

Lezione XVIII

(Intro alla dinamica rotatoria:

Momento d'inerzia, Momento angolare,

Conservazione del momento angolare,
esempi)



FRUIZIONE E UTILIZZO DEI MATERIALI DIDATTICI

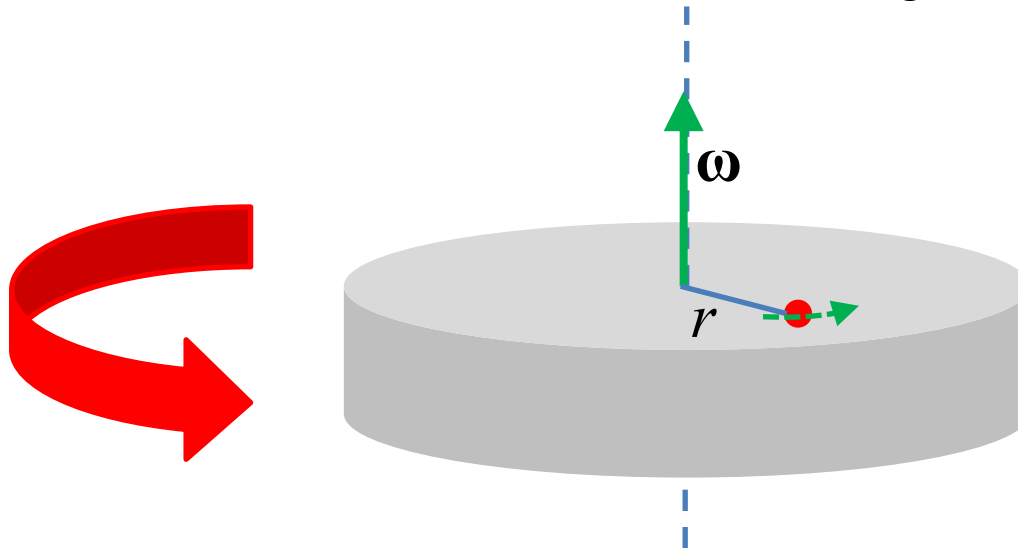
- ➔ **E' vietata** la **copia**, la **rielaborazione**, la **riproduzione** dei contenuti e immagini presenti nelle lezioni in qualsiasi forma
- ➔ **E' inoltre vietata** la **diffusione**, la **redistribuzione** e la **pubblicazione** dei contenuti e immagini, incluse le registrazioni delle videolezioni con qualsiasi modalità e mezzo non autorizzati espressamente dall'autore o da Unica

Momento d'inerzia ed Energia di Rotazione

Non c'è dubbio che ciascuna particella di cui si compone un corpo rigido in rotazione possiede un certa energia cinetica:

Una particella di massa m di un corpo rigido situata ad una distanza r dall'asse di rotazione del corpo rigido in questione avrà una velocità

$v = \omega r$, dove ω è la velocità angolare del corpo rigido.



Pertanto l'energia cinetica di questa particella sarà: $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$

Se, come stiamo supponendo, il corpo è rigido allora la velocità angolare ω è la stessa per tutte le particelle di cui si compone, e l'energia cinetica totale K sarà la somma delle energie cinetiche di tutte le particelle :

$$K = \frac{1}{2} m_1 \omega^2 r^2_1 + \frac{1}{2} m_2 \omega^2 r^2_2 + \dots \dots \dots \frac{1}{2} m_N \omega^2 r^2_N$$

$$K = \frac{1}{2} (m_1 r^2_1 + m_2 r^2_2 + \dots \dots \dots m_N r^2_N) \omega^2$$

$$K = \frac{1}{2} \sum (m_i r^2_i) \omega^2$$

Il termine $\sum (m_i r^2_i)$ che indichiamo col simbolo I è denominato **Momento di Inerzia del corpo rigido rispetto a quel particolare asse di rotazione**

$$I = \sum (m_i r^2_i)$$

Va sottolineato che il Momento di Inerzia di un corpo rigido dipende quindi dall'asse, oltre che dalla **forma** del corpo e dalla **distribuzione delle masse**.

Il **Momento di Inerzia** I ha dimensioni:

$$[M L^2]$$

e si misura in:

$$\text{kg m}^2$$

Introducendo il Momento di Inerzia, l' **energia cinetica di un corpo rigido in**

rotazione K_{rot} è espressa pertanto dalla:

$$K_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Nota bene:

Questa **non** è una nuova forma di energia, ma è semplicemente la somma delle energie cinetiche di tutte le particelle di cui si compone il corpo, scritta semplicemente in una formulazione conveniente

Nel caso in cui il corpo rigido non è costituito da un insieme finito di particelle distinte, ma è costituito da una **distribuzione continua di materia**, l'operazione di somma che compare nella formula:

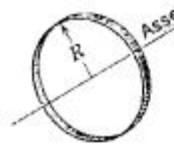

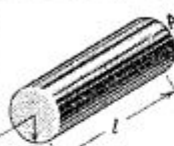
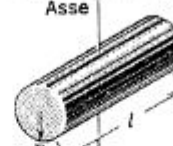
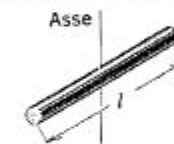


