Lezione XIX

(Dinamica rotatoria: esempi)

FRUIZIONE E UTILIZZO DEI MATERIALI DIDATTICI

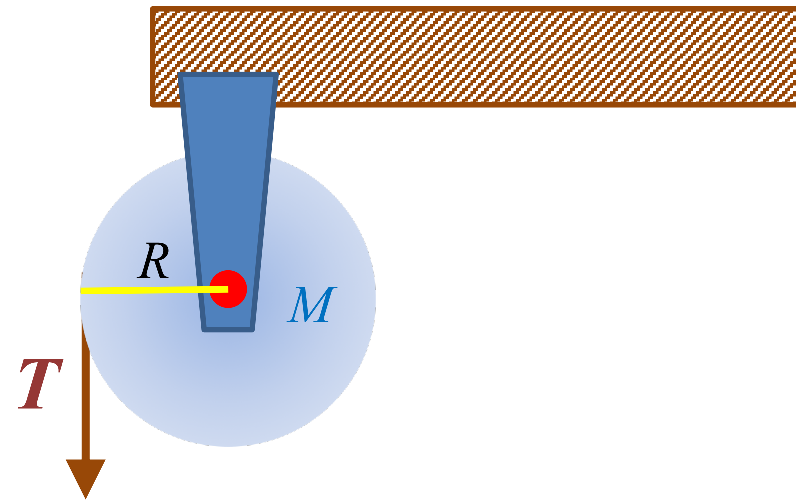
- **E' vietata** la **copia**, la **rielaborazione**, la **riproduzione** dei contenuti e immagini presenti nelle lezioni in qualsiasi forma

- **E' inoltre vietata** la **diffusione**, la **redistribuzione** e la **pubblicazione** dei contenuti e immagini, incluse le registrazioni delle videolezioni con qualsiasi modalità e mezzo non autorizzati espressamente
dall'autore o da Unica

Esempio C :

Un disco omogeneo di raggio R e di massa M è montato su un perno e sostenuto da supporti privi di attrito come in figura. Una cordicella priva di massa è fissata e arrotolata attorno al disco, ed è tirata verso il basso da una tensione $\boldsymbol{T}$

Determinare l'accelerazione angolare del disco e l'accelerazione tangenziale in un punto sul bordo



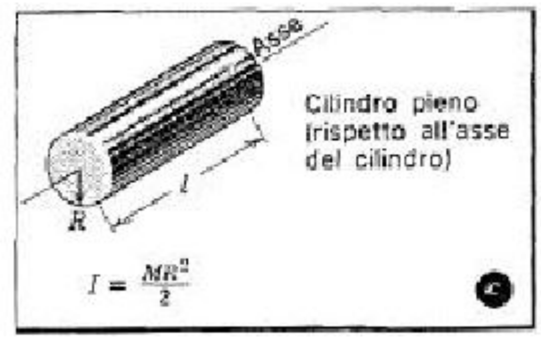
Facendo riferimento ai simboli adottati, in questo caso avremo:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{R} \times \mathbf{T}$$

Essendo R e T ortogonali Il modulo di $\tau = R\,T\,\sin\theta$ sarà :

