# Lezione XVII

## (Moti rotatori:

### cinematica lineare vs cinematica rotazionale

## Intro alla dinamica

### Momento di una forza)

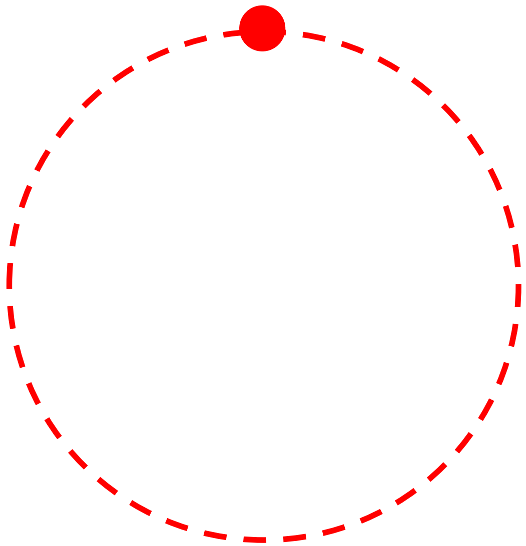
# FRUIZIONE E UTILIZZO DEI MATERIALI DIDATTICI

- **E' vietata** la **copia**, la **rielaborazione**, la **riproduzione** dei contenuti e immagini presenti nelle lezioni in qualsiasi forma

- **E' inoltre vietata** la **diffusione**, la **redistribuzione** e la **pubblicazione** dei contenuti e immagini, incluse le registrazioni delle videolezioni con qualsiasi modalità e mezzo non autorizzati espressamente dall'autore o da Unica

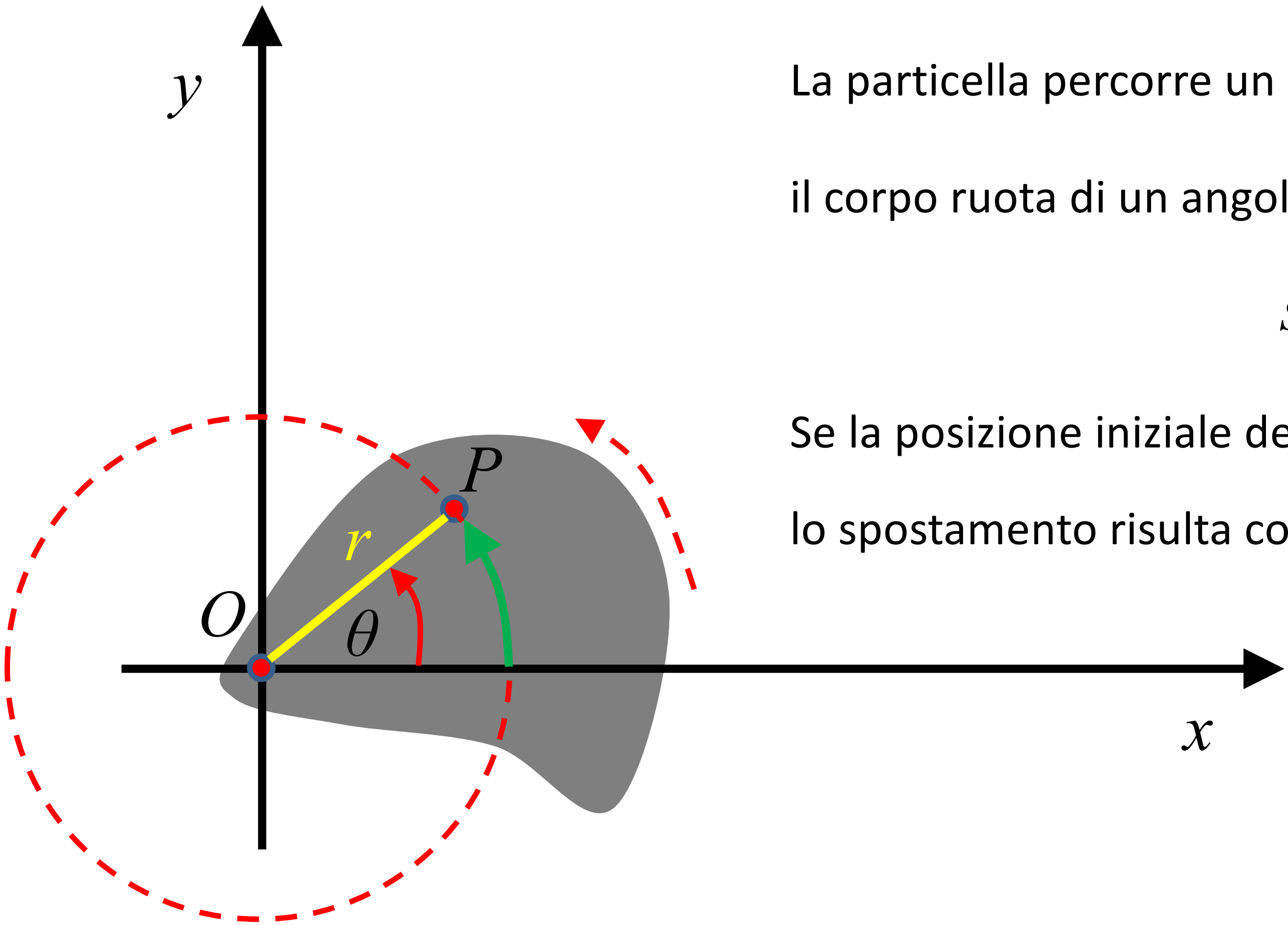
# Il caso di una particella che si muove di moto circolare: relazioni fra cinematica lineare e cinematica rotazionale