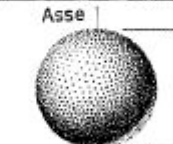
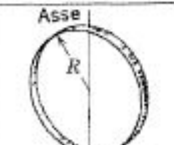
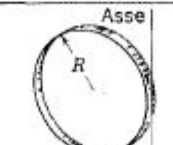
$$I = \sum (m_i r_i^2)$$

diventerà **una integrazione**: considereremo il corpo costituito da masse infinitesime dm e considereremo la distanza r fra tali masse e l'asse di rotazione:

$$I = \int r^2 dm$$

dove l'integrale è esteso sull'intero corpo

Nel caso di corpi di forma complicata, il calcolo di questo integrale può essere difficile, ma nel caso di corpi con una geometria regolare e l'asse di rotazione coincidente con l'asse di simmetria, il calcolo è abbastanza semplice. Ecco di seguito alcuni esempi:

 <p>Anello (rispetto all'asse del cilindro)</p> $I = MR^2$	 <p>Cilindro cavo (rispetto all'asse del cilindro)</p> $I = \frac{M}{2}(R_1^2 + R_2^2)$
 <p>Cilindro pieno (rispetto all'asse del cilindro)</p> $I = \frac{MR^2}{2}$	 <p>Cilindro pieno o disco (rispetto ad un diametro centrale)</p> $I = \frac{MR^2}{4} + \frac{Ml^2}{12}$
 <p>Sbarra sottile (rispetto ad un asse per il centro I alla lunghezza)</p> $I = \frac{Ml^2}{12}$	 <p>Sbarra sottile (rispetto ad un asse passante per un estremo I alla lunghezza)</p> $I = \frac{Ml^2}{3}$
 <p>Sfera piena (rispetto a un diametro qualunque)</p> $I = \frac{2MR^2}{5}$	 <p>Superficie sferica (rispetto ad un diametro qualunque)</p> $I = \frac{2MR^2}{3}$
 <p>Anello (rispetto ad un diametro qualunque)</p> $I = \frac{MR^2}{2}$	 <p>Anello (rispetto ad un qualunque asse tangente)</p> $I = \frac{3MR^2}{2}$

Il legge di Newton per moti rotatori

	Moto traslatorio	Moto rotatorio
energia cinetica	$\frac{1}{2} m v^2$	$\frac{1}{2} I \omega^2$
velocità	v	ω
massa	m	I

Così come ω è nel moto rotatorio l'equivalente della velocità v nel moto traslatorio, I è nel moto rotatorio l'equivalente della massa m nel moto traslatorio.

Occorre però ricordare che mentre m non dipende dalla posizione del corpo, I dipende dal particolare asse attorno a cui avviene la rotazione

Ricordiamo che abbiamo introdotto il concetto di Momento di una Forza e il concetto di Momento di Inerzia ai fini di rimpiazzare la relazione fondamentale di tutta la dinamica

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a}$$

con una analoga relazione che valga per studiare la dinamica rotazionali e si basi dunque sulle **variabili rotazionali**.

Fatta l'identificazione:

1. della accelerazione lineare \mathbf{a} con l'accelerazione angolare $\boldsymbol{\alpha}$
2. della massa m con il momento di inerzia I
3. della forza \mathbf{F} con il momento della forza $\boldsymbol{\tau}$

ci aspettiamo (senza fare qui la dimostrazione esplicita) che per il moto rotazionale di un corpo rigido avente momento di inerzia I rispetto al suo asse di rotazione

