Funzioni di Piu` Variabili

Prof. Simone Sbaraglia

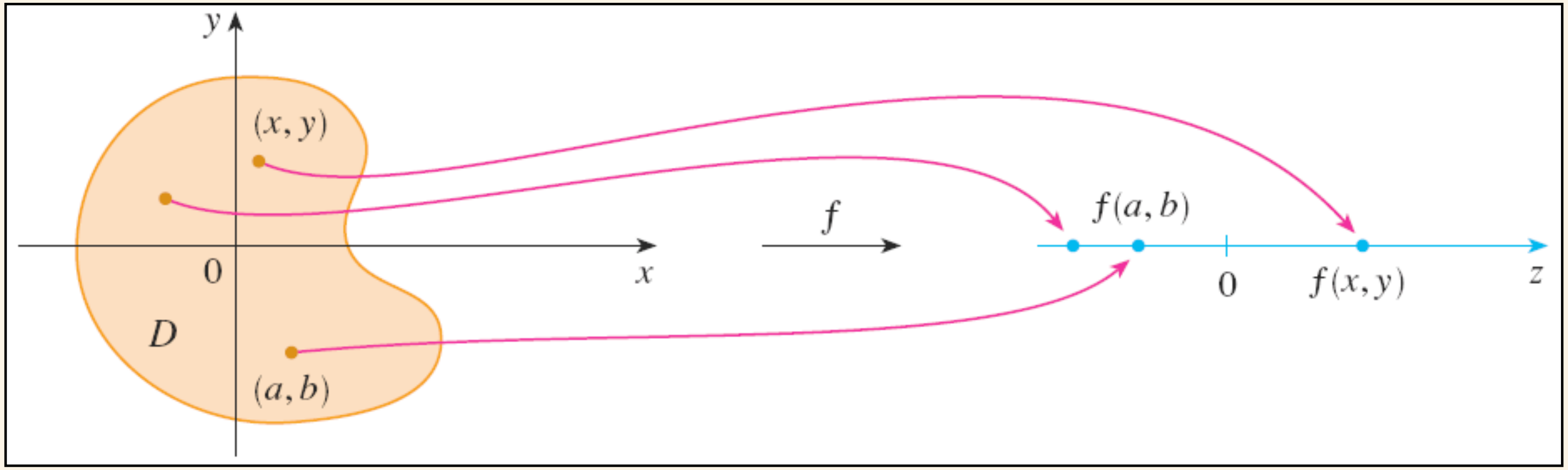
Funzioni di Piu` Variabili

Finora ci siamo occupati dell'analisi delle funzioni di una sola variabile.

Tuttavia, nel mondo reale, le funzioni spesso dipendono da piu` variabili.

Per semplicita` considereremo principalmente funzioni di due variabili reali *x* and *y*.

Una funzione di due variabili, *f(x,y),* e` una regola che assegna ad ogni coppia ordinata di numeri reali *(x,y)* un unico numero reale.



Dominio

Il dominio e` un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ mentre l'immagine e` un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

Come al solito, se il dominio non e` esplicitamente indicato si assume che sia il piu` grande sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ in cui l'espressione ha senso.

Esempi:

1. $f(x,y) = x^2 + y^2 \Rightarrow D = \mathbb{R}^2$
2. $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
3. $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

