# Lezione XXI

## (Moto armonico: energia, Moto armonico smorzato e forzato, Risonanze)

## FRUIZIONE E UTILIZZO DEI MATERIALI DIDATTICI

- **E' vietata** la **copia**, la **rielaborazione**, la **riproduzione** dei contenuti e immagini presenti nelle lezioni in qualsiasi forma

- **E' inoltre vietata** la **diffusione**, la **redistribuzione** e la **pubblicazione** dei contenuti e immagini, incluse le registrazioni delle videolezioni con qualsiasi modalità e mezzo non autorizzati espressamente
dall'autore o da Unica

# Considerazioni energetiche

L'oscillatore armonico è un **sistema conservativo** in quanto la forza in gioco è solo funzione della posizione: $F = -k\,x$ e risulta pertanto

$$U = ½\,k\,x^2 \quad \leftarrow \; \rightarrow \quad F = -\,dU\,/\,dx$$

In assenza di forze dissipative, l'energia meccanica si conserva. Naturalmente **sia l'energia cinetica $K$ che l'energia potenziale $U$ variano continuamente durante l'oscillazione, ma la loro somma si conserva** come dimostreremo di seguito.

**L'energia cinetica** $K$ ad ogni istante vale $\frac{1}{2}\, m\, \mathrm{v}^2$. Tenuto conto che come abbiamo visto:

$$\mathrm{v}\,(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin\,(\omega t + \delta)$$

si ha:

$$K = \tfrac{1}{2}\, m\, \omega^2 A^2 \sin^2\,(\omega t + \delta)$$

e poiché come abbiamo visto in precedenza

$$\omega^2 = k\,/\,m$$

si ha:

$$K = \tfrac{1}{2}\, k\, A^2 \sin^2\,(\omega t + \delta)$$

**Quindi:** L'energia cinetica varia nel tempo con andamento pari al quadrato del seno e ha come valore massimo $\frac{1}{2}\, k\, A^2$

**L'energia potenziale** $U$ ad ogni istante vale $\frac{1}{2}\, k\, x^2$ e poiché

$$x(t) = A \cos(\omega t + \delta)$$

si ha:

$$U = \frac{1}{2}\, k\, A^2 \cos^2(\omega t + \delta)$$

Quindi: L'energia potenziale varia nel tempo con andamento pari al quadrato del coseno e ha come valore massimo $\frac{1}{2}\, k\, A^2$

Cioè: $$K_{max} = U_{max} = \frac{1}{2}\, k\, A^2$$

Inoltre:

$$E = K + U = \frac{1}{2}\, k\, A^2 \sin^2(\omega t + \delta) + \frac{1}{2}\, k\, A^2 \cos^2(\omega t + \delta)$$

$$E = K + U = \frac{1}{2}\, k\, A^2 \left[\sin^2(\omega t + \delta) + \cos^2(\omega t + \delta)\right]$$

Pertanto:

$$E = K + U = \frac{1}{2}\, k\, A^2$$

Il risultato è quindi che:

$$E = K + U = \frac{1}{2}\, m\, v^2 + \frac{1}{2}\, k\, x^2 = \frac{1}{2}\, k\, A^2$$

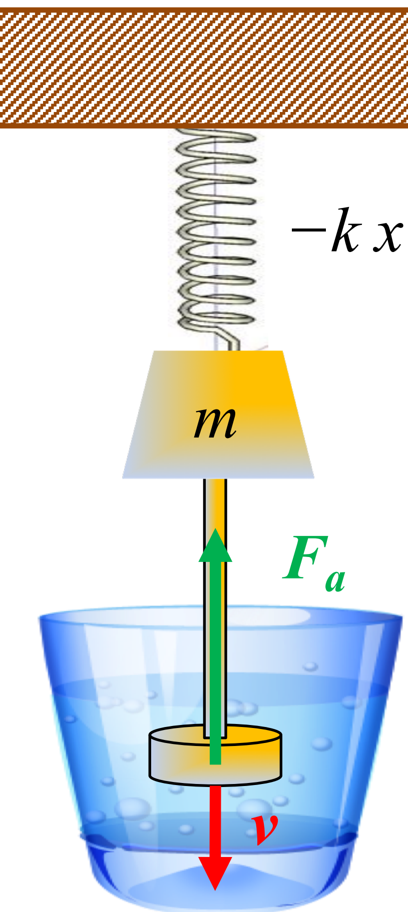
***L'energia meccanica totale di una particella in moto armonico è proporzionale al quadrato dell'ampiezza del moto***