valga la seguente forma della II legge di Newton

$$\boldsymbol{\tau} = I \boldsymbol{\alpha}$$

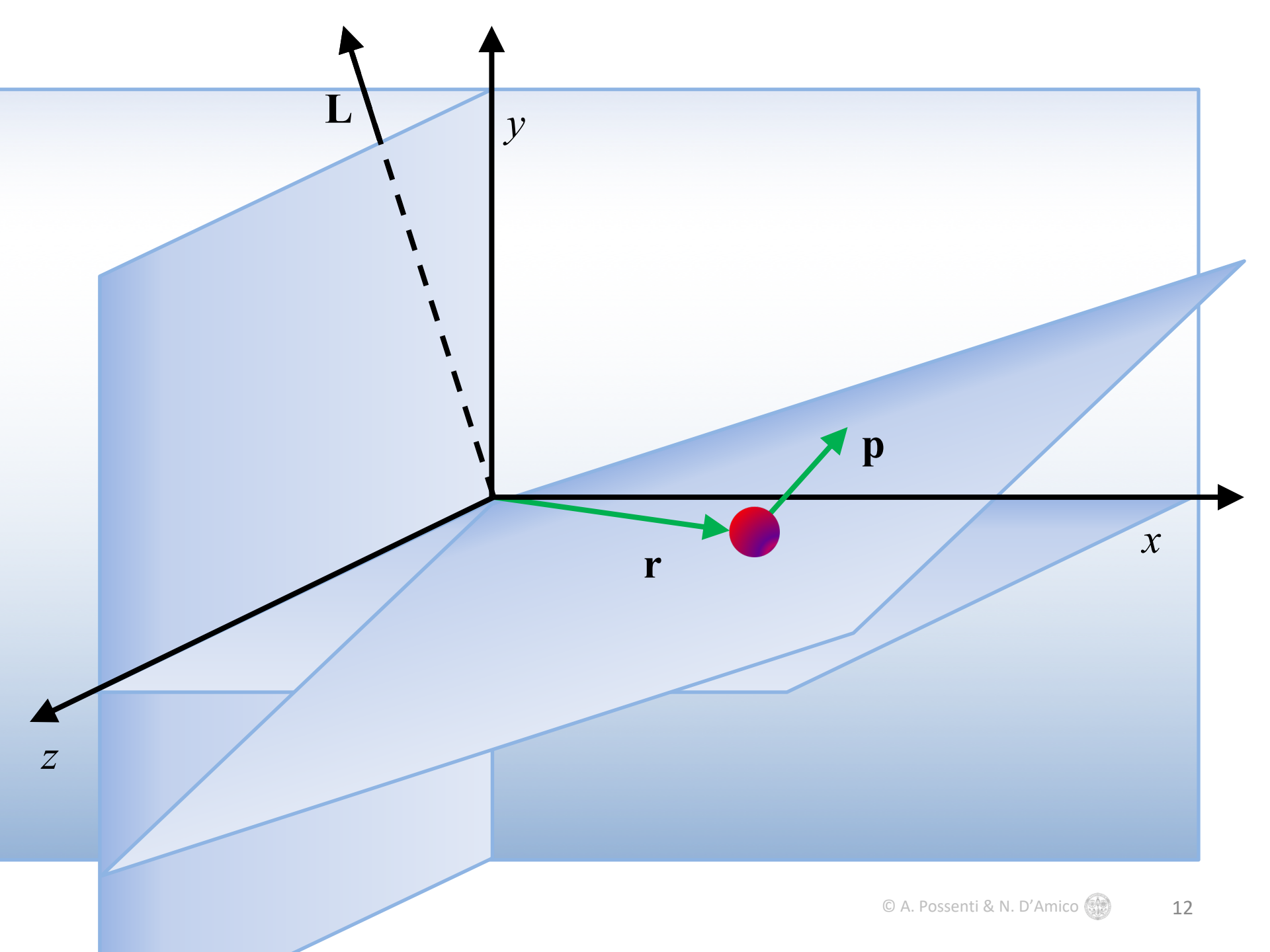
Momento angolare di una particella

Nella dinamica del moto rotatorio, il concetto di **Momento angolare** (detto anche **Momento della quantità di moto**) ha un ruolo simile a quello che ha la quantità di moto nella dinamica del moto traslatorio. Vedremo che la definizione e l'applicazione di questo concetto ci permetterà di ricavare un'altra importante Legge di conservazione.

Consideriamo una particella di massa m e quantità di moto \mathbf{p} situata ad una distanza \mathbf{r} dall'origine O di un sistema di assi x - y - z . Il **momento angolare della particella rispetto al punto O** è definito dalla:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

Cioè: il **prodotto vettoriale** di \mathbf{r} per \mathbf{p}



In accordo con la definizione di prodotto vettoriale, il modulo di \mathbf{L} è dato da:

$$L = r p \sin \theta$$

La direzione è perpendicolare al piano individuato dai due vettori \mathbf{r} e \mathbf{p}

Il verso è stabilito dalla consueta regola della mano destra.

Dalla definizione, che è del tutto **analoga al momento di una forza**, si vede che, a tutti gli effetti, il momento angolare \mathbf{L} è il **momento della quantità di moto** (dove talora l'uso di questa nomenclatura al posto di quella di momento angolare: le due nomenclature sono sinonimi)

Adesso passeremo a dimostrare una importante relazione fra questi **due momenti**,
cioè il **momento di una forza** e il **momento della quantità di moto**.

Partiamo dalla II Legge di Newton, scritta nella sua forma più generale:

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}$$

e consideriamo il prodotto vettoriale di \mathbf{r} per entrambi i membri e cioè:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}$$

che in base alla definizione di momento di una forza diventa:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}$$

Conserviamo per un attimo questa relazione:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}$$

e torniamo alla definizione del momento angolare: $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$

e deriviamo questa equazione rispetto al tempo

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{p})$$

La derivata di un prodotto vettoriale si esegue **esattamente con le stesse regole** di un prodotto normale, fatto salvo il fatto che occorre fare attenzione a **non invertire l'ordine dei fattori**.

$$(d/dt) \mathbf{L} =$$

$$= (d/dt) [\mathbf{r} \times \mathbf{p}] = [(d/dt) \mathbf{r}] \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times [(d/dt) \mathbf{p}] =$$

$$= [(d/dt) \mathbf{r}] \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times [(d/dt) (m\mathbf{v})] =$$

$$= \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times [(d/dt) (m\mathbf{v})] = 0 + \mathbf{r} \times [(d/dt) (m\mathbf{v})]$$

$$= \boldsymbol{\tau}$$

Cioè: la derivata rispetto al tempo del momento angolare (o momento della quantità di moto) di una particella è uguale al momento delle forze applicate alla particella stessa.

Questa equazione:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

è analoga alla equazione che avevamo scritto per il moto traslatorio:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

che stabiliva che la derivata rispetto al tempo della quantità di moto di una particella è uguale alla forza che agisce su di essa, e che implicava che:

$$d\mathbf{p} = \mathbf{F} dt \rightarrow \Delta\mathbf{p} = \int \mathbf{F}(t) dt \quad (\text{teorema «impulso – variazione quantità di moto»})$$

Ci aspettiamo pertanto che risulti anche che:

$$d\mathbf{L} = \boldsymbol{\tau} dt \rightarrow \Delta\mathbf{L} = \int \boldsymbol{\tau}(t) dt$$

Momento angolare di un sistema di particelle

Il caso trattato riguardava una singola particella. Nel caso di un sistema di più particelle, dovremo tenere in conto la **somma vettoriale** di tutti i momenti angolari di ogni particella rispetto allo stesso punto di riferimento O .

A variare del tempo, a seconda delle forze (o meglio dei loro momenti) agenti sul sistema, potrà essere osservata una variazione $d\mathbf{L}/dt$. In linea di principio, questa variazione potrebbe essere imputabile a due cause:

- a) Vi sono momenti di forze interne al sistema di particelle
- b) Vi sono momenti di forze esterne al sistema di particelle

Tuttavia, in base alla III legge di Newton, le forze fra coppie di particelle, non solo sono eguali e contrarie, ma sono **dirette lungo la linea che unisce le particelle** e pertanto il momento risultante è nullo.