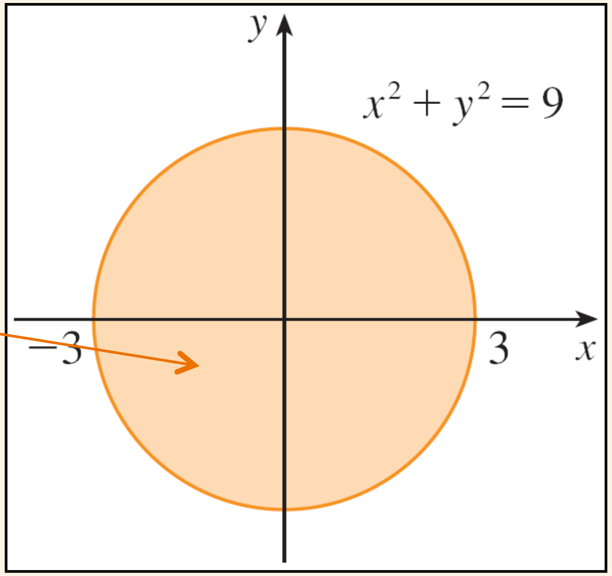
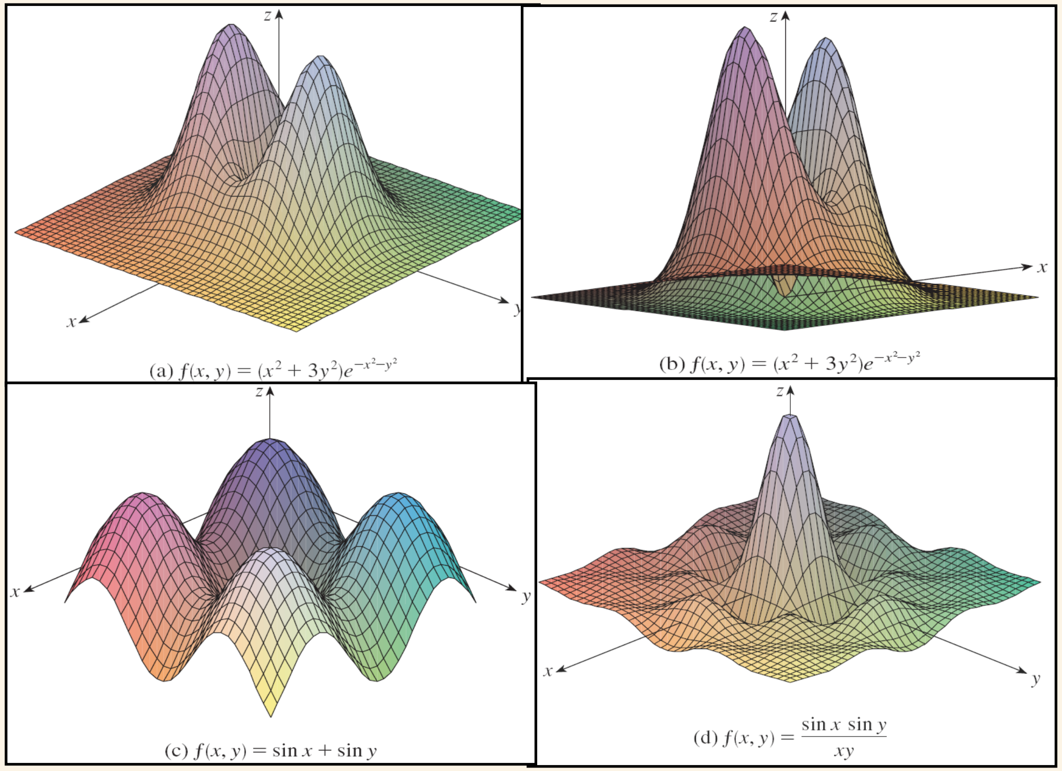


Grafico e Curve di Livello

Il grafico di una funzione $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e` l'insieme di tutti i punti $(x, y, z) : (x, y) \in D$ e $z = f(x, y)$.

Quindi, il grafico puo` essere rappresentato come una superficie nello spazio cartesiano tridimensionale.



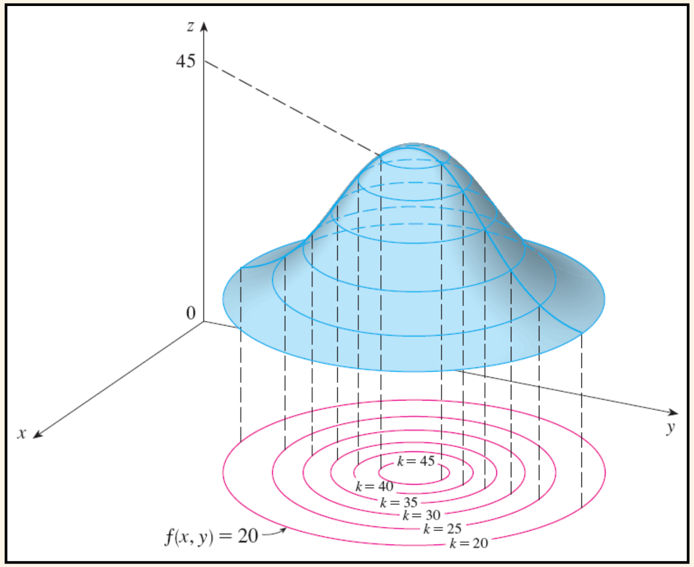
(a) $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$

(b) $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$

(c) $f(x, y) = \sin x + \sin y$

(d) $f(x, y) = \frac{\sin x \sin y}{xy}$

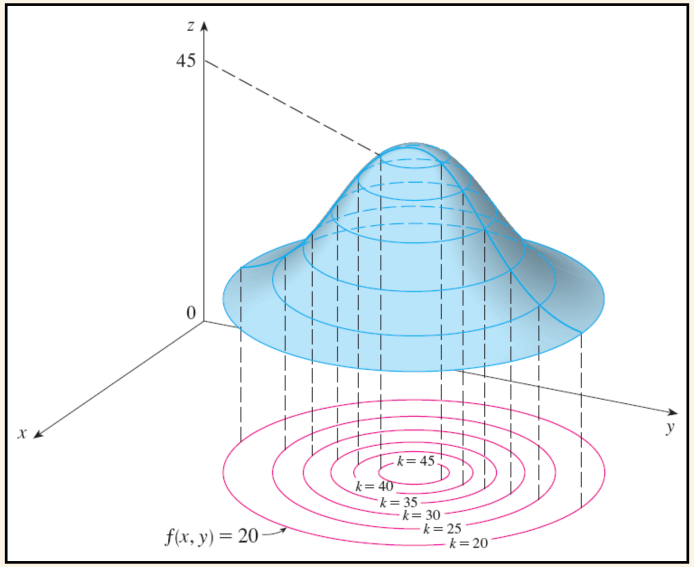
Un altro metodo per visualizzare una funzione
e` tramite le curve di livello.



