Lezione XXII

(esempi di moto armonici:

i Pendoli)

FRUIZIONE E UTILIZZO DEI MATERIALI DIDATTICI

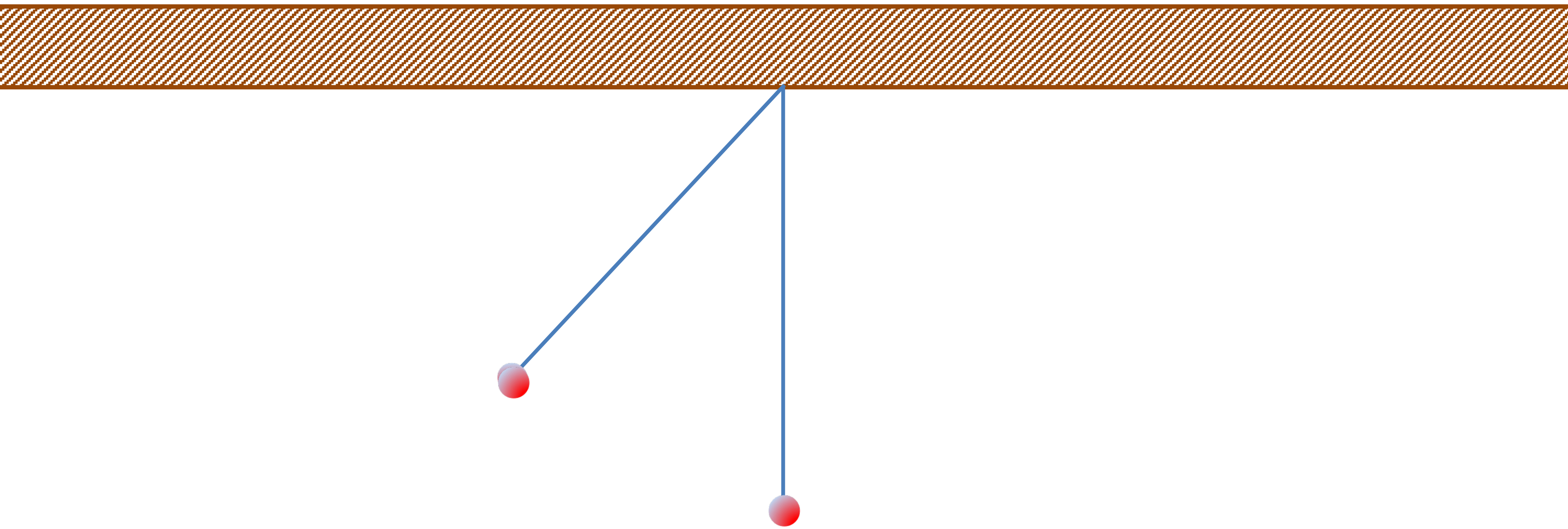
- **E' vietata** la **copia**, la **rielaborazione**, la **riproduzione** dei contenuti e immagini presenti nelle lezioni in qualsiasi forma

- **E' inoltre vietata** la **diffusione**, la **redistribuzione** e la **pubblicazione** dei contenuti e immagini, incluse le registrazioni delle videolezioni con qualsiasi modalità e mezzo non autorizzati espressamente dall'autore o da Unica

Alcune applicazioni del moto armonico

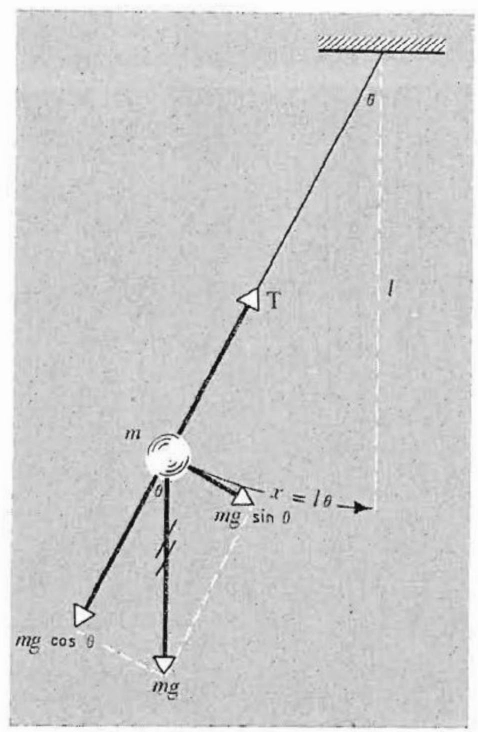
Il pendolo semplice

Il pendolo semplice è un sistema costituito da una massa puntiforme sospesa ad un filo inestendibile. Quando viene spostata dalla sua posizione di equilibrio, e abbandonato a se stesso, il pendolo oscilla in un piano verticale sotto l'azione della forza di gravità. Il moto del pendolo è periodico e vogliamo <u>calcolarne il periodo T</u>