Possiamo pertanto affermare che **per ogni sistema di particelle**:

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{est}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

E cioè: la rapidità con cui varia il momento angolare rispetto ad un dato punto è uguale alla somma dei momenti delle forze esterne che agiscono sul sistema rispetto a quello stesso punto.

Poiché un corpo rigido è un particolare caso di un sistema di particelle (nel caso specifico le distanze relative delle particelle sono fisse), **la relazione dovrà valere anche per il caso di un corpo rigido**. Avevamo già visto che in un corpo rigido risulta:

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{est}} = I \boldsymbol{\alpha}$$

dove $\boldsymbol{\tau}$ è il momento risultante delle forze esterne, I è il momento di inerzia del corpo e $\boldsymbol{\alpha}$ è la sua accelerazione angolare.

Confrontando la

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{est}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

con la

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{est}} = I \boldsymbol{\alpha}$$

risulta:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = I \boldsymbol{\alpha}$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = I \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$$

nel caso in cui $I = \text{costante}$ questa può essere scritta:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (I \boldsymbol{\omega})$$

e cioè: $\mathbf{L} = I \boldsymbol{\omega}$

E cioè: **il momento angolare di un corpo rigido è il prodotto del suo momento di inerzia per la sua velocità angolare.**

Si noti l'analogia della formula:

$$\mathbf{L} = I \boldsymbol{\omega}$$

con la formula relativa al moto traslatorio:

$$\mathbf{p} = m \mathbf{v}$$

Risulta quindi

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d}{dt} (I \boldsymbol{\omega})$$

Se $I = \text{costante}$ risulta, come avevamo già mostrato, che $\boldsymbol{\tau} = I \boldsymbol{\alpha}$

Riassumendo:

come in dinamica traslatoria per massa costante si ha

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a}$$

In dinamica rotatoria si ha per un corpo rigido

$$\boldsymbol{\tau} = I \boldsymbol{\alpha}$$

E così come la $\mathbf{F} = m \mathbf{a}$ poteva essere formulata [nel caso più generale caso di una massa variabile](#) con la formula:

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} (m \mathbf{v}) = \frac{d}{dt} \mathbf{p}$$

Per il momento angolare avremo [in generale per momenti di inerzia variabili](#):

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d}{dt} (I\boldsymbol{\omega}) = \frac{d}{dt} \mathbf{L}$$

Per la dinamica del **moto rotatorio attorno ad un asse fisso di un corpo rigido** si definiranno pertanto una serie di grandezze perfettamente analoghe a quelle del moto rettilineo di una particella

Moto rettilineo di una particella		Moto rotatorio di un corpo rigido	
Spostamento	x	Spostamento angolare	θ
Velocità	$v = dx/dt$	Velocità angolare	$\omega = d\theta/dt$
Accelerazione	$a = dv/dt$	Accelerazione angolare	$\alpha = d\omega/dt$
Massa	m	Momento di inerzia	I
Forza	$F = ma$	Momento della forza	$\tau = I \alpha$
Lavoro	$\int F dx$	Lavoro	$\int \tau d\theta$
Energia cinetica	$\frac{1}{2} m v^2$	Energia cinetica	$\frac{1}{2} I \omega^2$
Quantità di moto	mv	Momento angolare	$I \omega$

Conservazione del momento angolare

Dalla relazione, valida per ogni sistema di particelle,

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{est}} = \frac{d}{dt} (I\boldsymbol{\omega}) = \frac{d}{dt} \mathbf{L}$$

risulta che :

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{est}} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} \mathbf{L} = 0$$

Cioè: **quando il momento risultante delle forze applicate ad un sistema è nullo, il momento angolare è costante.**

Cioè: **il momento angolare di un sistema isolato è costante**

Quindi: **in un sistema isolato**

$$I \boldsymbol{\omega} = \text{costante}$$

Se durante il moto rotatorio cambia la distribuzione delle masse (e quindi cambia I) cambierà di conseguenza ω , un fenomeno largamente usato da atleti e ballerini !!!