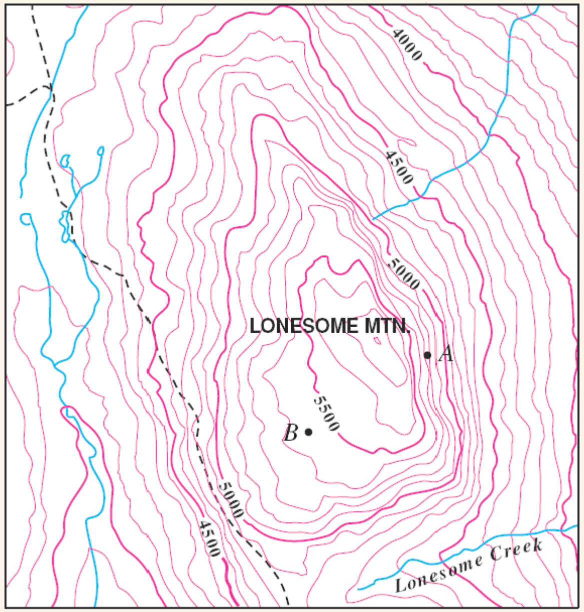
Curve di Livello

Le curve di livello di f sono le curve bidimensionali nel dominio D con equazione $f(x,y)=k$.

La curva di livello k e` l'insieme di tutti i punti del dominio la cui immagine e` k cioe` l'insieme di tutti i punti del dominio in cui il grafico ha altezza k.

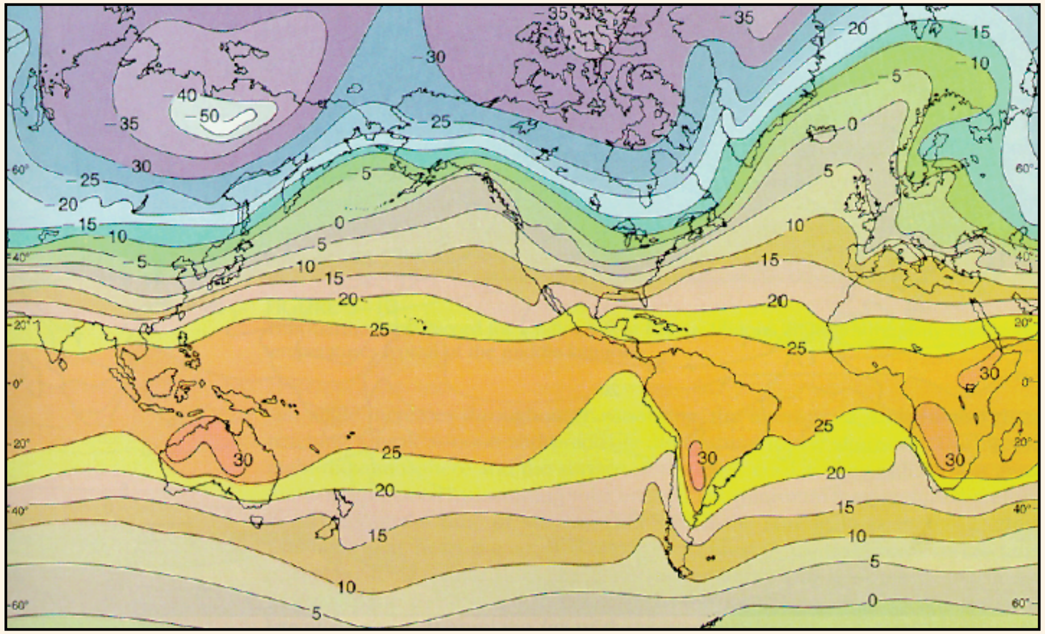


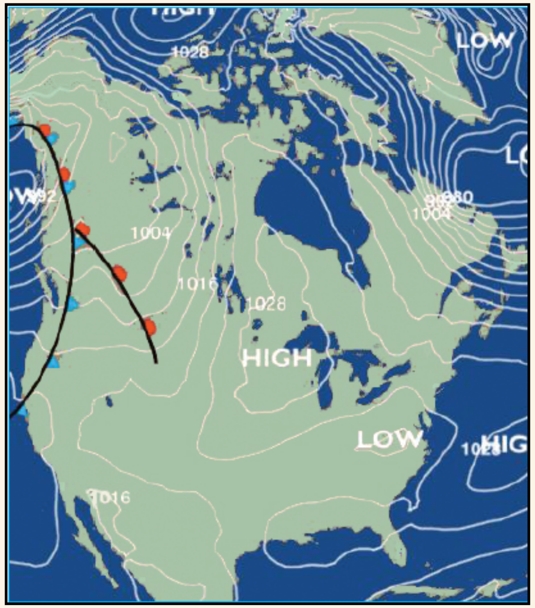
Un esempio sono le curve di livello utilizzate nelle carte topografiche.