Riconsideriamo la geometria del sistema e definiamo gli assi di riferimento e le forze in gioco.

La massa vale m e il filo di lunghezza l forma un angolo θ con la verticale. Le forze che agiscono sulla massa m sono la forza di gravità $m\mathbf{g}$ diretta in verticale verso il basso e $\mathbf{T}$, la tensione del filo. Scegliamo una coppia di assi cartesiani diretti uno verso il raggio e uno verso la tangente al cerchio su cui si muove la massa. Scomponiamo mg in una componente radiale $mg\cos\theta$ e una componente tangenziale $mg\sin\theta$



La componente radiale e la tensione del filo istante per istante sono uguali e contrarie

e infatti non c'è moto della massa m in senso radiale. La componente tangenziale

è la forza di richiamo esercitata su m tendente e ricondurla alla sua posizione di equilibrio.

La forza di richiamo pertanto è:

$$F = -m\, g \sin\theta$$

NOTA: la forza F **non è proporzionale allo spostamento** angolare θ ma a $\sin\theta$

Il moto che ne risulta quindi **NON** è armonico

Tuttavia, se θ è piccolo $\sin\theta \approx \theta$, dove θ è espresso in radianti. Lo spostamento

lungo l'arco di cerchio è $x = l\,\theta$ e per piccoli angoli il moto è praticamente rettilineo