$$\tau = R\,T$$

Il momento di inerzia I del disco rispetto all'asse di rotazione



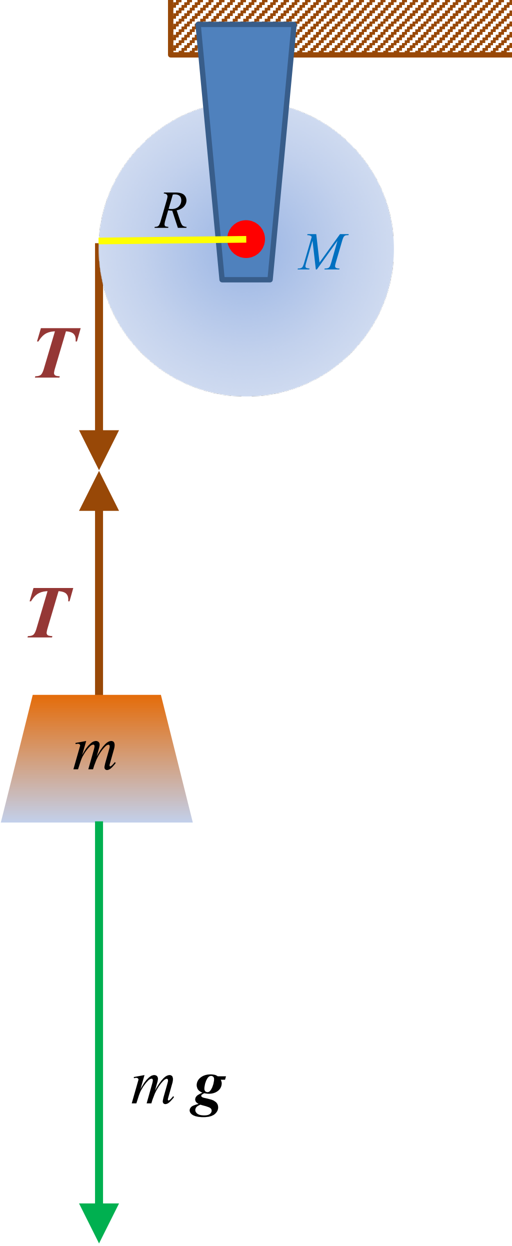
è dato dalla: $I = ½\,M\,R^2$

e dalla relazione $\tau = I\,\alpha$

si ha: $I\,\alpha = RT \rightarrow \alpha = \dfrac{RT}{½\,M\,R^2} = \dfrac{2\,T}{M\,R}$

L'accelerazione tangenziale a_T vale $a_T = R\,\alpha = 2\,T/M$

Supponiamo adesso di appendere alla corda una massa m e di volere ricalcolare l'accelerazione angolare e quella tangenziale.



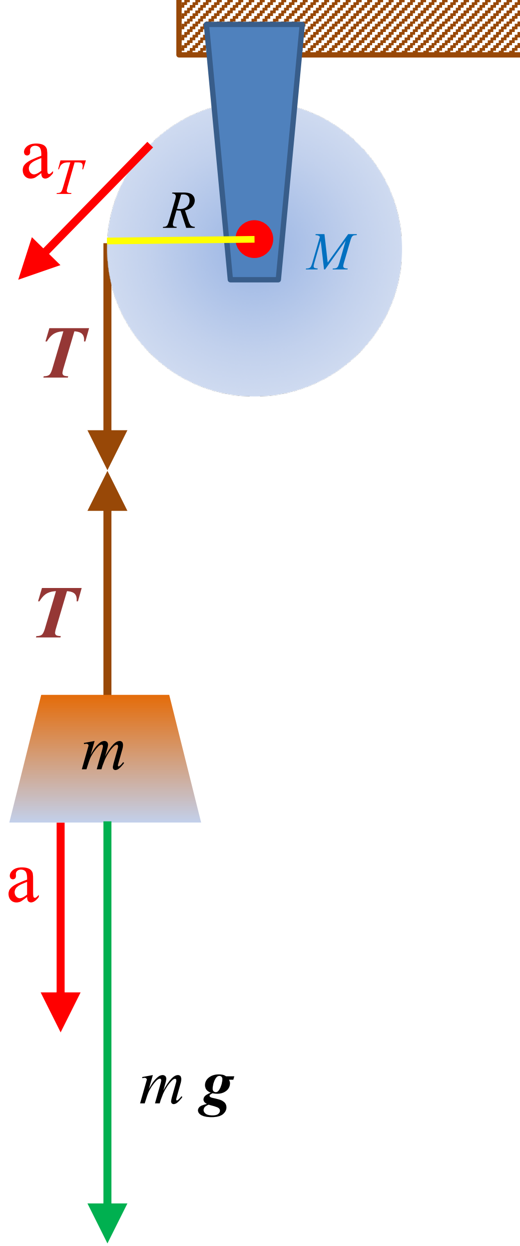
Supponiamo adesso di appendere alla corda una massa m e di volere ricalcolare l'accelerazione angolare e quella tangenziale.