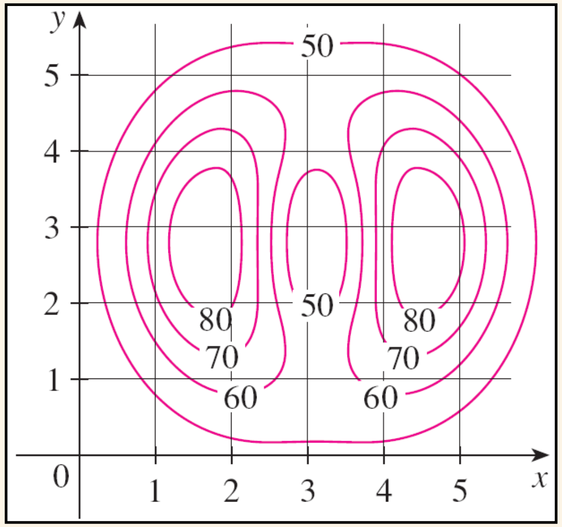


Curve di Livello

Altri esempi sono le curve isoterme ed isobare:







Esempio:

data una funzione rappresentata dalle seguenti curve di livello, stimare $f(1,3)$ e $f(4,5)$.

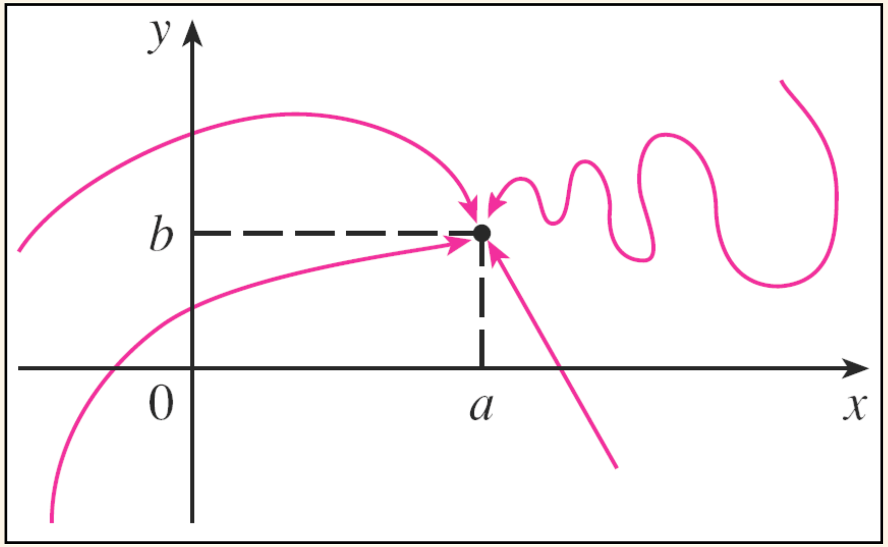
Limiti

La definizione di limite di una funzione di piu` variabili e` identica al caso 1D. Diremo che:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

se possiamo rendere i valori di *f(x,y)* arbitrariamente vicini ad *L* prendendo *(x,y)* sufficientemente vicino ad *(a,b)*.

La differenza principale qui e` che mentre possiamo avvicinarci ad un numero reale solo da sinistra o da destra, possiamo avvicinarci ad un punto 2D *(a,b)* in infiniti modi!



Se il limite e` *L* questo significa che tutti gli infiniti modi di avvicinarsi producono tutti lo stesso risultato *L.*

Quindi, in questo contesto, limite destro e sinistro non hanno senso.

Limiti

Esempio:

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = ?$ Se ci avviciniamo lungo l'asse x allora $y=0 \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2}{x^2} = 1.$

Se ci avviciniamo lungo l'asse y allora $x=0 \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} -\frac{y^2}{y^2} = -1.$

Quindi il limite non esiste.

Esempio:

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3y^2}{x^4+y^8} = ?$ Se ci avviciniamo lungo x o y o $y=x^2$ il limite e\` sempre zero.

Tuttavia, se ci avviciniamo lungo la curva $y=\sqrt{x}$ allora il limite e\` $1.$

Quindi il limite non esiste.

Continuita`

Il significato intuitivo di continuita` e` ancora lo stesso: se il punto *(x,y)* varia di una quantita` piccola allora il valore di *f(x,y)* cambia di una quantita` piccola.

La funzione $f(x,y)$ e` continua in (x_0, y_0) se

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0)$$

Dunque il grafico di una funzione continua e` una superficie senza interruzioni o buchi.

Derivate Parziali

Vogliamo generalizzare il concetto di derivata.