# Moto armonico smorzato

Un esempio di particolare interesse è il caso di un moto armonico in cui sia presente

una forza di attrito $F_a$ proporzionale alla velocità del corpo $v$ e diretta in verso opposto.

Un esempio di questo fenomeno è illustrato in figura.




Alla massa $m$, appesa ad una molla di costante

elastica $k$, è attaccato un disco immerso in un fluido.

La forza d'attrito esercitata dal fluido è proporzionale alla

velocità della massa e diretta in verso opposto

$$-b\,\frac{dx}{dt} = F_a$$

Per ricavare l'equazione del moto, utilizzeremo la $\mathrm{II}$ Legge di Newton $F = ma$. In questo caso $F$ è la risultante della forza di richiamo della molla $-k\,x$ e della forza d'attrito $-b\,\dfrac{dx}{dt}$.

Quindi scriveremo:

$$F = ma$$

E cioè:

$$-k\,x - b\,\frac{dx}{dt} = ma$$

Ricordando che $a = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ l'equazione diventa:

$$\boxed{m\,\frac{d^2x}{dt^2} + b\,\frac{dx}{dt} + k\,x = 0}$$

Si dimostra che se $b$ è sufficientemente piccolo, l'equazione differenziale:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + k\,x = 0$$

ha per soluzione la seguente funzione:

$$x(t) = A\, e^{-bt/2m} \cos(\omega' t + \delta)$$

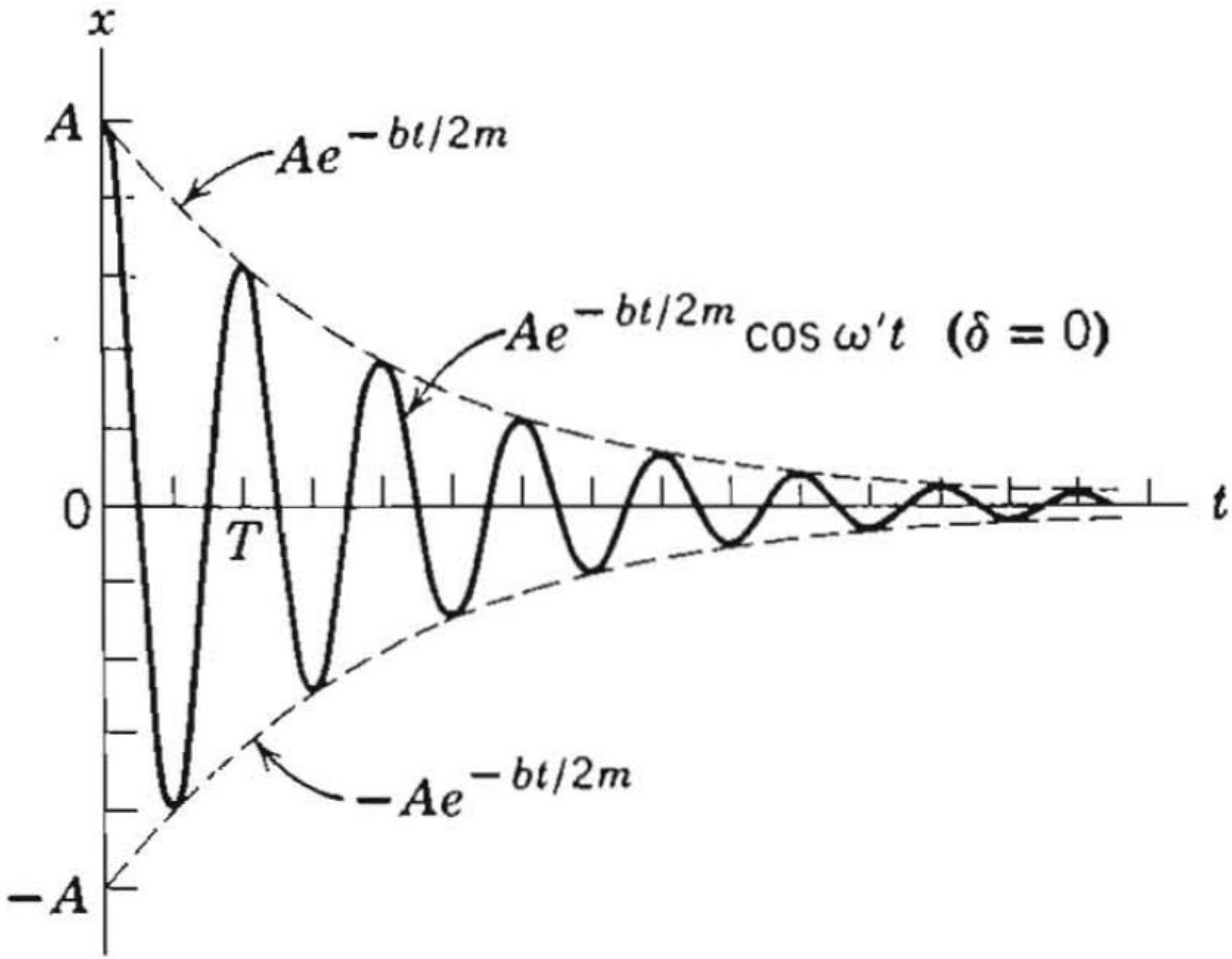
dove: $\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$

Possiamo notare quanto segue:

a) La frequenza di oscillazione è leggermente più piccola

b) Il fluido rallenta il moto in modo esponenziale

L’andamento della funzione $x(t)$ è quindi di questo tipo:



# Oscillazioni forzate e risonanza

Sino ad adesso abbiamo trattato solo le oscillazioni che un corpo compie naturalmente quando viene allontanato dalla sua posizione di equilibrio. Per esempio per una massa attaccata ad una molla, la frequenza naturale di oscillazione è

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

che nel caso in cui è presente una forza di attrito $-b\mathrm{v}$ diviene

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

In sostanza, ogni sistema elastico ha una sua **frequenza naturale**

Non c’è però alcun dubbio che noi possiamo forzare un sistema elastico a oscillare applicandogli una forza esterna periodica.

In questo caso il corpo oscilla alla **frequenza della forza** e non alla sua frequenza naturale.

In questo caso si parla di **oscillazioni forzate**.

Tuttavia, la «risposta» del sistema a queste sollecitazioni dipende dalla relazione fra la frequenza della forza esterna e la frequenza naturale del sistema.

In particolare vedremo che **tanto più la frequenza della forza esterna è vicina alla frequenza naturale, tanto più ampie saranno le oscillazioni**.