Quindi: assumendo

$$\sin\theta \approx \theta$$

si ha

$$F = -m\,g\,\theta = -m\,g\,\frac{x}{l} = -\frac{m\,g}{l}\,x$$

Questa è proprio la condizione di applicazione delle formula del moto armonico

$$F = -k\,x$$

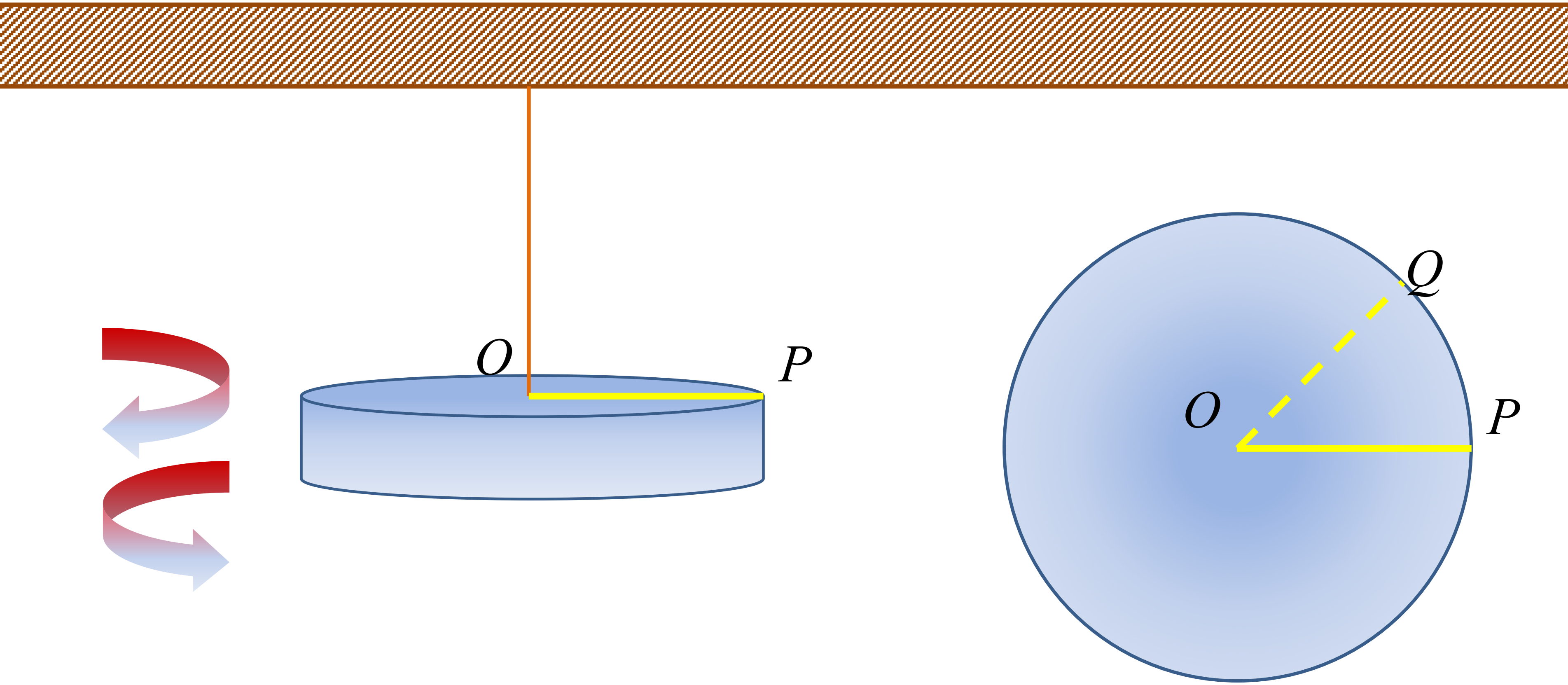
in cui

$$k = \frac{m\,g}{l}$$

Quindi: per **piccole oscillazioni**, il periodo T del pendolo semplice vale:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$ → non dipende dalla massa m

Il pendolo di torsione



Supponiamo di avere un disco sospeso per il suo centro di massa da un filo. Il filo a sua volta è solidamente ancorato ad un supporto fisso. Con il disco in posizione di equilibrio tracciamo un segmento radiale che unisce il centro O con un punto P come in figura.

Se si ruota il disco sul piano orizzontale fino a portarlo alla posizione Q, il filo si torce ed esercita pertanto un **momento** che tende a riportarlo alla posizione di equilibrio.

Il momento in questione quindi è un momento di richiamo che per la Legge di Hooke

è proporzionale alla entità della torsione.   Cioè:

$$\tau = -\varkappa\,\theta$$

Il simbolo $\varkappa$ è una costante che dipende dalle proprietà del filo e viene detta costante di torsione. Il segno negativo indica il fatto che si tratta di un momento di richiamo.

In perfetta analogia col caso lineare dell'oscillatore armonico, scriveremo:

$$\tau = I\,\alpha = I\,\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Che, utilizzando la $\tau = -\varkappa\,\theta$ diventa una equazione analoga al caso lineare dell'oscillatore armonico:

$$-\varkappa\,\theta = I\,\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \rightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\varkappa}{I}\,\theta$$

Infatti, l'equazione differenziale in θ

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\varkappa}{I}\theta$$

è identica alla equazione differenziale in x che abbiamo già visto per l'oscillatore armonico lineare:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

dove I e $\varkappa$ hanno sostituito k e m, e la soluzione pertanto è

$$\theta = \theta_m \cos(\omega t + \delta)$$

In analogia col caso lineare il periodo di oscillazione T è dato dalla:

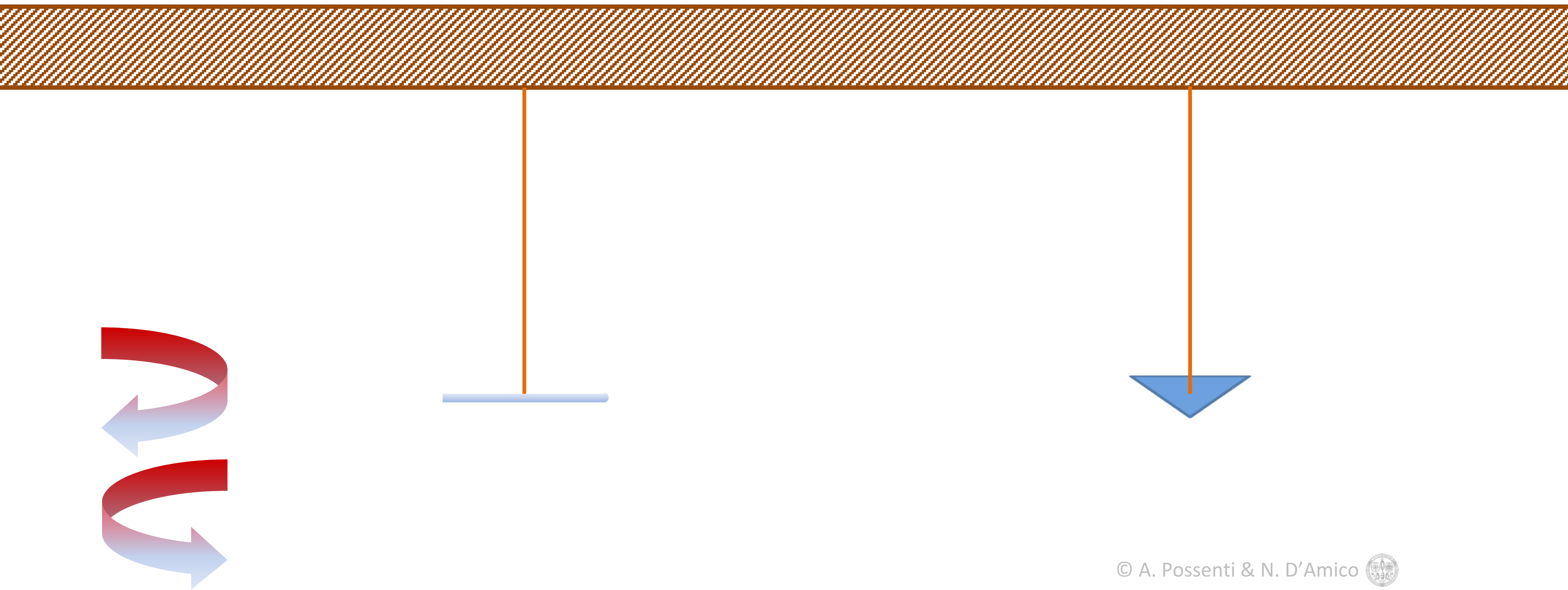
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\varkappa}}$$

Esempio 2

Una sbarra sottile di massa $m =$ 0,10 kg e lunga 0,10 m è sospesa ad un filo per il suo centro. La barra viene fatta oscillare per torsione. Il periodo T risulta 2,0 sec.

La sbarra viene sostituita da una lastra a forma di triangolo equilatero appesa anche essa al centro di massa. In questo caso il periodo risulta in 6,0 sec.

Quesito: Trovare il momento di inerzia del triangolo rispetto all'asse di rotazione.



Abbiamo visto che nel pendolo di torsione il periodo T è dato dalla relazione:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\varkappa}}$$

Dove: I è il momento di inerzia rispetto all'asse di rotazione della massa
e $\varkappa$ è la costante di torsione del filo.

Il momento di inerzia di una barra sottile di lunghezza l rispetto ad un asse di rotazione ortogonale alla barra e passante per il centro è dato da $I = m\, l^2/12$

Si ha quindi:

$I_{\text{sbarra}} = m\, l^2/12 = (0{,}10 \times 0{,}10^2)/12$

$= 0{,}0010/12 = 8{,}3 \times 10^{-5}$ kg-m^2

Dalla relazione:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\varkappa}}$$

si ricava la relazione fra il rapporto fra i periodi di oscillazione e il rapporto dei relativi momenti di inerzia dei due corpi:

$$T_{\mathrm{sbarra}} / T_{\mathrm{triang}} = (I_{\mathrm{sbarra}} / I_{\mathrm{triang}})^{1/2}$$

da cui si ricava:

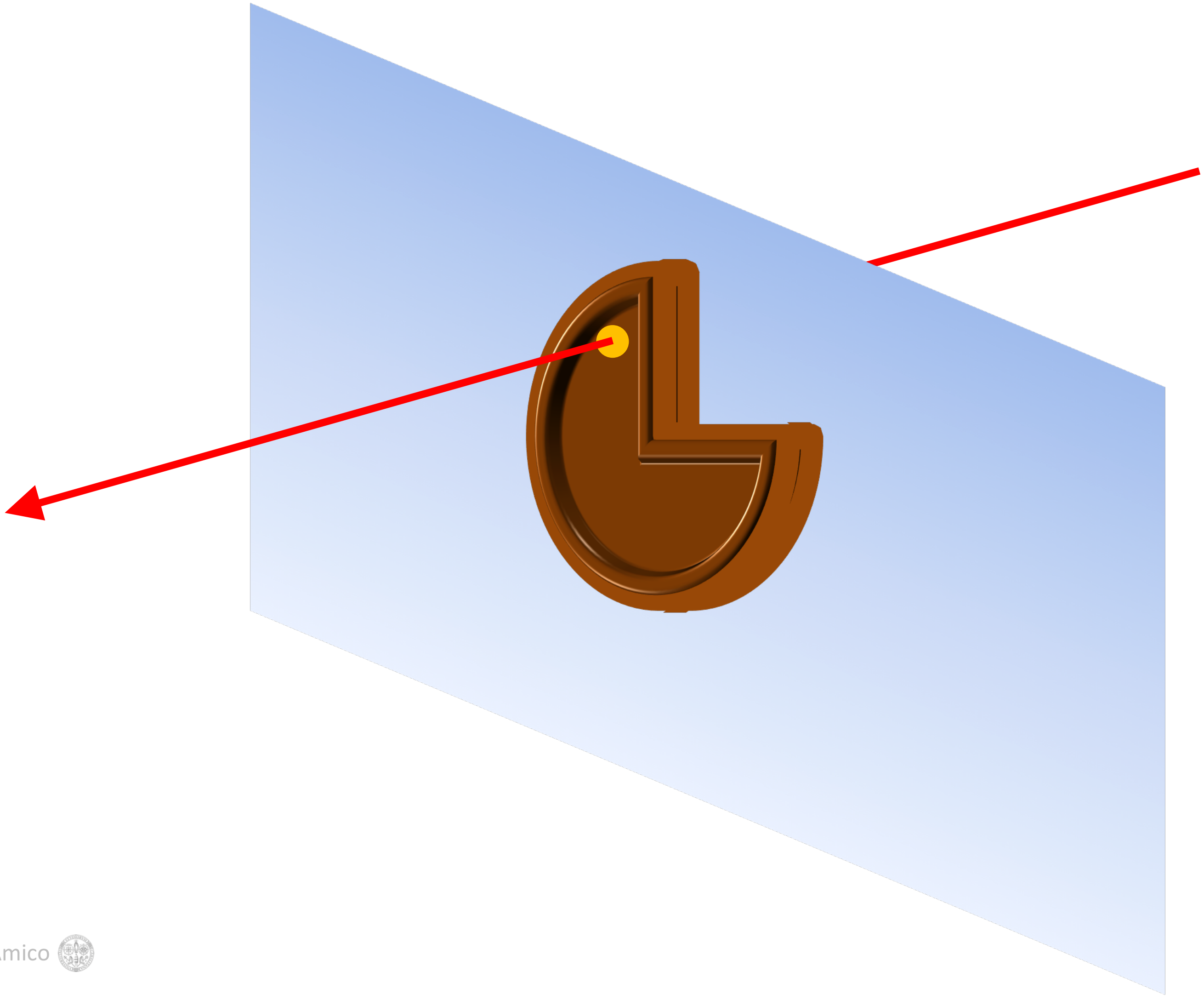
$$I_{\mathrm{triang}} = I_{\mathrm{sbarra}} (T_{\mathrm{triang}} / T_{\mathrm{sbarra}})^2$$

Ossia:

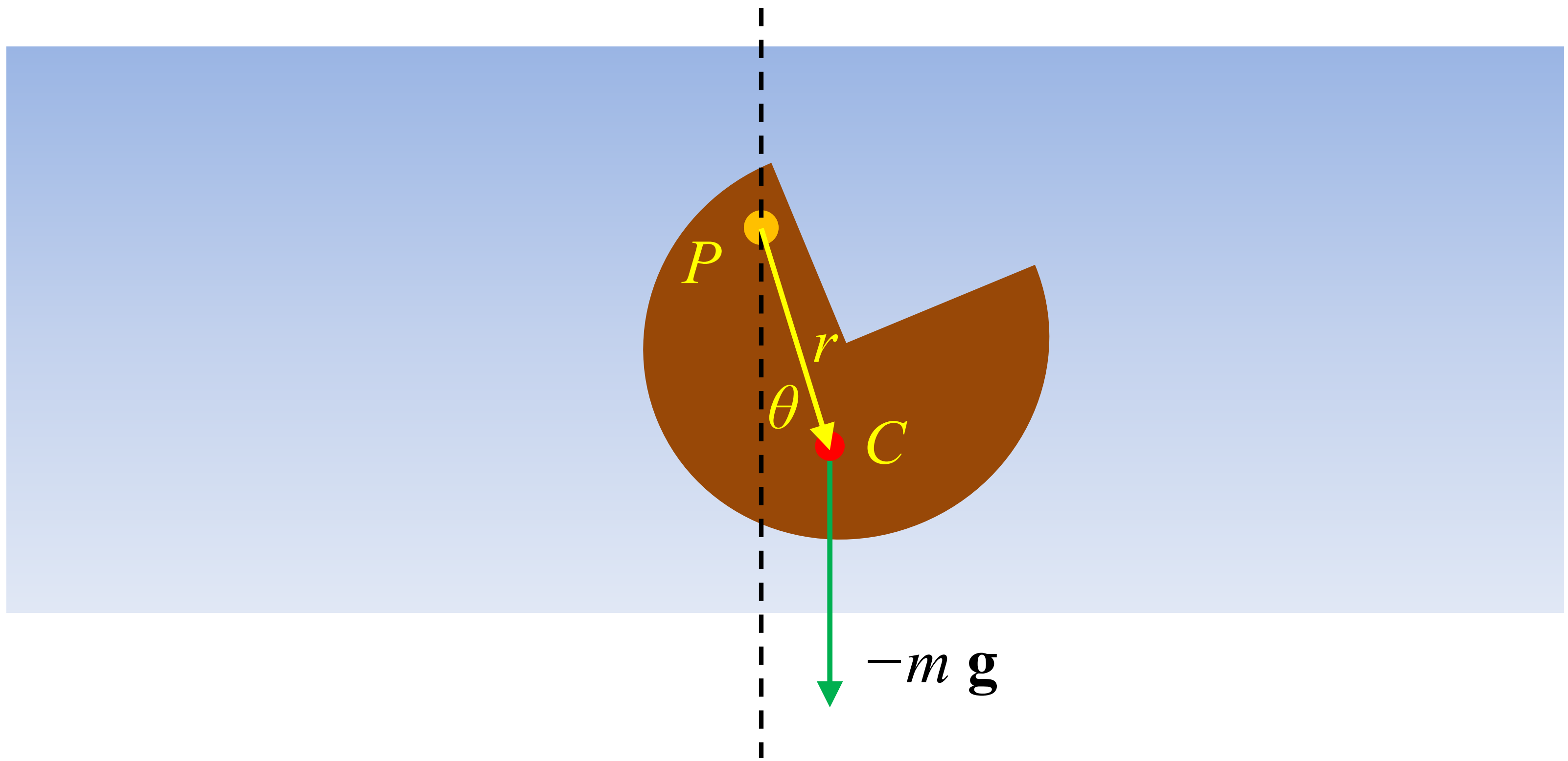
$$I_{\mathrm{triang}} = 8{,}3 \times 10^{-5} \times (6/2)^2 = 0{,}00075 \text{ kg-m}^2$$

Il pendolo fisico

Ogni corpo che possa oscillare in un piano verticale intorno ad un determinato asse si chiama pendolo fisico. Il pendolo fisico quindi è una generalizzazione del pendolo semplice.



Indichiamo con m la massa del corpo, con P il punto dove passa l'asse di rotazione, con C il suo centro di massa e con I il suo momento di inerzia rispetto a P. Sia r il raggio vettore P-C. Supponiamo di spostare il corpo di un angolo θ dalla sua posizione di equilibrio (che è quella in cui il centro di massa C giace sulla verticale passante per P).



Il momento della forza di gravità mg sarà $\tau = -mg\, r \sin\theta$

Da questa formula $\tau = -mg\, r \sin\theta$ risulta che τ è proporzionale a $\sin\theta$ e non a θ quindi la condizione per il moto armonico <u>non</u> sarebbe soddisfatta. Tuttavia per piccoli angoli risulta $\sin\theta \approx \theta$ per cui potremo scrivere:

$$\tau = -\varkappa\, \theta$$

dove:

$$\varkappa = mg\, r$$

D'altra parte sappiamo che:

$$\tau = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

per cui potremo scrivere:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\varkappa\, \theta / I$$

Questa equazione l'abbiamo già vista e porta alla:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\varkappa}} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgr}}$$