Se $f(x)$ e` funzione di una sola variabile x, allora sappiamo che $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Ora, supponiamo che $f(x, y)$ e` funzione delle due variabili x ed y e sia $(x_0, y_0) \in D$.

Possiamo mantenere una variabile ferma e lasciar variare l'altra. Quello che otteniamo e` in realta` una funzione di una sola variabile (quella che varia). Possiamo dunque derivarla come al solito:

$$f_x(x_0, y_0) := \frac{d}{dx} f(x, y_0)\Big|_{x = x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Se questo limite esiste ed e` finito, si chiama derivata parziale di f rispetto ad x in (x_0, y_0) e si indica con

$$\frac{\partial f}{dx}(x_0, y_0),\ D_x f(x_0, y_0),\ f_x(x_0, y_0).$$

$$f_y(x_0, y_0) := \frac{d}{dy} f(x_0, y)\Big|_{y = y_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Se questo limite esiste ed e` finito, si chiama derivata parziale di f rispetto ad y in (x_0, y_0) e si indica con

$$\frac{\partial f}{dy}(x_0, y_0),\ D_y f(x_0, y_0),\ f_y(x_0, y_0).$$

Derivate Parziali

Esempio:

$$f(x,y)=e^{xy} \Rightarrow f_x(x,y)=ye^{xy},\ f_y(x,y)=xe^{xy}$$

$$f(x,y)=\ln(xy) \Rightarrow f_x(x,y)=\frac{1}{x},\ f_y(x,y)=\frac{1}{y}$$

Analogamente a quanto fatto per funzioni di una variabile, possiamo considerare le derivate parziali come funzioni e derivarle ulteriormente. Otteniamo le seguenti quattro derivate parziali del secondo ordine:

$$f_{xx}(x,y),\ f_{xy}(x,y),\ f_{yx}(x,y),\ f_{yy}(x,y)$$

Teorema (Schwarz)

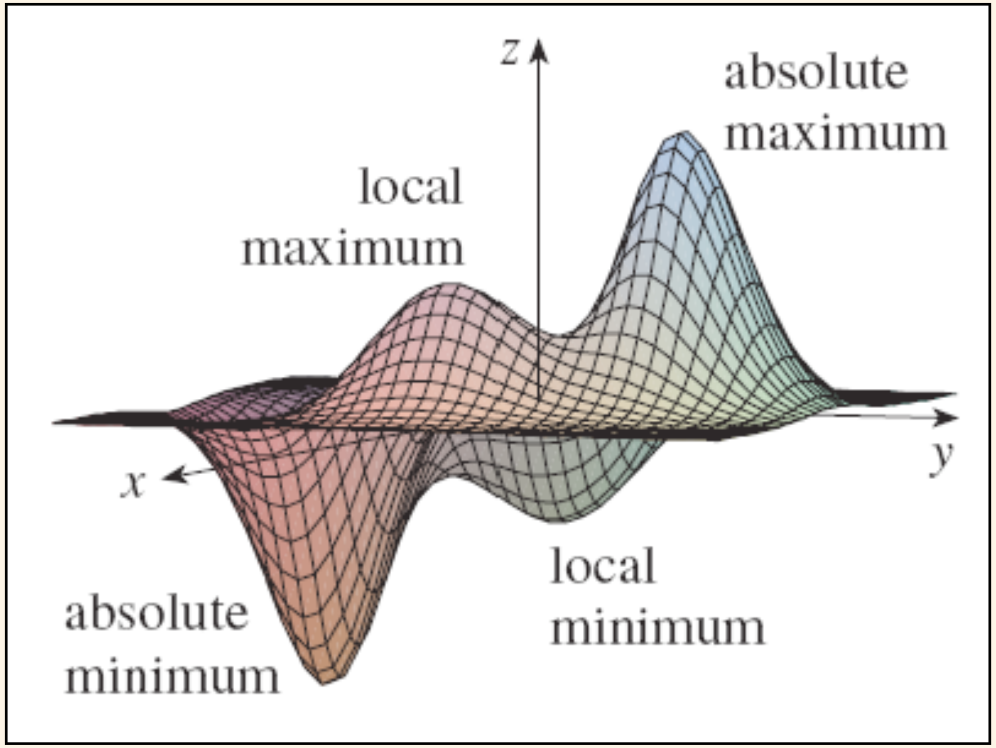
Se f_{xy} ed f_{yx} sono funzioni continue in un intorno di (x_0,y_0), tranne al piu\` (x_0,y_0), allora

$$f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0).$$

Punti di Estremo Locale

Diremo che (x_0, y_0) e` un massimo locale se $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ per ogni (x, y) vicino ad (x_0, y_0).

Diremo che (x_0, y_0) e` un minimo locale se $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ per ogni (x, y) vicino ad (x_0, y_0).



Punti di Estremo Locale

Ora, portando avanti l'analogia con il caso 1D, vogliamo trovare condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di punti di estremo locale.