Alto momento d'inerzia:
pesi lontani dal centro
Bassa velocità di rotazione



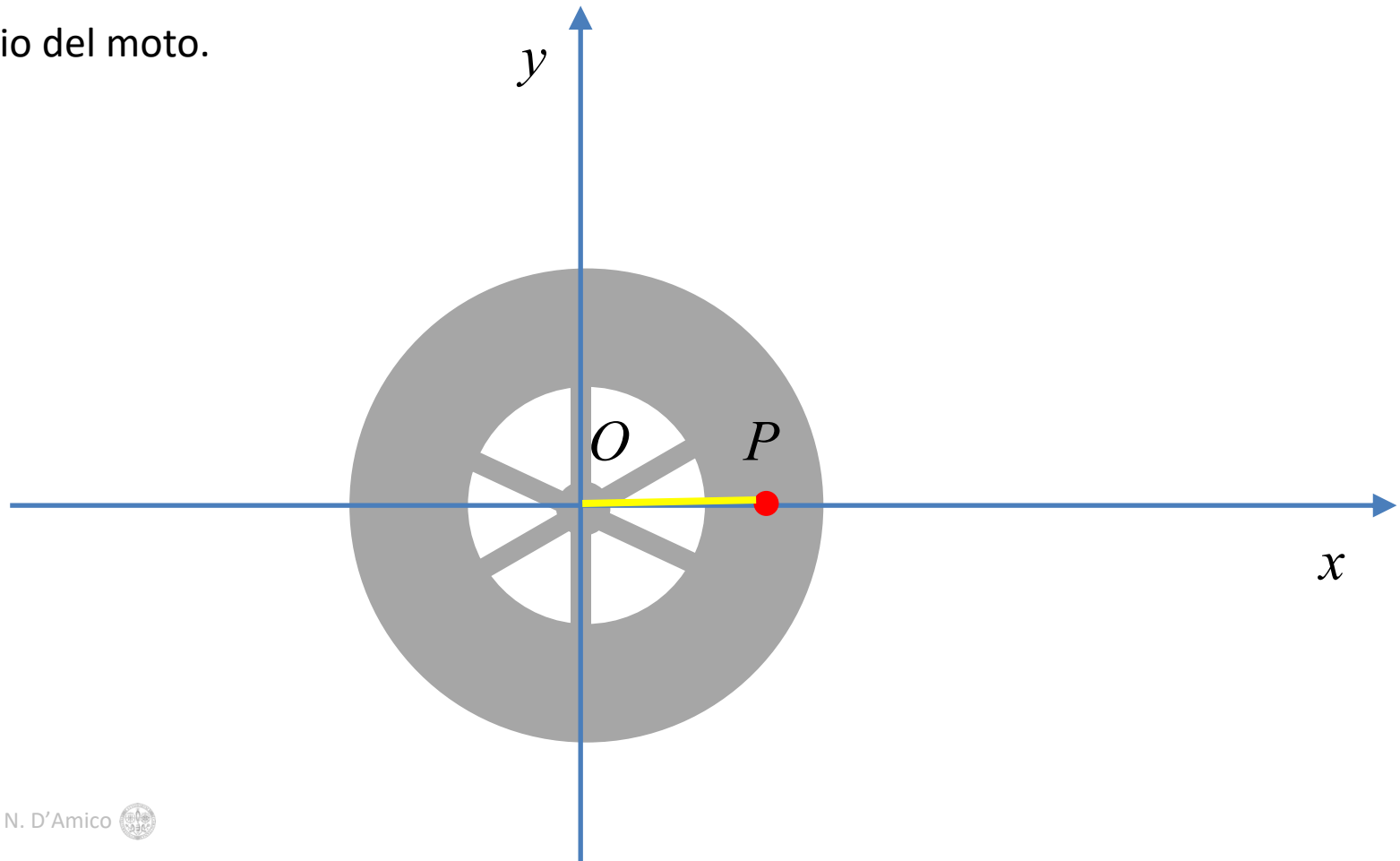
Basso momento d'inerzia:
pesi vicini al centro
Alta velocità di rotazione

Moti rotatori:

Esempi

Esempio A :

Una ruota ha una accelerazione angolare costante pari a 3 rad/sec^2 . All'inizio del moto il segmento $O-P$ è fermo e orizzontale. Determinare: a) lo spostamento angolare del segmento $O-P$ (e quindi della ruota); e b) la velocità angolare della ruota 2 sec dopo l'inizio del moto.



*Rivediamo i concetti che abbiamo studiato a
riguardo e che ci servono
per risolvere il quesito*

Abbiamo stabilito di studiare questo tipo di moto **separando** il moto traslatorio dal moto rotatorio. Abbiamo applicato in sostanza il **principio di sovrapposizione**.

Cioè: **ad ogni istante** lo stato del corpo è definibile in base ad una **traslazione + una rotazione**

Analogia fra le grandezze cinematiche lineari e quelle angolari

Caso lineare		Caso rotazionale	
x	[L]	θ	[]
$v = dx / dt$	[L T ⁻¹]	$\omega = d\theta / dt$	[T ⁻¹]
$a = dv/dt = d^2x/dt^2$	[L T ⁻²]	$\alpha = d\omega/dt = d^2\theta/dt^2$	[T ⁻²]

Le dimensioni lineari differiscono dalle corrispondenti dimensioni angolari per un fattore avente dimensione di una lunghezza, il che deriva dalla definizione di radiante $\theta = s / R$ che è un numero puro, essendo il rapporto fra due lunghezze