L'equazione del moto di un oscillatore forzato si ottiene dalla relazione

$$F = m\,a$$

considerando come risultante $F$ delle forze la somma della forza di richiamo $-kx$,

della forza d'attrito $-b\text{v}$ e della forza periodica esterna $F_{est} = F_m \cos(\omega'' t)$

Scriveremo pertanto:

$$-k\,x \;-b\,\frac{dx}{dt} + F_m \cos(\omega'' t) = ma$$

Ossia:

$$\boxed{m\,\frac{d^2x}{dt^2} + b\,\frac{dx}{dt} + k\,x = F_m \cos(\omega'' t)}$$

La soluzione di questa equazione differenziale è la seguente funzione $x(t)$:

$$x(t) = ( F_m / G ) \sin (\omega'' t - \alpha)$$

dove: $$G = \sqrt{m^2 (\omega''^2 - \omega^2)^2 + b^2 \omega''^2}$$

e:

$$\alpha = \arccos ( b\, \omega''/G )$$

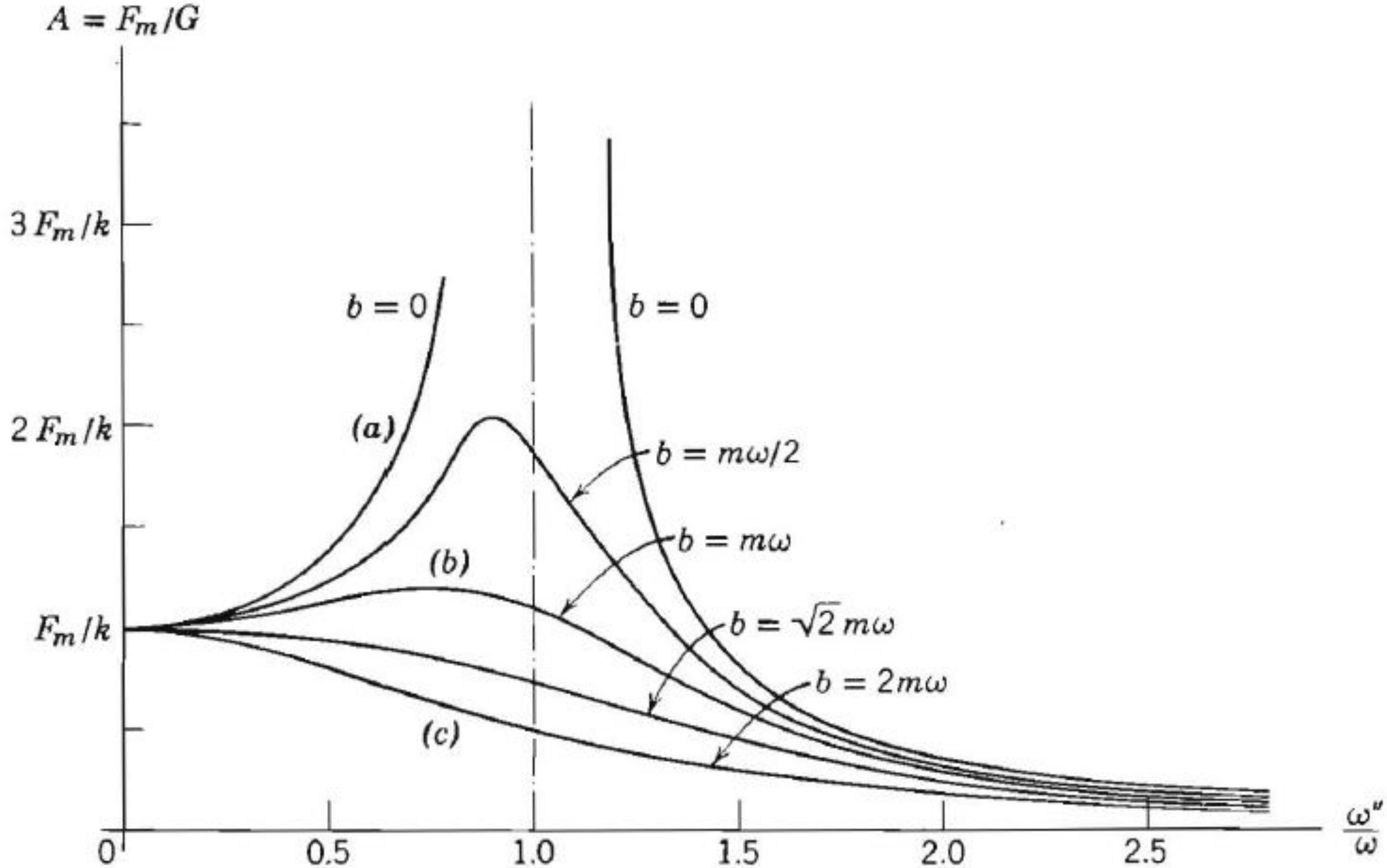



Fig. 15-18. – Grafico dell'ampiezza di una oscillazione armonica forzata in funzione del rapporto fra la frequenza esterna $\omega''$ e la frequenza $\omega$ propria del sistema non smorzato. Si notano cinque curve ciascuna corrispondente ad un particolare valore del coefficiente d'attrito $b$. ($a$) Caso in cui non vi è attrito. ($c$) Caso di forte attrito. Si noti come il picco di risonanza si avvicini alla linea tratteggiata al decrescere di $b$.

# Esercizi ed esempi

# Esempio 1

Una molla disposta in orizzontale è allungata di 3,00 cm quando su di essa agisce una forza di 9,00 N. A questa molla viene attaccata una massa $m$=1,00 kg. La massa, allontanata di 4,00 cm dalla posizione di equilibrio lungo un tavolo privo di attrito viene quindi lasciata libera di compiere oscillazioni armoniche.