Condizioni Necessarie del Primo Ordine

Caso Una Variabile:

x_0 e` punto di estremo locale e f derivabile in $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$

Caso Due Variabili:

(x_0, y_0) e` punto di estremo locale e f_x e f_y esistono in $(x_0, y_0) \Rightarrow f_x(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0) = 0$

Nota: un punto in cui entrambe le derivate parziali sono zero si chiama punto stazionario. La condizione si puo` leggere come "ogni punto di estremo in cui esistono le derivate e` un punto stazionario".

Punti di Estremo Locale

Per quanto riguarda le condizioni sufficienti, nel caso di una variabile avevamo che:

Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0)$ esiste, allora

1. $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ e` un minimo locale
2. $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ e` un massimo locale
3. $f''(x_0) = 0 \Rightarrow$ il test non fornisce informazioni.

Analogamente, abbiamo la seguente condizione:

Teorema (Condizioni Sufficienti del Secondo Ordine)

Supponiamo che (x_0, y_0) sia un punto stazionario e consideriamo

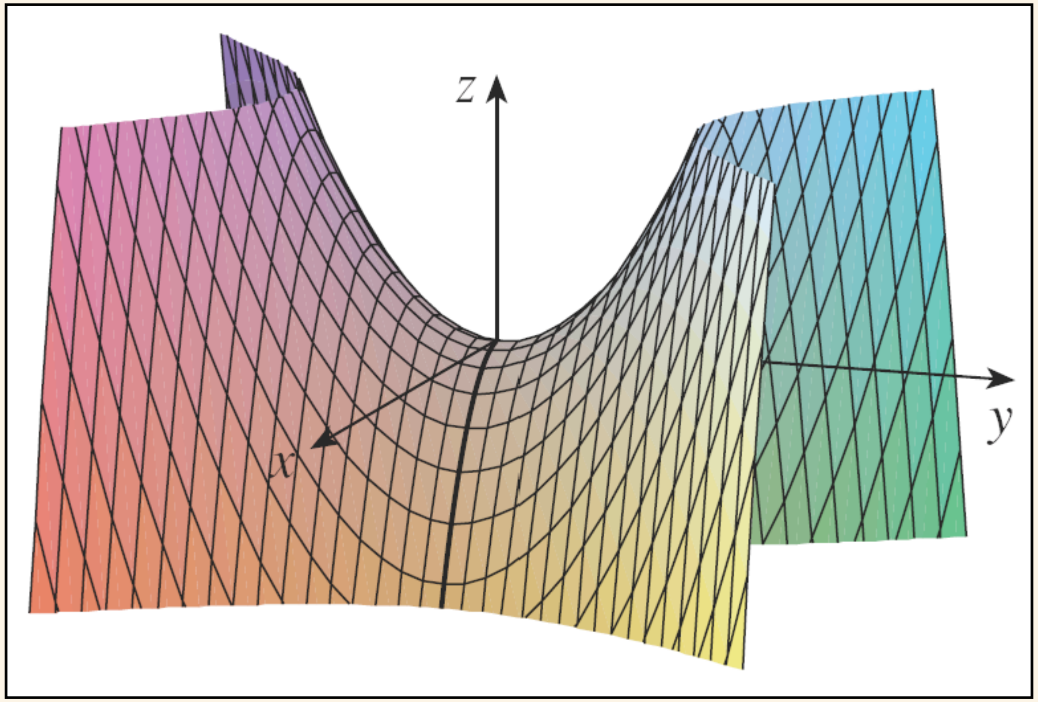
$D(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}(x_0, y_0) \cdot f_{yx}(x_0, y_0)$

1. $D(x_0, y_0) > 0,\ f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ e` un minimo locale
2. $D(x_0, y_0) > 0,\ f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ e` un massimo locale
3. $D(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ non e` ne` massimo ne` minimo (punto di sella)
4. $D(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow$ il test non fornisce informazioni.

Punti di Estremo Locale

Esempio di punto sella: *(0,0)* e\` punto di massimo nella direzione *x* e punto di minimo nella direzione *y*.

Vicino l'origine il grafico ha la forma di una sella.



Punti di Estremo Locale

Esempio:

$$f(x,y) = 2x^3 + 6xy + y^2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 6x^2 + 6y = 0 \\ 6x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (0,0),\ (3,-9)$$

$D(x,y) = 24x - 36 = 12(2x - 3) \Rightarrow$

$D(0,0) = -36 < 0 \Rightarrow (0,0)$ non e` ne` massimo ne` minimo.

$D(3,-9) = 72 - 36 = 36 > 0,\ f_{xx}(3,-9) = 12 \cdot 3 = 36 > 0 \Rightarrow (3,-9)$ e` minimo locale.

Ottimizzazione Vincolata

Risolvere un "Problema di Ottimizzazione" significa trovare i punti di massimo o minimo locale o globale di una funzione. Il problema ha vaste applicazioni in tutti i campi.