Abbiamo già studiato il caso di una particella che si muove di moto circolare, e lo abbiamo fatto nell'ambito della cinematica lineare:



Quando un corpo rigido ruota attorno ad un asse fisso , **tutti** i suoi punti compiono una **traiettoria circolare**.   Quindi possiamo trattare il moto di tali particelle sia usando variabili lineari che usando variabili rotazionali.

Consideriamo una particella situata nel punto $P$ di un corpo rigido ad una distanza $r$ dall'asse di rotazione passante per il punto $O$. La particella in $P$ si muove lungo un cerchio di raggio $r$ mentre il corpo ruota




La particella percorre un arco di lunghezza $s$ mentre il corpo ruota di un angolo $\theta$ e si ha:

$$s = r\,\theta$$

Se la posizione iniziale del punto $P$ era lungo l'asse $x$ lo spostamento risulta come indicato in verde

Derivando la reazione $s = r\,\theta$ rispetto al tempo e osservando che $r$ è **costante**, si ha:

$$\frac{ds}{dt} = r\,\frac{d\theta}{dt}$$

Osserviamo che $ds/dt$ è la velocità lineare $\mathrm{v}$ della particella nel punto $P$

e $d\theta/dt$ è la velocità angolare $\omega$, e quindi risulta:

$$\boxed{\mathrm{v} = r\,\omega}$$

Questa è una relazione fra i **moduli** dei vettori $\mathbf{v}$ e $\boldsymbol{\omega}$

Data la relazione:

$$\mathrm{v} = r\,\omega$$

Derivando rispetto al tempo e ricordando che $r$ è costante, otteniamo:

$$\frac{d\mathrm{v}}{dt} = r\,\frac{d\omega}{dt}$$

Ma $d\mathrm{v}/dt$ è la componente tangenziale della accelerazione della particella (quella

che nel moto circolare **uniforme r**isultava nulla) e $d\omega/dt$ è il modulo della

accelerazione angolare del corpo rotante, quindi possiamo scrivere:

$$\boxed{a_T = r\,\alpha}$$

Abbiamo già visto a proposito del moto circolare che l'accelerazione centripeta (che non è altro che l'accelerazione radiale) è invece data da $\mathrm{v}^2/r$

Quindi

$$\boxed{a_R = \mathrm{v}^2/r = \omega^2\, r}$$

Nel caso del moto circolare **uniforme**, che avevamo già studiato (adottando le grandezze lineari e non ancora quelle rotazionali) risultava per definizione $a_T = 0$

Quindi: **il moto di una particella lungo una traiettoria circolare si può descrivere sia usando variabili lineari che usando variabili rotazionali**

E poiché un corpo rigido è composto da N particelle, in linea di principio anche il moto rotatorio delle N particelle di cui si compone un corpo rigido potrebbe essere descritto da N variabili lineari.

**Il problema è appunto che servirebbero N variabili lineari, una per ogni punto, mentre adottando le variabili rotazionali, queste sono le stesse per ogni punto**

**ECCO PERCHE' ABBIAMO INTRODOTTO LE VARIABILI ROTAZIONALI !**

# Dinamica del moto rotatorio

Abbiamo visto che la relazione fondamentale di tutta la dinamica è la II Legge di Newton:

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$$

Questa formulazione si è rivelata particolarmente utile per il trattamento della dinamica delle particelle puntiformi e per il moto traslatorio di corpi, ma è chiaro che per il trattamento del moto rotatorio dei corpi occorre riformulare questa legge usando **variabili rotazionali**.