Rotazione con accelerazione angolare costante

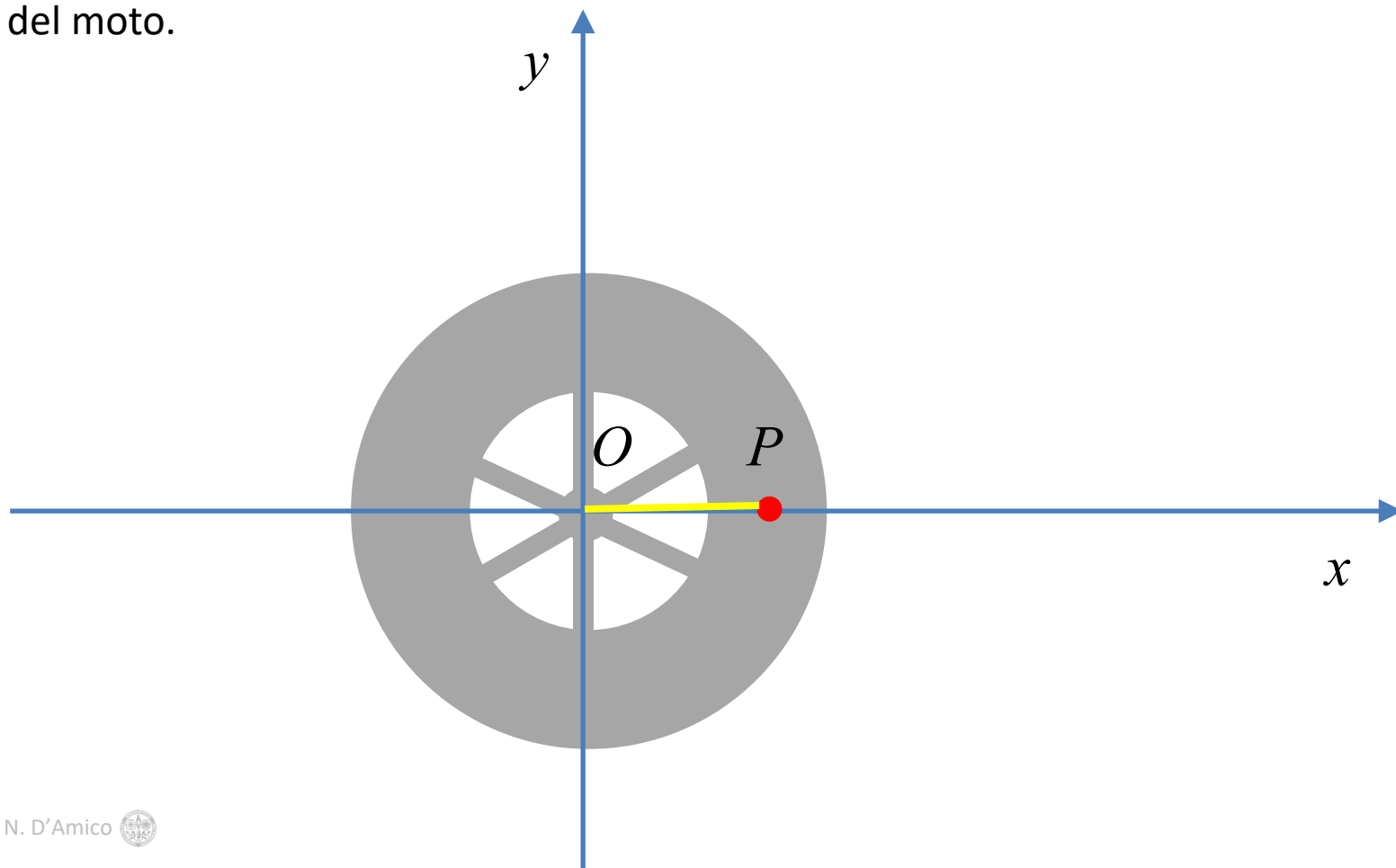
Il caso più semplice di un moto rotatorio è quello che avviene con **accelerazione costante**

In questo caso le equazioni del moto sono del tutto analoghe a quelle lineari (moto traslatorio):

Moto traslatorio	Moto rotatorio
$v = v_0 + a t$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$x = \frac{1}{2} (v_0 + v) t$	$\theta = \frac{1}{2} (\omega_0 + \omega) t$
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$

Torniamo quindi al quesito:

Una ruota ha una accelerazione angolare costante pari a 3 rad/sec^2 . All'inizio del moto il segmento $O-P$ è fermo e orizzontale. Determinare: a) lo spostamento angolare del segmento $O-P$ (e quindi della ruota); e b) la velocità angolare della ruota 2 sec dopo l'inizio del moto.



(a) L'accelerazione angolare α e il tempo t sono dati, vogliamo trovare θ . Quindi useremo la

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

All'inizio del moto $t = 0$ si ha: $\theta_0 = 0$, $\omega_0 = 0$, $\alpha = 3 \text{ rad/sec}^2$

Dopo 2 sec si avrà:

$$\theta = 0 + 0 \times 2 \text{ sec} + \frac{1}{2} (3 \text{ rad/sec}^2) (2 \text{ sec})^2 = 6 \text{ rad}$$

(b) l'accelerazione α e il tempo t sono dati, vogliamo ottenere ω , quindi useremo la:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

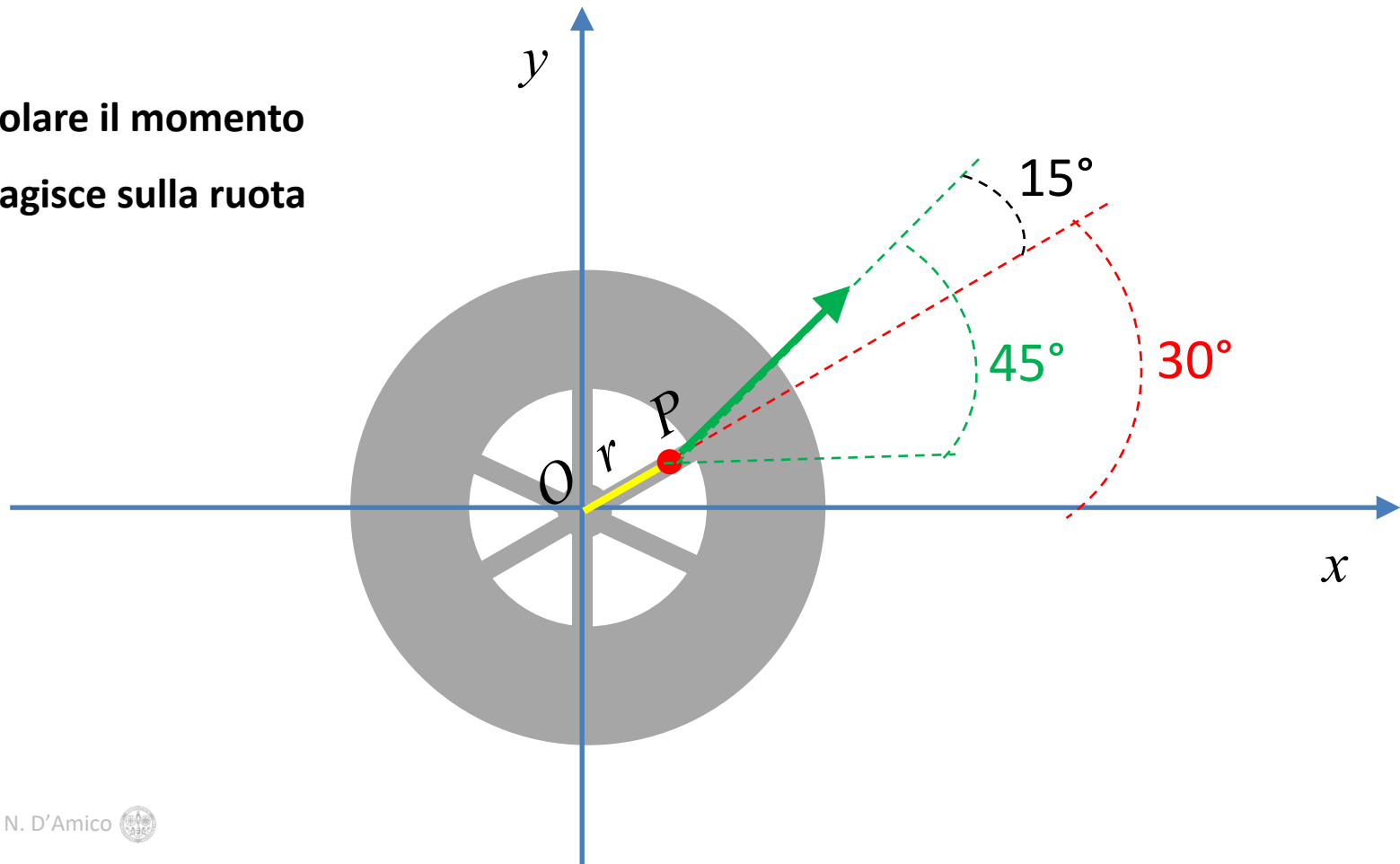
e cioè:

$$\omega = 0 + (3 \text{ rad/sec}^2) (2 \text{ sec}) = 6 \text{ rad/sec}$$

Se in un esempio del genere interviene una forza ci potrebbe essere chiesto di calcolarne il momento...

Una ruota è libera di ruotare attorno ad un asse orizzontale passante per l'origine O di un sistema di assi x - y come in figura. Una forza $F = 10 \text{ N}$ è applicata ad un raggio r in punto P distante $r = 1,0 \text{ m}$ dal centro. Il segmento O - P forma un angolo di 30° con l'asse x . La forza agisce nel piano x - y formando un angolo di 45° con l'asse x

**Calcolare il momento
che agisce sulla ruota**



Applichiamo la definizione di momento di una forza:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

dove il simbolo \times rappresenta il **prodotto vettoriale** fra \mathbf{r} e \mathbf{F}

Il modulo di $\boldsymbol{\tau}$ è dato dalla relazione:

$$\tau = r F \sin \theta$$

In questo caso l'angolo θ è dato da:

$$\theta = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$$

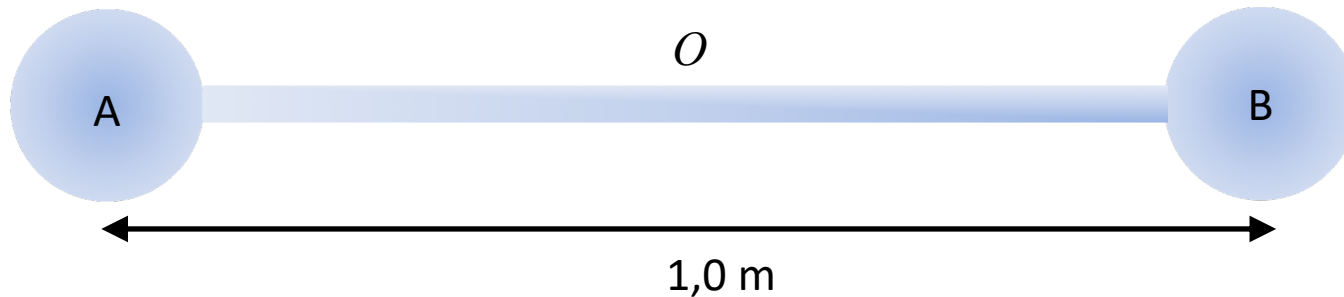
Pertanto il modulo del momento è dato da

$$\tau = r F \sin \theta = (1,0 \text{ m}) (10 \text{ N}) (\sin 15^\circ) = 2,6 \text{ N-m}$$

Si tratterà di un momento lungo l'asse z . Riguardo al verso, applicando la regola della mano destra troveremo che punta verso di noi.

Esempio B:

Si consideri un corpo costituito da due sfere A e B di massa $m = 5,0$ kg ciascuna, collegate da un'asta leggera ma rigida di lunghezza 1,0 metro, come in figura.



Si trattino le sfere come masse puntiformi e si trascuri la massa dell'asta.