La maggior parte delle volte non ha senso cercare un massimo o minimo a meno che non si impongano vincoli aggiuntivi.

Supponiamo che L rappresenti il lavoro e K il capitale e che la funzione di produzione che descrive l'output della produzione come funzione dell'input di lavoro e capitale sia la funzione di Cobb-Douglas:
$f(L,K) = AL^{\alpha}K^{1-\alpha}$ dove $A > 0, \alpha \in (0,1)$.

Se vogliamo massimizzare la produzione, dobbiamo trovare il massimo assoluto di f. Tuttavia, questo non ha senso dal momento che f e` illimitata ed il suo sup e` quindi $+\infty$ (non ha massimo). In altre parole l'unica risposta che otteniamo e` che per massimizzare la produzione abbiamo bisogno di lavoro e capitale infiniti.

La domanda corretta e` la seguente: non vogliamo semplicemente massimizzare la produzione, vogliamo massimizzare la produzione mantenendo un vincolo di bilancio, dal momento che non abbiamo un capitale ed un lavoro infiniti. Il vincolo puo` essere espresso come:

$$c_L \cdot L + c_K \cdot K = b$$

dove c_L e` il costo unitario del lavoro, $c_K$ e` il costo unitario del capitale e b e` il budget totale disponibile.

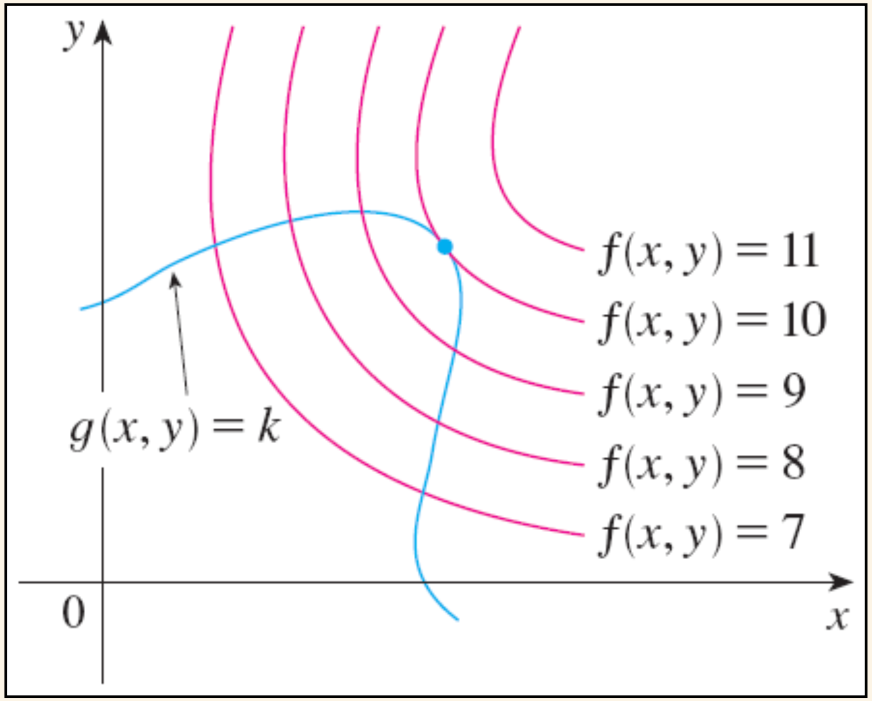
Ottimizzazione Vincolata

Il problema di ottimizzazione e` diventato un problema di ottimizzazione vincolata: trovare il massimo di $f(x, y)$ con il vincolo $g(x, y) = 0$,dove nel nostro esempio:

$f(x, y) = A \cdot L^{\alpha} K^{1-\alpha}$ e $g(x, y) = c_L \cdot L + c_K \cdot K - b.$

Esempio:

$\max f(x, y)$ sotto il vincolo $g(x, y) = k$



Esempio di ottimizzazione vincolata:

il massimo della funzione le cui curve di livello sono mostrate in figura sarebbe *11,* tuttavia il vincolo che il massimo deve trovarsi sulla curva *g* rende il massimo vincolato uguale a *10..*

Risolvere un problema di ottimizzazione vincolata e` equivalente a trovare il massimo valore di c tale che le curve di livello *f(x,y)*=c intersecano la curva del vincolo.

Ottimizzazione Vincolata

Torniamo ora al problema di ottimizzazione vincolata: massimizzare $f(x,y)$ sotto il vincolo $g(x,y)=0$.

Come risolvere questo problema? L'idea fondamentale e` la seguente: piuttosto che imporre il vincolo rigidamente, assumiamo che sia possibile violare il vincolo ma che questa violazione generi un costo di cui tenere conto nell'ottimizzazione. Iniziamo con un'analogia.

