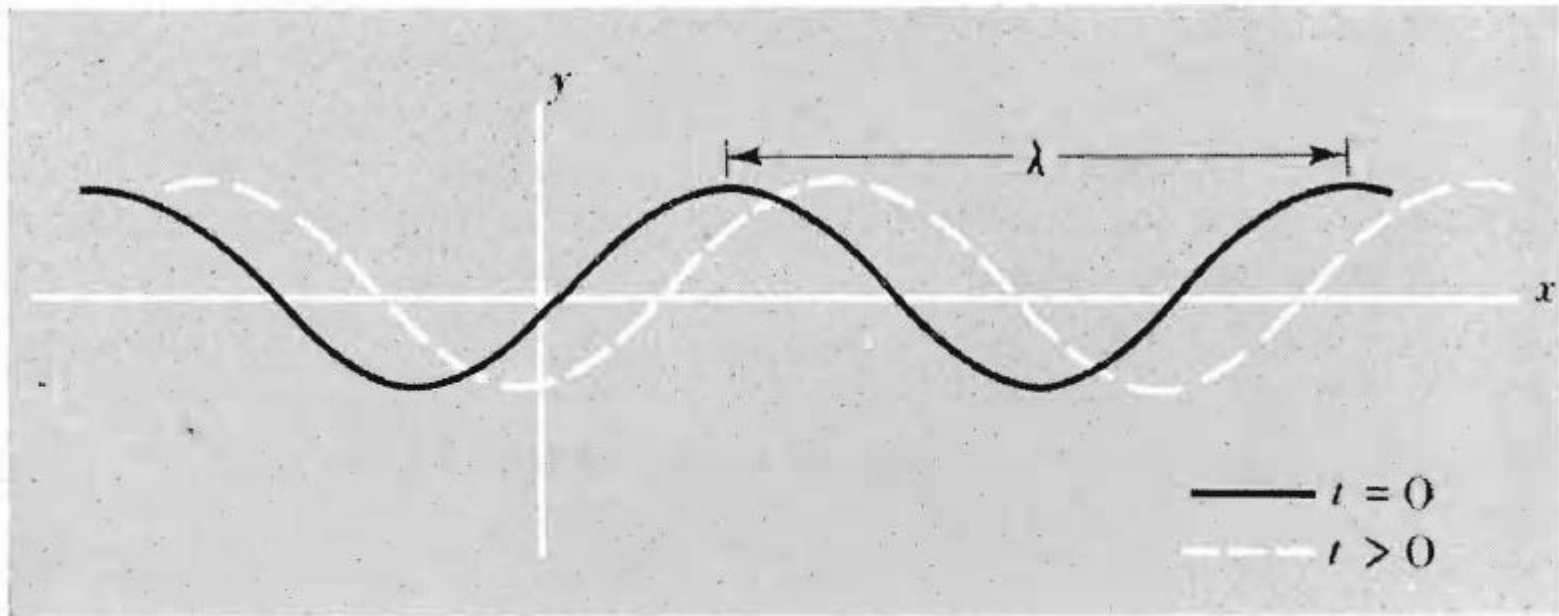


Fig. 19-6. - Al tempo  $t = 0$  la corda ha una forma data da  $y = y_m \sin 2\pi x/\lambda$  (linea a tratto continuo). Negli istanti successivi l'onda sinusoidale si è spostata verso destra di un tratto  $x = vt$ , e la corda ha una forma data da  $y = y_m \sin 2\pi(x - vt)/\lambda$ .

Il periodo  $t=T$  è il tempo necessario ad una qualsiasi generica fase dell'onda per percorrere la distanza di **una lunghezza d'onda  $\lambda$**  alla velocità di fase  $v$ .

Risulta quindi:

$$\lambda = v T$$

Ponendo questa espressione nell'equazione d'onda, si ottiene:

$$y(x,t) = y_m \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - v t)$$

$$y(x,t) = y_m \sin 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{vt}{\lambda} \right)$$

$$y(x,t) = y_m \sin 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{vt}{vT} \right)$$

$$y(x,t) = y_m \sin 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right)$$

Notiamo la **simmetria** che presenta questa equazione d'onda fra  $x$  e  $\lambda$  e fra  $t$  e  $T$  :

$$y(x,t) = y_m \sin 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right)$$

- In un qualunque istante  $t$ , la  $y$  ha lo stesso valore in:  $x, x + \lambda, x + 2\lambda, \dots$
- In una qualsiasi posizione  $x$ , la  $y$  ha lo stesso valore in:  $t, t + T, t + 2T, \dots$

Daremo a questa equazione una **forma più sintetica** definendo due parametri:

- Il **numero d'onda**

$$k = 2\pi / \lambda$$

- La **frequenza angolare**

$$\omega = 2\pi / T$$

$$y(x,t) = y_m \sin (kx - \omega t)$$

Confrontando la definizione dei due parametri

- Il numero d'onda  $k = 2\pi / \lambda$
- La frequenza angolare  $\omega = 2\pi / T$

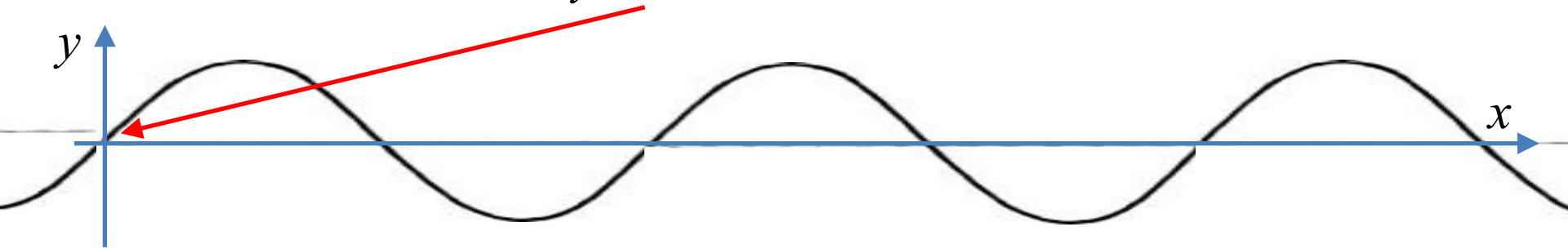
con la:

$$\lambda = v T$$

noteremo che per la **velocità di fase  $V$**  valgono equivalentemente le due relazioni:

$$v = \lambda / T = \omega / k$$

Nella scrittura di queste equazioni abbiamo implicitamente supposto che al tempo  $t = 0$  e in  $x = 0$ , lo spostamento in  $y$  sia zero.



Ovviamente non è sempre detto che sia così. In effetti **l'espressione generale per un treno d'onda di forma sinusoidale che si propaga verso destra** è:

$$y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t - \psi)$$

Dove  $\psi$  è denominato **angolo di fase**. E' interessante notare **che in un qualsiasi punto  $x_p$  l'equazione del moto  $y(t)$  è l'equazione di un moto armonico di periodo  $T = 2\pi/\omega$**

$$y(t) = y(x_p, t) = A_m \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{ove: } A_m = -y_m \quad \text{e} \quad \varphi = -kx_p + \psi$$

# Parametri fisici che determinano la velocità di fase dell'onda

Riprendiamo in esame l'equazione generale di un'onda:

$$y(x, t) = f(x - vt)$$

Il parametro  $v$  è il valore (costante) con cui l'onda si propaga nel mezzo.

Consideriamo ancora una volta un'onda trasversale che si propaga in una corda: si verifica **sperimentalmente** che la velocità dell'onda **dipende** solo **dalla tensione  $F$**  **che si esercita sulla corda** e dal parametro  $\mu$  della corda, definito come la **massa dell'unità di lunghezza della corda**.

Adottando questo fatto sperimentale, useremo adesso l'analisi dimensionale per determinare con quale relazione funzionale la velocità dipende da queste grandezze.

Ricordando che  $F = m a$ , in termini di dimensioni della massa, e dell'accelerazione, le dimensioni della forza sono:

$$[ F ] = [ M L T^{-2} ]$$

Dove:

$[ F ]$  → dimensioni della forza

$[ M ]$  → dimensioni della massa

$[ L T^{-2} ]$  → dimensioni dell'accelerazione (lunghezza, inverso del tempo al quadrato)

D'altra parte le dimensioni di  $[ \mu ]$  sono  $[ M L^{-1} ]$

la combinazione di  $[ F ]$  e  $[ \mu ]$  deve produrre le dimensioni di una velocità  $[ L T^{-1} ]$

L'unica soluzione è estrarre la radice quadrata del rapporto  $F/\mu$

Infatti le dimensioni del rapporto  $F/\mu$  sono:

$$[M L T^{-2}] / [M L^{-1}] \rightarrow [L^2 T^{-2}]$$

e di conseguenza le dimensioni della radice quadrata saranno:

$$[L T^{-1}]$$

Queste sono appunto le dimensioni di una velocità.