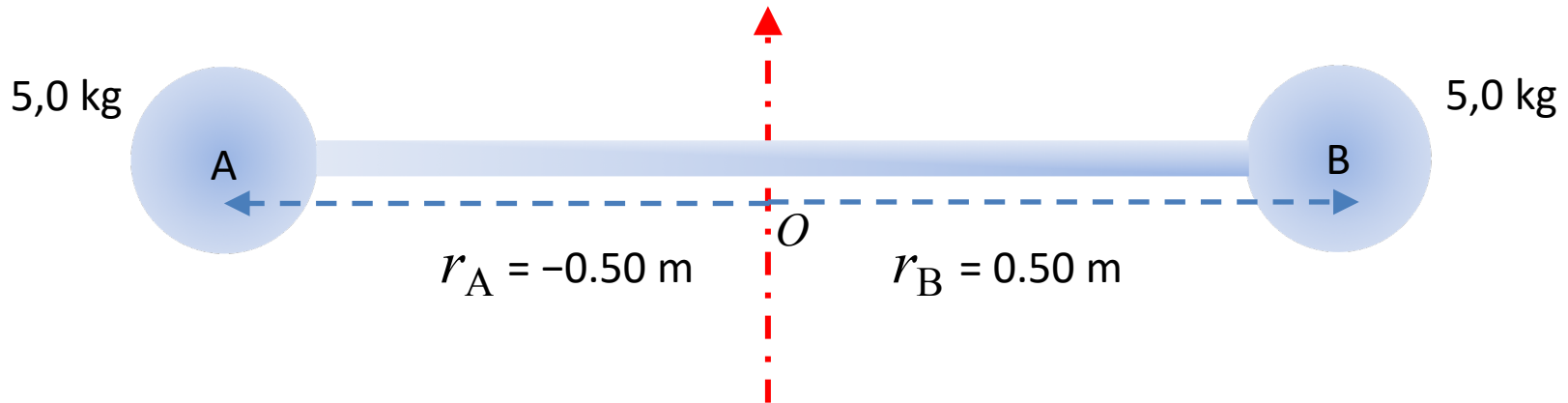
Calcolare il momento di inerzia del corpo:

- Rispetto ad un asse ortogonale all'asta e passante per il punto centrale O
- Rispetto ad un asse parallelo al precedente ma passante per una delle due sfere

Riscriviamo la formula per il momento di inerzia nel caso di masse puntiformi:

$$I = \sum (m_i r_i^2)$$

Nel caso in cui l'asse passa per O ed è ortogonale all'asta:

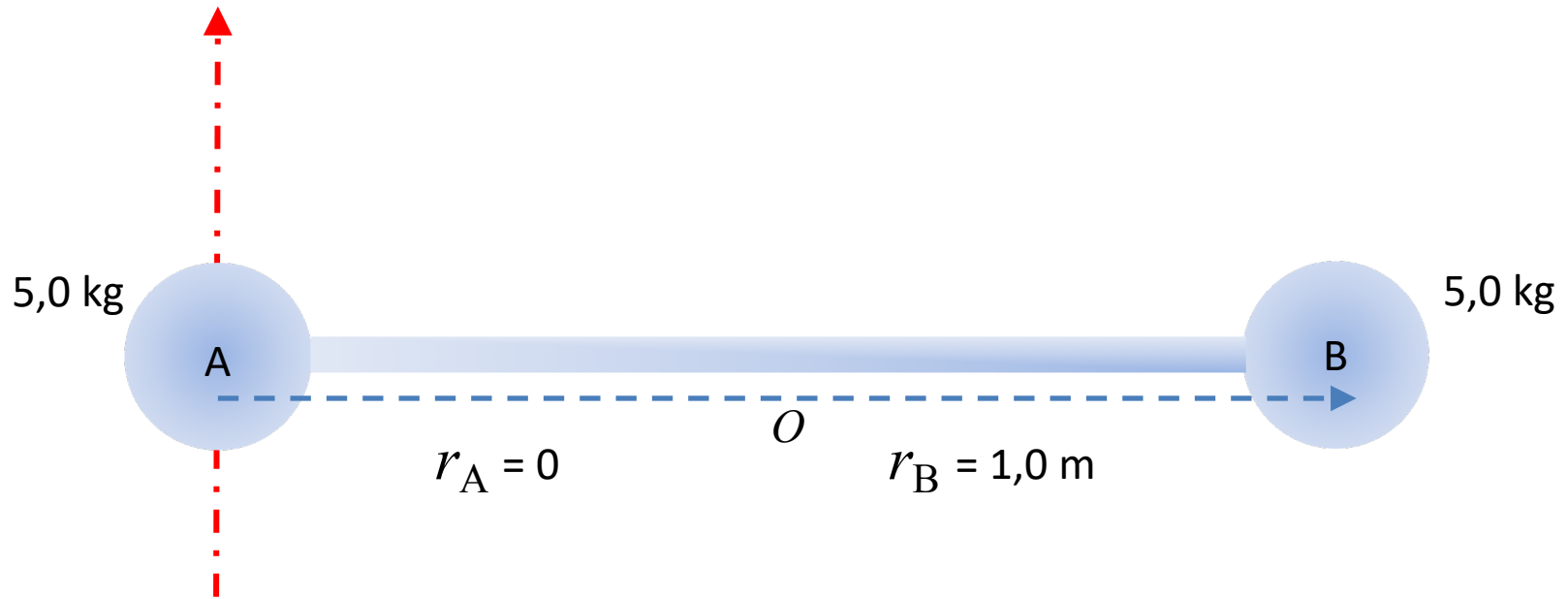


$$I = m_A r_A^2 + m_B r_B^2$$

$$I = (5,0 \text{ kg}) (0,50 \text{ m})^2 + (5,0 \text{ kg}) (0,50 \text{ m})^2$$

$$I = 5,0 \times 0,25 + 5,0 \times 0,25 = 2,5 \text{ kg m}^2$$

Nel caso in cui l'asse passa per una delle due masse ed è ortogonale all'asta:



$$I = m_A r_A^2 + m_B r_B^2$$

$$I = (5,0 \text{ kg}) (0 \text{ m})^2 + (5,0 \text{ kg}) (1,0 \text{ m})^2$$

$$I = 5,0 \times 0 + 5,0 \times 1,0 = 5,0 \text{ kg m}^2$$