Supponiamo che un contadino coltivi pomodori e patate (x ed y rispettivamente) in un campo di area b.
Sia $f(x,y)$ il guadagno derivante dalla vendita di x pomodori ed y patate. Chiaramente il contadino desidera massimizzare f che rappresenta il suo guadagno. Tuttavia la risposta banale nel caso di ottimizzazione non vincolata sarebbe: "coltiva infinite patate ed infiniti pomodori" ma questo non e` possibile perche` richiederebbe un'area infinita.
Dunque, e` necessario massimizzare $f(x,y)$ sotto il vincolo $h(x,y)=b$ dove $h(x,y)$ e` l'area usata per coltivare x pomodori ed y patate. Oppure, in altre parole, $g(x,y)=0$ dove $g(x,y)=b-h(x,y)$.

L'idea chiave e`: il contadino potrebbe violare il vincolo dell'area. Ad esempio se ha bisogno di un'area maggiore di quella (b) che possiede potrebbe affittare un'altro campo (ma questo ovviamente avrebbe un costo). D'altra parte se il contadino utilizzasse meno area di quella a disposizione potrebbe dare in affitto una parte del suo campo (il che genererebbe un guadagno).

Ottimizzazione Vincolata

Se $g(x,y) = b - h(x,y) > 0$ il contadino non sta usando tutto il suo campo ed affitta l'area rimasta libera $b - h(x,y)$ a prezzo di mercato λ. Dunque, ottiene un guadagno addizionale $\lambda \cdot (b - h(x,y)) = \lambda \cdot g(x,y)$.

Se, d'altra parte, $g(x,y) = b - h(x,y) < 0$ allora il contadino sta usando un'area superiore a quella che possiede e dunque deve affittare l'area $b - h(x,y)$ al prezzo di mercato λ. Questa volta l'operazione comporta un costo e non un guadagno.

Dunque, qual'e` il profitto "reale" del contadino? E` il "profitto netto" (al netto del costo/guadagno del vincolo): $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = f(x,y) + \lambda\left(b - h(x,y)\right)$.

Il termine aggiuntivo tiene conto del costo o guadagno addizionale derivante dalla non soddisfazione del vincolo. Chiaramente se $g(x,y) = 0$ il contadino usa completamente il suo campo e dunque non ci sono ne` guadagni ne` costi aggiuntivi (si dice che il vincolo e` "attivo").

Il problema di ottimizzazione vincolata di partenza e` stato trasformato in un nuovo problema di ottimizzazione per la funzione $L$, in cui compare la variabile addizionale $\lambda$, ma il problema da vincolato e` diventato un problema di massimizzazione libera.

Ottimizzazione Vincolata

Dato il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$\max f(x,y)$ sotto il vincolo $g(x,y)=0$.

La funzione $L(x,y,\lambda) := f(x,y)+\lambda g(x,y)$ e` detta Funzione Lagrangiana e la variabile addizionale $\lambda$ e` detta Moltiplicatore di Lagrange.

Teorema

Supponiamo che f e g siano C^2 in $\mathbb{R}^2$ e supponiamo che (x^*,y^*,λ^*) tale che

1. $L_x(x^*,y^*,\lambda^*) = L_y(x^*,y^*,\lambda^*) = L_\lambda(x^*,y^*,\lambda^*) = 0$
2. $\left(g_x(x^*,y^*), g_y(x^*,y^*)\right) \neq (0,0)$
3. $\det H_{f,g}(x^*,y^*) \neq 0$ con $H_{f,g}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & f_{xx} & f_{xy} \\ g_y & f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$

allora (x^*,y^*) e` un punto di estremo di f sotto il vincolo $g=0$. Inoltre, se

1. $\det H_{f,g}(x^*,y^*) > 0 \Rightarrow (x^*,y^*)$ e` massimo
2. $\det H_{f,g}(x^*,y^*) < 0 \Rightarrow (x^*,y^*)$ e` minimo

Ottimizzazione Vincolata

Nota: se $\det H_{f,g}(x^*,y^*)=0$ allora il test non fornisce informazioni.

Nota: la condizione $\left(g_x(x^*,y^*),g_y(x^*,y^*)\right)\neq(0,0)$ significa (x^*,y^*) non stationario per g.

Questa condizione e` nota come qualificazione del vincolo ed e` necessaria per applicare il metodo esposto.

Esempio:

$$f(x,y)=4-x^2-y^2,\ g(x,y)=x+y-2\Rightarrow$$

$$L(x,y,\lambda)=4-x^2-y^2+\lambda\left(x+y-2\right)\Rightarrow$$

$$\begin{cases}-2x+\lambda=0\\-2y+\lambda=0\\x+y-2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\lambda}{2}\\y=\dfrac{\lambda}{2}\\\dfrac{\lambda}{2}+\dfrac{\lambda}{2}=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=2\\x=1\\y=1\end{cases}$$

$$H_{f,g}(x,y)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&-2&0\\1&0&-2\end{pmatrix}\Rightarrow\det H_{f,g}(1,1)=4>0\Rightarrow(1,1)$$ e` massimo vincolato.