La relazione funzionale fra la velocità  $V$  e le due variabili in questione dovrà essere quindi:

$$V \text{ proporzionale a } \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Gli esperimenti dimostrano che la costante di proporzionalità vale 1, quindi risulta che la velocità di fase di un'onda trasversale che si propaga in una corda è:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

## Quindi:

- mentre la frequenza di un'onda è determinata dalla frequenza della sorgente
- la velocità di propagazione dipende dalle proprietà del mezzo (nell'esempio che abbiamo considerato dalla densità e dall'elasticità).

Una volta determinata la frequenza  $f$  e la velocità  $v$ , la lunghezza d'onda  $\lambda$  rimane determinata dalla relazione:

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

# Potenza e intensità nel moto ondulatorio

E' facile intuire che la potenza (o flusso di energia nell'unità di tempo) non è costante in quanto varia la potenza immessa dalla sorgente.

Quando l'energia fluisce dalla sorgente nella corda, essa si accumula in ogni elemento infinitesimo della corda **alternativamente** sotto forma di **energia cinetica** e **energia potenziale**

E' utile considerare la potenza media  $\langle P \rangle$  immessa (per esempio nella corda) in un periodo  $T$

Si dimostra che **la potenza media  $\langle P \rangle$**  obbedisce alla seguente relazione:

$$\langle P \rangle = 2 \pi^2 y_m^2 f^2 \mu v$$

La potenza trasmessa attraverso una superficie unitaria ortogonale alla direzione di propagazione è definita **intensità  $I$**  dell'onda

# Il principio di sovrapposizione

Si osserva che in molti casi **due o più onde che si propagano in un mezzo possono passare nello stesso punto agendo indipendentemente l'una dall'altra.**

Per esempio nel caso del suono, noi siamo in grado di distinguere note musicali provenienti da diversi strumenti.

Nel caso delle onde luminose, siamo in grado di vedere un oggetto, sebbene l'onda in questione si propaga in uno spazio percorso da altre onde luminose.

Il fatto che le onde in uno stesso mezzo agiscano indipendentemente l'una dall'altra significa che lo spostamento di una particella ad un dato istante è la somma degli spostamenti che le singole onde gli conferirebbero agendo da sole.

**Questo processo di somma vettoriale degli spostamenti di una particella è denominato sovrapposizione**

Per le onde in un mezzo deformabile, il principio di sovrapposizione è valido quando la relazione fra la deformazione e la forza di richiamo è di semplice proporzionalità.

Tale relazione è espressa matematicamente da una relazione lineare

Il principio di sovrapposizione si applica anche alle onde elettromagnetiche, data la relazione lineare fra campo elettrico e campo magnetico.

Il principio di sovrapposizione **NON è più valido quando le equazioni** che descrivono il movimento ondulatorio **non sono lineari**. Questo per esempio si può verificare quando la perturbazione ondulatoria è molto grande.

Ad esempio, oltre il limite elastico la legge di Hooke non è più valida e la relazione lineare  $F = -kx$  non è più valida.

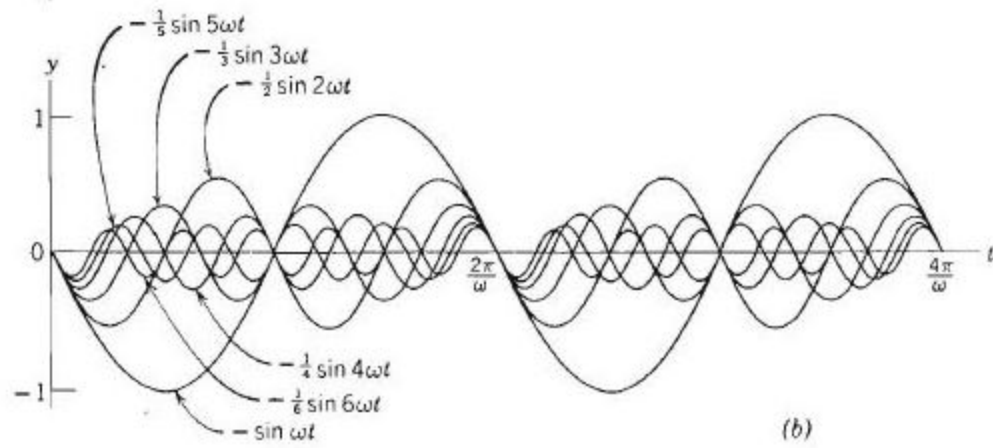
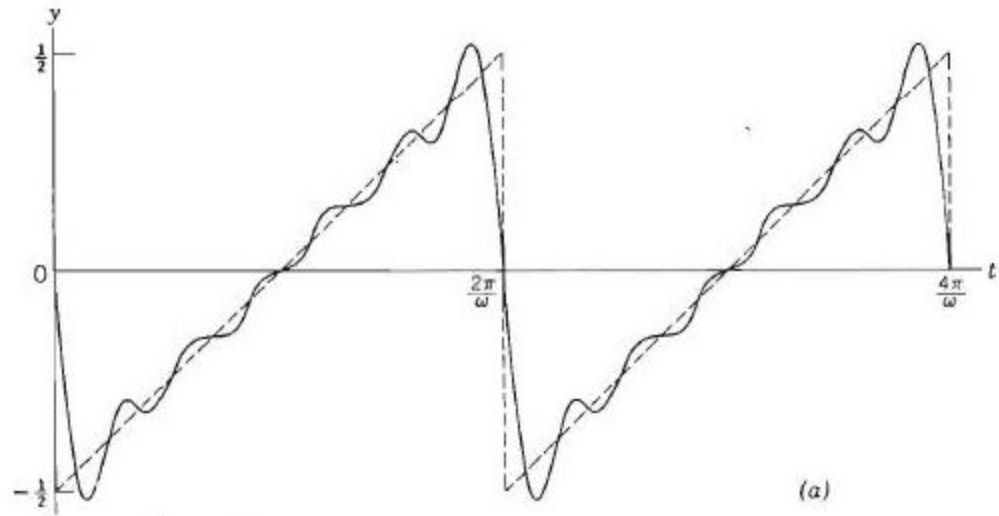
Il principio di sovrapposizione è molto importante in quanto consente di analizzare un **complicato moto ondulatorio** come **combinazione di onde componenti semplici**.