**Quesito-1**: Quanto vale la costante elastica della molla ?

**Quesito-2**: Quanto vale la forze esercitata sulla massa da 1,00 kg appena prima che questa venga lasciata libera ?

**Quesito-3**: Quale è il periodo dell'oscillazione ?

**Quesito-4**: Quale è l'ampiezza A del moto ?

**Quesito-5**: Quale è la velocità massima della massa oscillante ?

**Quesito-6**: Quale è l'accelerazione massima?

Una molla disposta in orizzontale è allungata di 3,00 cm quando su di essa agisce una forza di 9,00 N. A questa molla viene attaccata una massa $m$=1,00 kg. La massa, allontanata di 4,00 cm dalla posizione di equilibrio lungo un tavolo privo di attrito viene quindi lasciata libera di compiere oscillazioni armoniche.

**Quesito-1:** Quanto vale la costante elastica della molla ?

Una molla disposta in orizzontale è allungata di 3,00 cm quando su di essa agisce una forza di 9,00 N. A questa molla viene attaccata una massa $m$=1,00 kg. La massa, allontanata di 4,00 cm dalla posizione di equilibrio lungo un tavolo privo di attrito viene quindi lasciata libera di compiere oscillazioni armoniche.

**Quesito-1:** Quanto vale la costante elastica della molla ?

Dalla relazione: $F = -k\,x$, risulta:

$$k = -\,F/x$$

Quindi: $k$ = - (-9,00 N / 0,0300 m) = 300 N/m

Una molla disposta in orizzontale è allungata di 3,00 cm quando su di essa agisce una forza di 9,00 nt. A questa molla viene attaccata una massa $m$=1,00 kg. La massa, allontanata di 4,00 cm dalla posizione di equilibrio lungo un tavolo privo di attrito viene quindi lasciata libera di compiere oscillazioni armoniche.

**Quesito 2:** Quanto vale la forza esercitata sulla massa da 1,00 kg appena prima che questa venga lasciata libera ?

Una molla disposta in orizzontale è allungata di 3,00 cm quando su di essa agisce una forza di 9,00 N. A questa molla viene attaccata una massa $m$=1,00 kg. La massa, allontanata di 4,00 cm dalla posizione di equilibrio lungo un tavolo privo di attrito viene quindi lasciata libera di compiere oscillazioni armoniche.