Sia $m\mathbf{g}$ la forza di gravità che agisce sulla massa e $\boldsymbol{T}$ la tensione di reazione diretta verso l'alto.

Il corpo di massa m accelera verso il basso, e la sua accelerazione a è data dalla II Legge di Newton:

$$m\,\mathrm{g} - T = m\,\mathrm{a} \qquad [1]$$

In questa formula a coincide anche con l'accelerazione tangenziale $\mathrm{a_T}$ del disco, cioè $\mathrm{a} = \mathrm{a_T} = R\,\alpha \qquad [2]$



Per l’accelerazione angolare α potremo scrivere di nuovo:

$$\tau = I\,\alpha$$

$$RT = \tfrac{1}{2}\,M\,R^2\,\alpha$$

$$T = \tfrac{1}{2}\,M\,R\,\alpha$$

e ricordando la [2] si ha:

$$T = \tfrac{1}{2}\,M\,\mathrm{a}$$

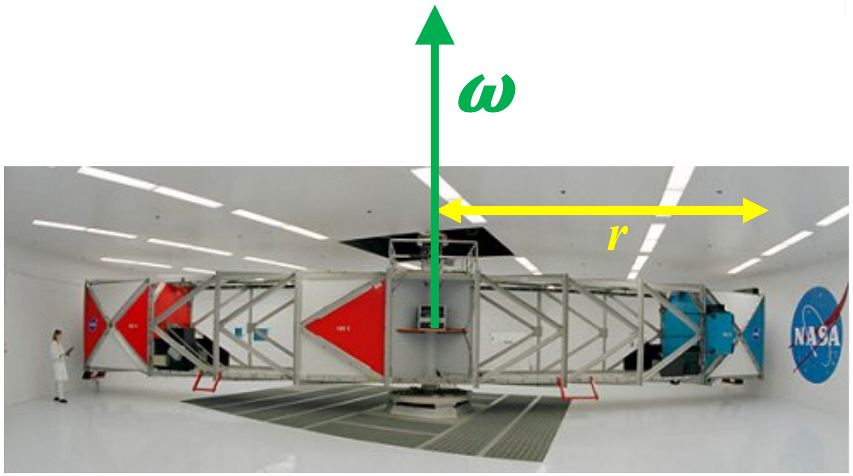
Riscrivendo la $[1]$: $m\,\mathrm{g} - T = m\,\mathrm{a}$ avremo le due equazioni:

$$m\,\mathrm{g} - T = m\,\mathrm{a}$$

$$T = \tfrac{1}{2}\,M\,\mathrm{a}$$

Con due equazioni e due incognite $(T$ e $\mathrm{a})$, possiamo risolvere il quesito.

Esempio D :



Un astronauta si allena in una centrifuga di raggio 10,4 m. La centrifuga ruota con legge $\phi = (0{,}326\ \mathrm{rad/s^2})t^2$. Si calcoli (a) la velocità angolare, (b) la velocità tangenziale, (c) l'accelerazione tangenziale e (d) l'accelerazione radiale dell'astronauta dopo 5,60 s.

(a) Dalla definizione di velocità angolare abbiamo

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}[(0{,}326\ \mathrm{rad/s^2})t^2]}{\mathrm{d}t} = (0{,}652\ \mathrm{rad/s^2})t\ .$$

All'istante indicato sarà

$$\omega = (0{,}652\ \mathrm{rad/s^2})(5{,}6\ \mathrm{s}) = 3{,}65\ \mathrm{rad/s}\ .$$

(b) Per ricavare la velocità tangenziale sarà sufficiente moltiplicare il risultato appena ottenuto per il valore del raggio di curvatura della traiettoria

$$v = \omega r = (3{,}65\ \mathrm{rad/s})(10{,}4\ \mathrm{m}) = 38{,}0\ \mathrm{m/s}$$