In particolare, come fu dimostrato dal matematico Fourier, **qualsiasi forma di onda periodica** può essere costruita **come somma di componenti armoniche**, cioè sinusoidali.

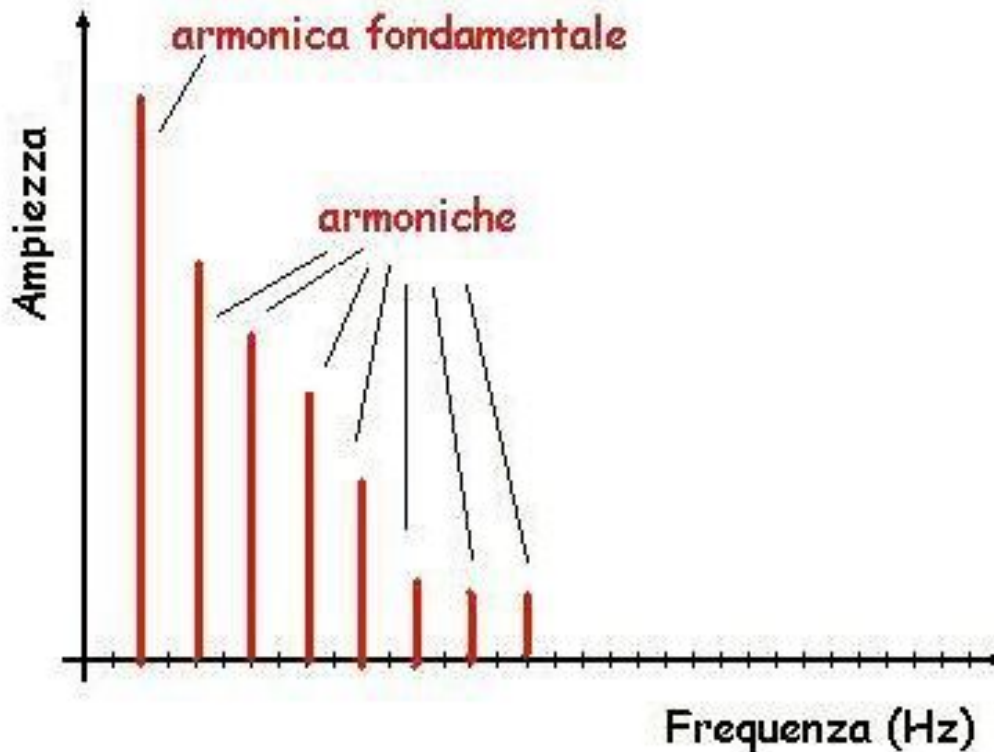
La somma di queste componenti sinusoidali, detta **Serie di Fourier**, per esempio per una generica funzione periodica  $y(t)$  di periodo  $T$  ha in generale la seguente forma:

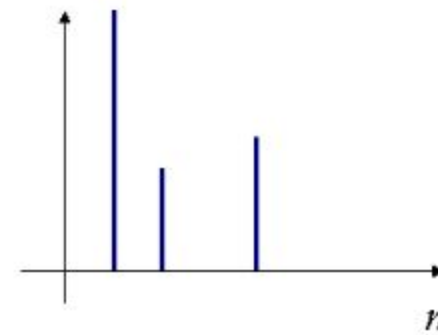
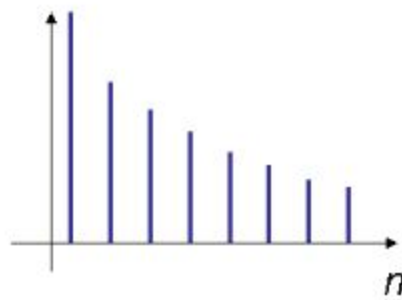
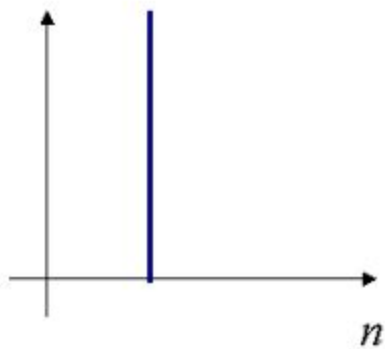
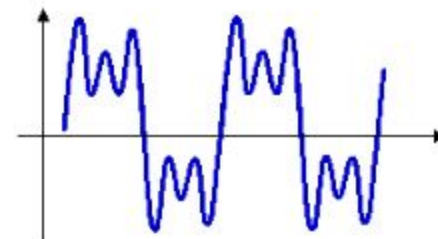
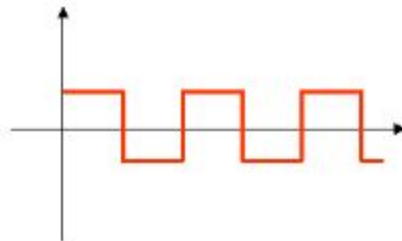
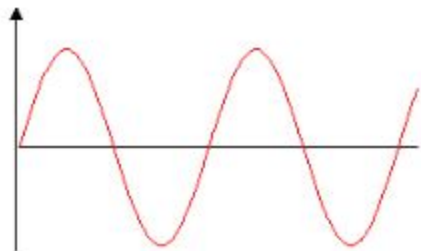
$$y(t) = A_0 + A_1 \sin(\omega t) + A_2 \sin(2\omega t) + \dots + A_N \sin(N\omega t) + B_1 \cos(\omega t) + B_2 \cos(2\omega t) + \dots + B_N \cos(N\omega t)$$

dove  $\omega = 2\pi/T$



In certi casi può essere interessante fare una analisi del contenuto armonico di una data onda periodica di forma generica, cioè fare un istogramma dell'ampiezza delle varie **componenti armoniche**.



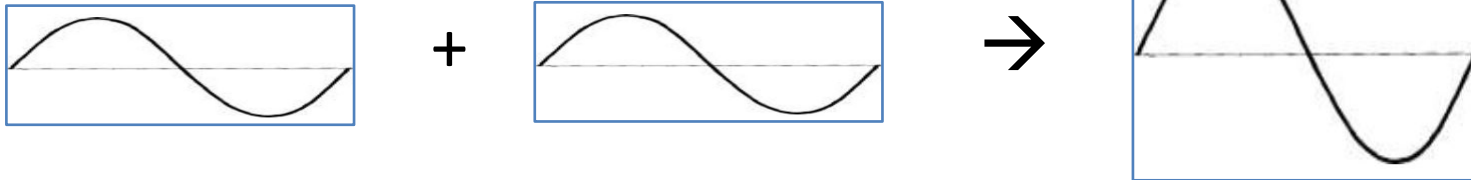


# Interferenza delle onde

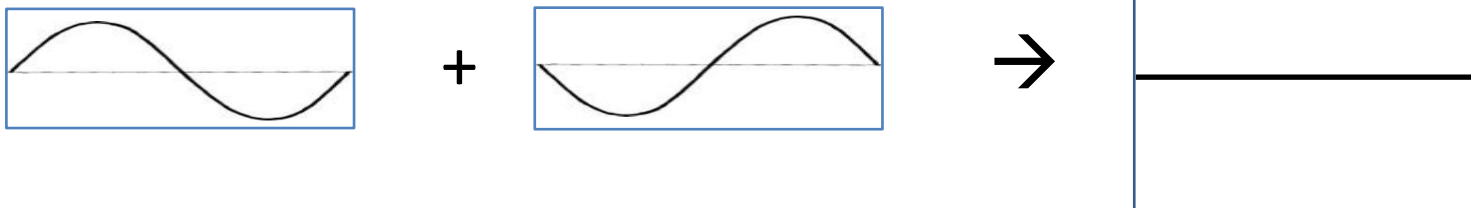
Con il termine interferenza si intende l'effetto fisico della sovrapposizione di due o più treni d'onda.