**Quesito 2:** Quanto vale la forza esercitata sulla massa da 1,00 kg appena prima che questa venga lasciata libera ?

La massa era stata allontanata di 4,00 cm dalla posizione di riposo, quindi:

$$F = -k\,x = \text{-300 N/m x 0,0400 m} = -12{,}0\ \text{N}$$

Una molla disposta in orizzontale è allungata di 3,00 cm quando su di essa agisce una forza di 9,00 N. A questa molla viene attaccata una massa $m$=1,00 kg. La massa, allontanata di 4,00 cm dalla posizione di equilibrio lungo un tavolo privo di attrito viene quindi lasciata libera di compiere oscillazioni armoniche.

**Quesito 3**: Quale è il periodo dell'oscillazione ?

Una molla disposta in orizzontale è allungata di 3,00 cm quando su di essa agisce una forza di 9,00 N. A questa molla viene attaccata una massa $m$=1,00 kg. La massa, allontanata di 4,00 cm dalla posizione di equilibrio lungo un tavolo privo di attrito viene quindi lasciata libera di compiere oscillazioni armoniche.

**Quesito 3**: Quale è il periodo dell'oscillazione ?

Abbiamo visto che $T = 2\pi/\omega$ dove $\omega = \sqrt{k/m}$

$$\omega = \sqrt{\frac{300\frac{nt}{m}}{1{,}00\ kg}} = 17{,}32 \text{ rad/sec}$$

$$T = 2\pi\ /\ 17{,}32 = 0{,}363 \text{ sec}$$

Una molla disposta in orizzontale è allungata di 3,00 cm quando su di essa agisce una forza di 9,00 N. A questa molla viene attaccata una massa $m$=1,00 kg. La massa, allontanata di 4,00 cm dalla posizione di equilibrio lungo un tavolo privo di attrito viene quindi lasciata libera di compiere oscillazioni armoniche.

**Quesito 4:** Quale è l'ampiezza A del moto ?

Una molla disposta in orizzontale è allungata di 3,00 cm quando su di essa agisce una forza di 9,00 N. A questa molla viene attaccata una massa $m$=1,00 kg. La massa, allontanata di 4,00 cm dalla posizione di equilibrio lungo un tavolo privo di attrito viene quindi lasciata libera di compiere oscillazioni armoniche.

**Quesito 4:** Quale è l'ampiezza A del moto ?

Abbiamo visto che l'ampiezza A è semplicemente l'elongazione iniziale: 4,00 cm !!

Una molla disposta in orizzontale è allungata di 3,00 cm quando su di essa agisce una forza di 9,00 N. A questa molla viene attaccata una massa $m$=1,00 kg. La massa, allontanata di 4,00 cm dalla posizione di equilibrio lungo un tavolo privo di attrito viene quindi lasciata libera di compiere oscillazioni armoniche.

**Quesito 5:** Quale è la velocità massima della massa oscillante ?

Una molla disposta in orizzontale è allungata di 3,00 cm quando su di essa agisce una forza di 9,00 N. A questa molla viene attaccata una massa $m$=1,00 kg. La massa, allontanata di 4,00 cm dalla posizione di equilibrio lungo un tavolo privo di attrito viene quindi lasciata libera di compiere oscillazioni armoniche.

**Quesito 5:** Quale è la velocità massima della massa oscillante ?

Abbiamo visto che:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \delta)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \delta)$$

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \delta)$$

Quindi: $v_{max} = \omega A = A\, 2\pi / T = 0{,}0400 \text{ m}\, 2\pi / 0{,}363 \text{ s} = 0{,}693 \text{ m/s}$

**Quesito 6:** Quale è l'accelerazione massima?

**Quesito 6:** Quale è l'accelerazione massima?

Dalle formule della slide precedente ricordiamo che:

$$a\,(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\,cos\,(\omega t + \delta)$$

Quindi:

$$a_{max} = \omega^2 A = A\,k/m = (0{,}0400 \text{ x } 300)/1{,}00 = 12{,}0 \text{ m/s}^2$$