(c) L'accelerazione tangenziale assume un valore diverso da 0 solo se il moto circolare è accelerato; nel nostro caso si ha

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(0{,}652\ \mathrm{rad/s^2})t] = 0{,}652\ \mathrm{rad/s^2}$$

e quindi

$$a_\mathrm{t} = r\alpha = (10{,}4\ \mathrm{m}) \cdot (0{,}652\ \mathrm{rad/s^2}) = 6{,}78\ \mathrm{m/s^2}$$

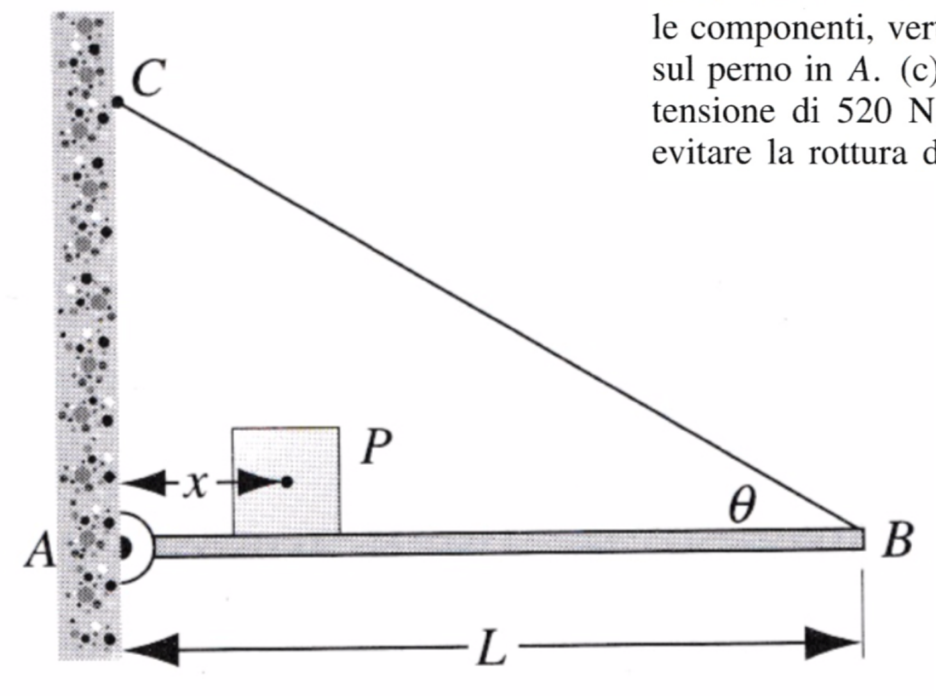
essendo α costante, lo è pure a_t.