Limitandoci al caso di treni d'onda con la **stessa frequenza**, ci si rende conto che, a seconda della differenza di fase, le onde possono sommarsi:

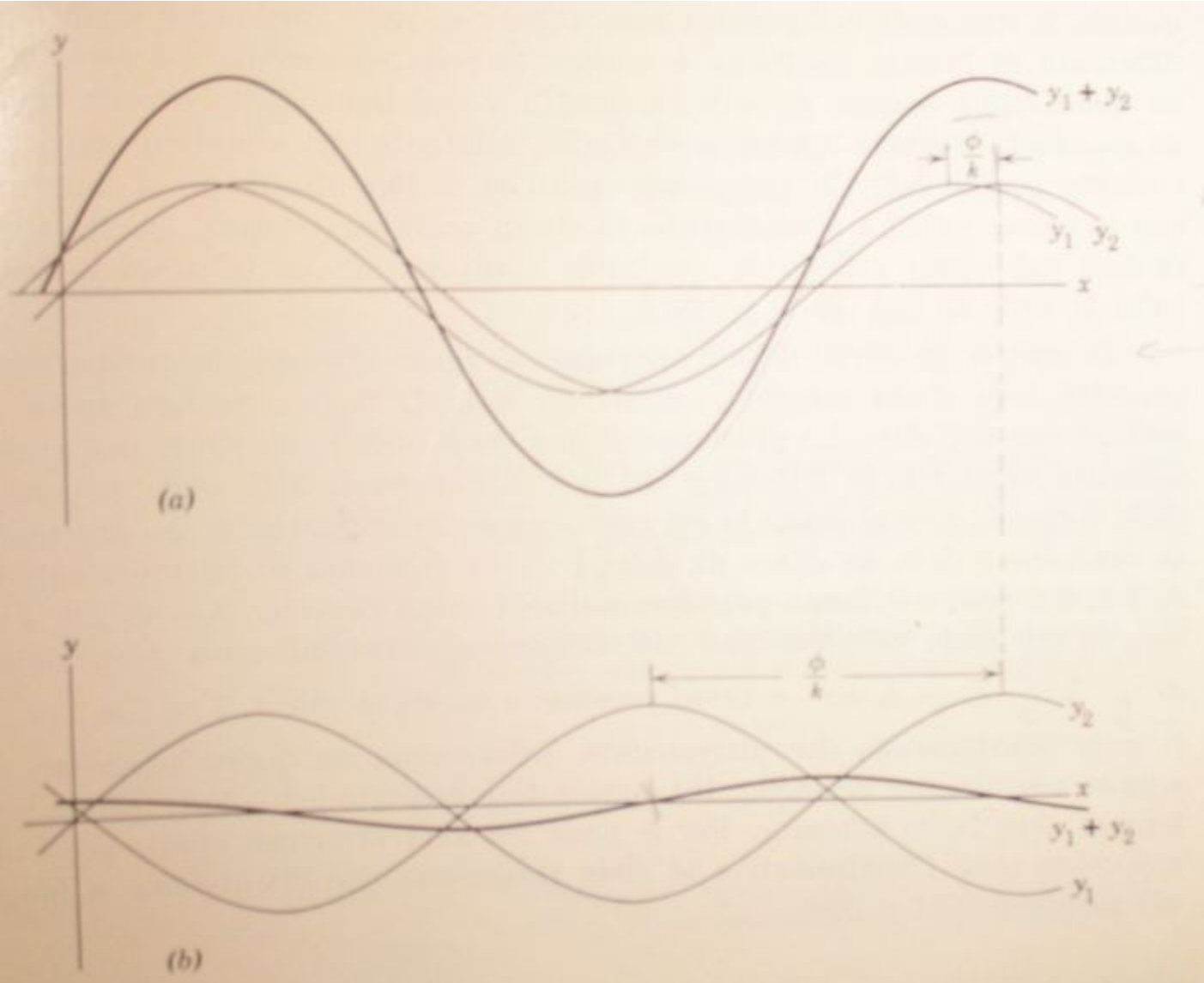
a) **Costruttivamente** se la differenza di fase è zero



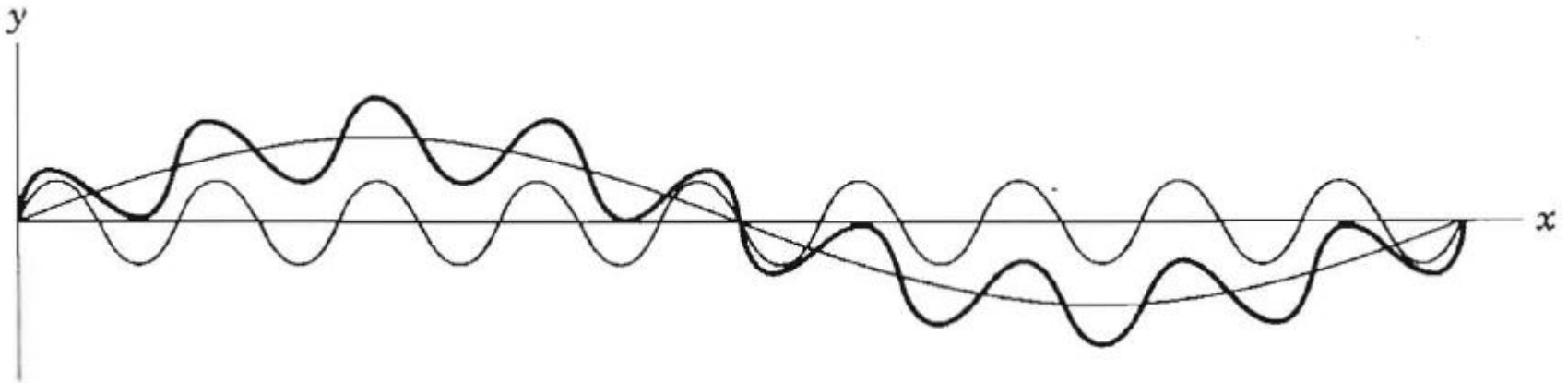
b) **Distruttivamente** se la differenza di fase è  $180^\circ$



E a secondo della differenza di fase si possono avere differenti combinazioni



Diverso e più complicato è il caso in cui l'interferenza (e cioè la somma per sovrapposizione) avviene fra treni d'onda con **frequenze differenti e non multiple o sotto multiple** (come nel caso della somma di Fourier). In questo caso, le onde che ne risultano sono complesse e il risultato può generare per esempio forme d'onda come in figura:



# Onde stazionarie

In un corpo di dimensioni finite, un'onda che si propaga in un verso subisce una riflessione all'estremità del corpo, dando origine ad un'onda che si propaga in senso opposto.

Si dimostra che date due onde del tipo (in questo caso l'onda incidente e l'onda riflessa):

$$y_1 = y_m \sin(kx - \omega t)$$

$$y_2 = y_m \sin(kx + \omega t)$$

La loro sovrapposizione genera un'onda descritta dalla seguente equazione d'onda:

$$y = 2 y_m \sin kx \cos \omega t$$

Definiremo questa equazione come l'equazione di un' **onda stazionaria** : vediamo perché si adotta questo termine

Una caratteristica di questa equazione d'onda è che **l'ampiezza massima del moto** di ogni particella non è la stessa per tutte le particelle, ma **varia con la posizione  $x$** .

Infatti l'ampiezza dell'oscillazione ad ogni posizione  $x$ :

$$2 y_m \sin kx$$

ha **massimi** pari a  $2 y_m$  nei punti in cui:

$$kx = \pi/2, \pi 3/2, \pi 5/2, \text{ etc...}$$

ossia per

$$x = \lambda/4, \lambda 3/4, \lambda 5/4, \text{ etc..}$$

Ricordiamo:

$$k = 2\pi / \lambda$$

Questi punti vengono **denominati ventri** e sono **intervallati da  $\frac{1}{2}$  lunghezza d'onda**.

Si hanno poi **minimi** invece nei punti:

$$kx = \pi, 2\pi, 3\pi, \text{ etc...}$$

ossia:

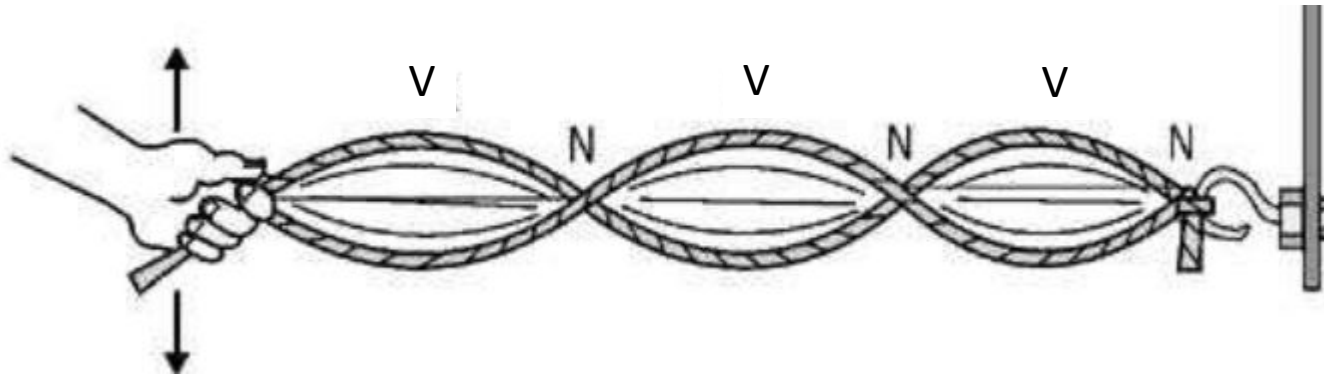
$$x = \lambda/2, \lambda 2/2, \lambda 3/2$$