(d) Infine per l'accelerazione radiale abbiamo

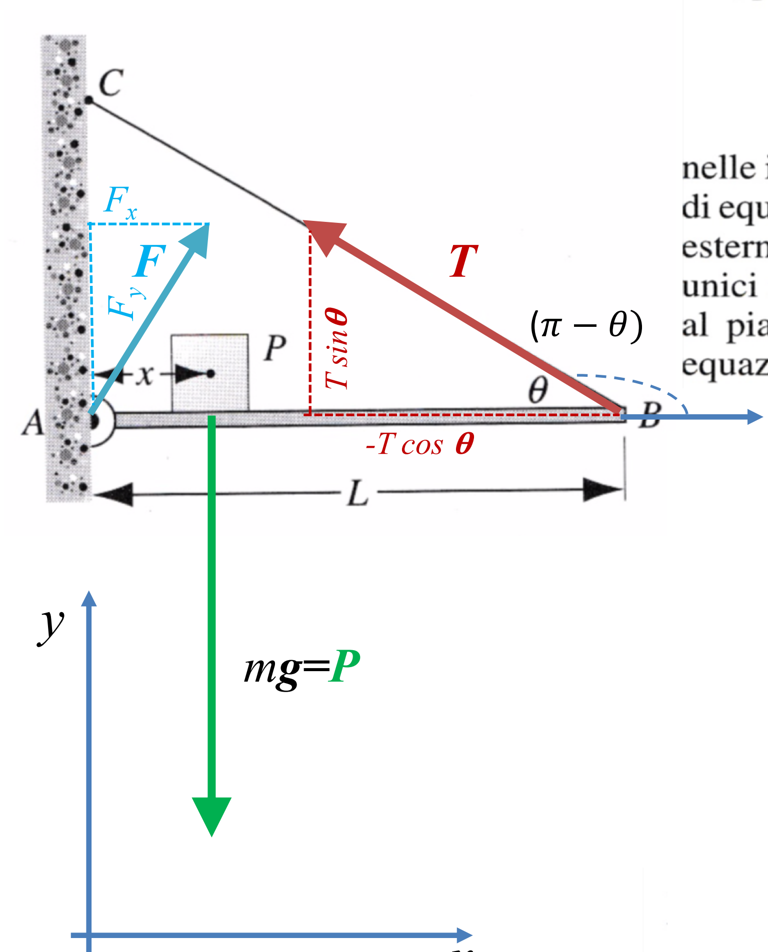
$$a_\mathrm{n} = \frac{v^2}{r} = \frac{(37{,}96\ \mathrm{m/s})^2}{10{,}4\ \mathrm{m}} = 138\ \mathrm{m/s^2} = 14{,}1\ g$$

Esempio E :

L'estremo A di una sbarra orizzontale sottile, di massa trascurabile e di lunghezza L, è fissata a una parete per mezzo di un perno. L'altra estremità B è legata al punto C della parete tramite un filo sottile che forma un angolo ϑ con la direzione orizzontale. Un oggetto di peso P è appoggiato alla sbarra a distanza x dalla parete. (a) Si determini la tensione T del filo in funzione di x. (b) Si determinino le componenti, verticale e orizzontale, della forza esercitata sulla sbarra sul perno in A. (c) Supponendo che il filo possa resistere alla massima tensione di 520 N, si determini il massimo valore di x ammesso per evitare la rottura del filo se $P = 315$ N, $L = 1{,}76$ m e $\vartheta = 32{,}0°$.



$$
\begin{aligned}
&\sin(\pi - \theta) \\
&= \sin\pi\cos\theta - \cos\pi\sin\theta \\
&= 0 - (-1)\sin\theta = \sin\theta
\end{aligned}
$$



Le forze esterne agenti sulla barra sono: il peso $\boldsymbol{P}$ verticale verso il basso, applicato a una distanza x dalla parete, la tensione $\boldsymbol{T}$ sul filo, in una direzione che forma un angolo θ con la barra, e la reazione vincolare $\boldsymbol{F}$ esercitata dallo snodo A in direzione incognita. Per l'equilibrio traslazionale, la somma vettoriale di tutte le forze esterne dev'essere nulla. Questa condizione fornisce l'equazione vettoriale:

$$\boldsymbol{P} + \boldsymbol{T} + \boldsymbol{F} = 0$$

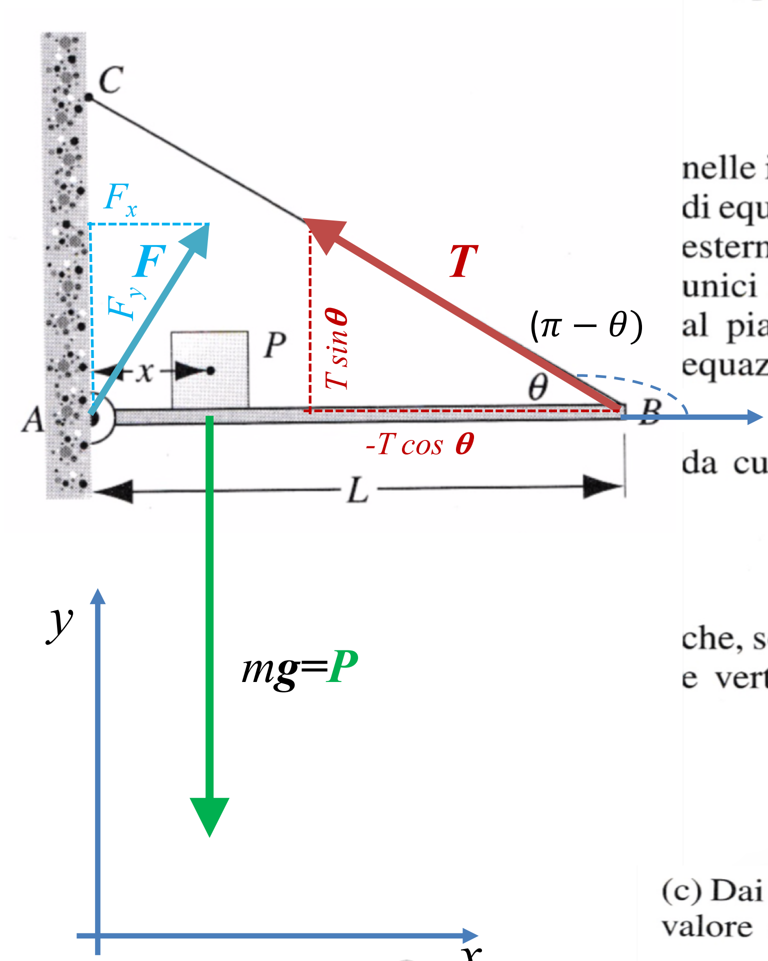
che, proiettata orizzontalmente e verticalmente, dà le due equazioni scalari:

$$
\begin{aligned}
-T\cos\theta + F_x &= 0 \\
-P + T\sin\theta + F_y &= 0
\end{aligned}
$$

nelle incognite T, F_x, F_y. Una terza equazione si ottiene dalla condizione di equilibrio rotazionale: la somma vettoriale di tutti i momenti delle forze esterne dev'essere nulla. Calcolando i momenti rispetto allo snodo A, gli unici momenti non nulli sono quelli di $\boldsymbol{P}$ e di $\boldsymbol{T}$, entrambi perpendicolari al piano del disegno, ma con versi opposti. Si ottiene perciò l'unica equazione scalare:

$$\tau_z = T L \sin\theta - P x = 0$$

$$\sin(\pi-\theta)$$
$$= \sin\pi\cos\theta - \cos\pi\sin\theta$$
$$= 0 - (-1)\sin\theta = \sin\theta$$



Le forze esterne agenti sulla barra sono: il peso $\boldsymbol{P}$ verticale verso il basso, applicato a una distanza x dalla parete, la tensione $\boldsymbol{T}$ sul filo, in una direzione che forma un angolo θ con la barra, e la reazione vincolare $\boldsymbol{F}$ esercitata dallo snodo A in direzione incognita. Per l'equilibrio traslazionale, la somma vettoriale di tutte le forze esterne dev'essere nulla. Questa condizione fornisce l'equazione vettoriale:

$$\boldsymbol{P} + \boldsymbol{T} + \boldsymbol{F} = 0$$

che, proiettata orizzontalmente e verticalmente, dà le due equazioni scalari:

$$-T\cos\theta + F_x = 0$$
$$-P + T\sin\theta + F_y = 0$$

nelle incognite T, F_x, F_y. Una terza equazione si ottiene dalla condizione di equilibrio rotazionale: la somma vettoriale di tutti i momenti delle forze esterne dev'essere nulla. Calcolando i momenti rispetto allo snodo A, gli unici momenti non nulli sono quelli di $\boldsymbol{P}$ e di $\boldsymbol{T}$, entrambi perpendicolari al piano del disegno, ma con versi opposti. Si ottiene perciò l'unica equazione scalare:

$$\tau_z = TL\sin\theta - Px = 0$$

da cui si ricava (a) la forza di tensione sul filo:

$$T = \frac{P}{L\sin\theta}x$$

che, sostituita nelle due equazioni precedenti, dà le componenti orizzontale e verticale (b) della reazione vincolare in A:

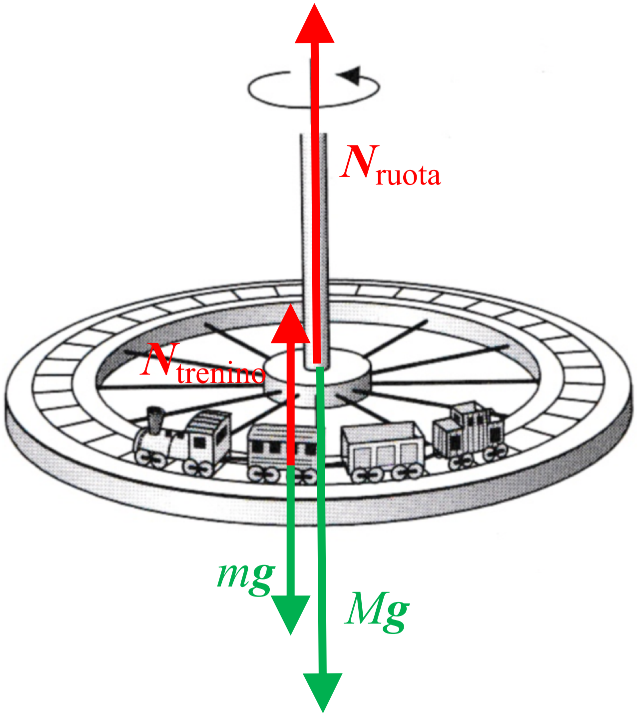
$$F_x = T\cos\theta = \frac{P}{L\tan\theta}x$$
$$F_y = P - T\sin\theta = P(1 - x/L)\,.$$

(c) Dai dati del problema, utilizzando il risultato (a), ricaviamo il massimo valore di x

$$x = \frac{(520\ \mathrm{N})(1{,}76\ \mathrm{m})(\sin 32{,}0°)}{(315\ \mathrm{N})} = 1{,}54\ \mathrm{m}\,.$$

Esempio F :

Un trenino giocattolo viene montato su una ruota libera di ruotare senza attrito attorno al suo asse verticale (vedi figura). Sia m la massa del trenino inizialmente a riposo; a un certo punto si avvia il motore elettrico e il trenino aumenta la sua velocità fino a raggiungere una situazione stazionaria in cui la sua velocità rispetto al binario vale v. Si calcoli la velocità angolare della ruota supponendo che la sua massa valga M e il suo raggio R. (Si trascuri la massa dei raggi della ruota.)



Il sistema ruota + trenino è soggetto alla forza di interazione gravitazionale e alle reazioni vincolari in direzione normale al piano in cui avviene il moto. Le forze di attrito tra il trenino e la ruota sono forze interne e quindi non possono alterare il momento angolare del sistema. Per la ruota la forza di gravità, applicata al centro della ruota stessa, viene bilanciata dalla reazione normale; per il trenino la forza di gravità e la reazione normale hanno, rispetto al centro della ruota, momenti di forza uguali e opposti e quindi non variano il momento angolare del sistema. Siamo pertanto in una condizione in cui il momento angolare totale del sistema si conserva; possiamo allora scrivere, scegliendo come polo fisso il centro della ruota e considerando la ruota come un anello,

$$\boldsymbol{L}_i = \boldsymbol{L}_f \Rightarrow 0 = I_{\text{trenino}}\omega_{\text{trenino}} + I_{\text{ruota}}\omega_{\text{ruota}} \Rightarrow mR^2\frac{v_{\text{trenino}}}{R} = -MR^2\omega_{\text{ruota}}$$

e infine

$$\omega_{\text{ruota}} = -\frac{m}{M}\frac{v_{\text{trenino}}}{R} = -\frac{m}{M}\omega_{\text{trenino}}\,.$$

La ruota si muove nella direzione opposta a quella del trenino e la sua velocità angolare scala secondo il rapporto tra le masse del trenino e della ruota.