Ricordiamo:

$$k = 2\pi / \lambda$$

Questi punti vengono **denominati nodi** e sono **intervallati da  $\frac{1}{2}$  lunghezza d'onda**.

Ecco come si presenta un'onda stazionaria:



L'energia rimane **stazionaria**, non si propaga lungo la corda in quanto **non può passare** attraverso i punti nodali che sono rigorosamente fermi.

A tutti gli effetti **questa non è un'onda** (non c'è propagazione), ma è una semplice oscillazione della corda nel suo insieme.

E' definita impropriamente onda semplicemente perché **è il risultato** della sovrapposizione di onde.

# Risonanza

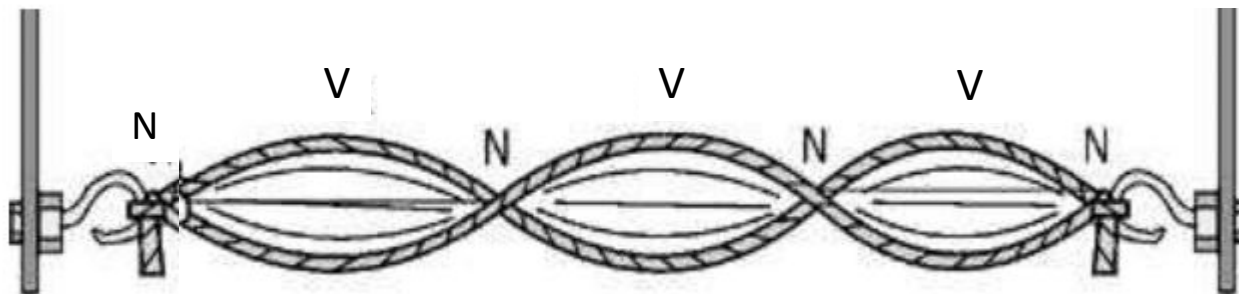
In generale, quando un sistema è sottoposto ad una sollecitazione periodica di frequenza eguale o vicina ad una delle sue frequenze naturali di oscillazione, il sistema oscilla con ampiezza relativamente elevata.

Questo fenomeno, che avevamo visto già nei moti oscillatori, è denominato **risonanza**.  
In questo caso diremo che **il sistema è in risonanza con la sollecitazione applicata**.

Consideriamo una corda elastica con gli estremi fissi sottoposta ad una sollecitazione periodica che genera onde stazionarie.

Consideriamo il caso particolare in cui le dimensioni relative della corda e della lunghezza d'onda in questione siano tali che **le estremità della corda coincidano con dei nodi**.

Quali sono le frequenze naturali di questo sistema ?



In questo caso, fra le estremità potrà esserci un numero qualsiasi di nodi, e quindi la lunghezza d'onda associata alle onde stazionarie potrà essere differente.

Due nodi adiacenti distano  $\lambda/2$ , quindi in una corda di lunghezza  $l$  ci saranno esattamente un numero intero  $n$  di mezze lunghezze d'onda, cioè:

$$l / (\lambda/2) = n$$

Ossia:

$$\lambda = 2 l / n \quad \text{con: } n = 1, 2, 3, \dots$$

Ora, sappiamo che già che:

$$\lambda = v / f \quad \text{e} \quad v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Scriveremo quindi:

$$f = v / \lambda \quad \rightarrow \quad f = v n / (2l) = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad \text{con: } n = 1, 2, 3, \dots$$

Queste sono le **frequenze naturali della corda** in funzione della sua lunghezza, la sua elasticità e la sua densità.

Quindi un sistema di questo tipo ha un **gran numero** di frequenze di risonanza e può risuonare a frequenze differenti.

Questo fatto è **ben diverso** dal caso di un semplice sistema **massa-molla** in cui vi è **una sola** frequenza di risonanza.