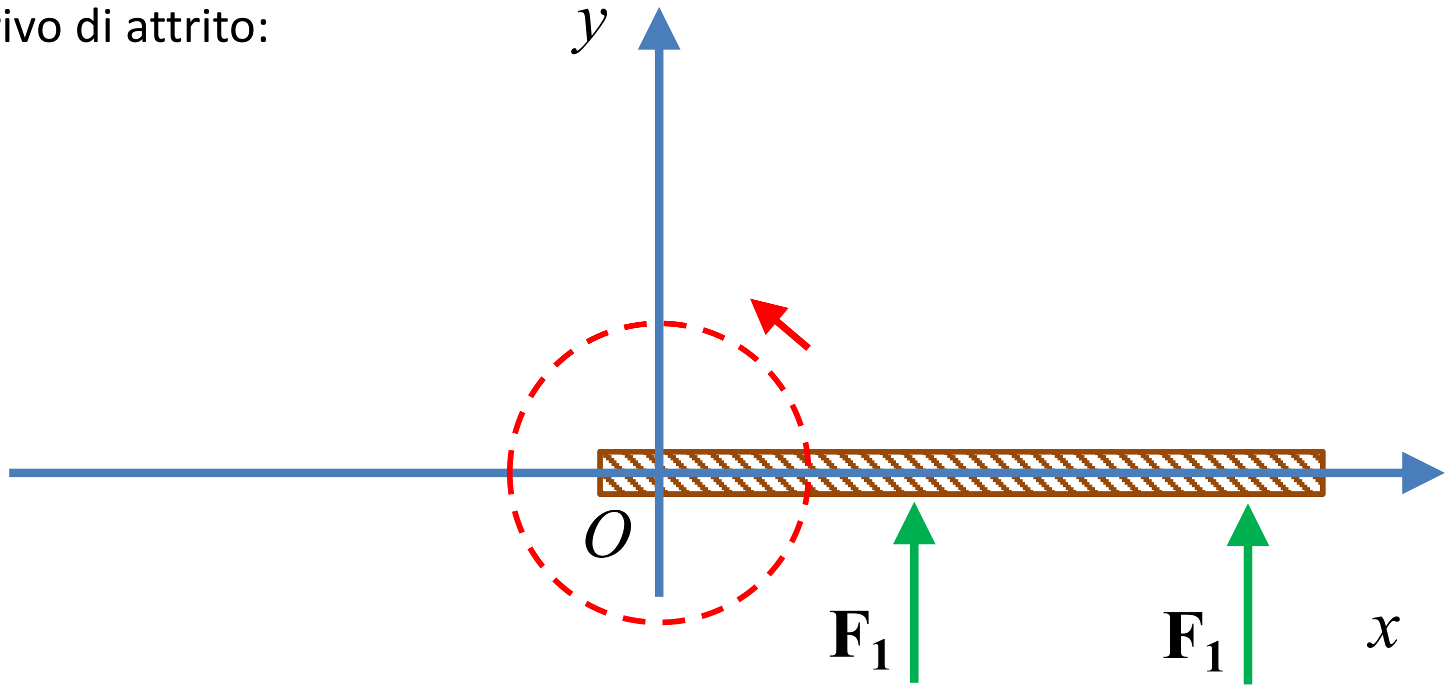
Abbiamo già definito l'analogo rotazionale della accelerazione lineare $\mathbf{a}$ e cioè l'accelerazione angolare $\boldsymbol{\alpha}$

$$\boldsymbol{\alpha} = d\,\boldsymbol{\omega}/dt$$

Dobbiamo adesso definire quali variabili rotazionali sono analoghe a $\mathbf{F}$ e $m$

Consideriamo una barra disposta sul piano $x$-$y$ e libera di ruotare attorno all'origine $O$.

Supporremo che il piano è orizzontale, così che non ci sia forza gravitazionale, e che il piano sia privo di attrito:




Se applichiamo una forza $\mathbf{F_1}$ in un punto come in figura, la barra acquisirà una certa accelerazione angolare $\boldsymbol{\alpha_1}$

Se però applichiamo la **stessa** forza $\mathbf{F_1}$ in un punto **più distante** dall'asse di rotazione, come in figura, la barra acquisirà una certa accelerazione angolare **maggiore**

Questo è un fenomeno che ci è familiare in base alla nostra esperienza quotidiana:

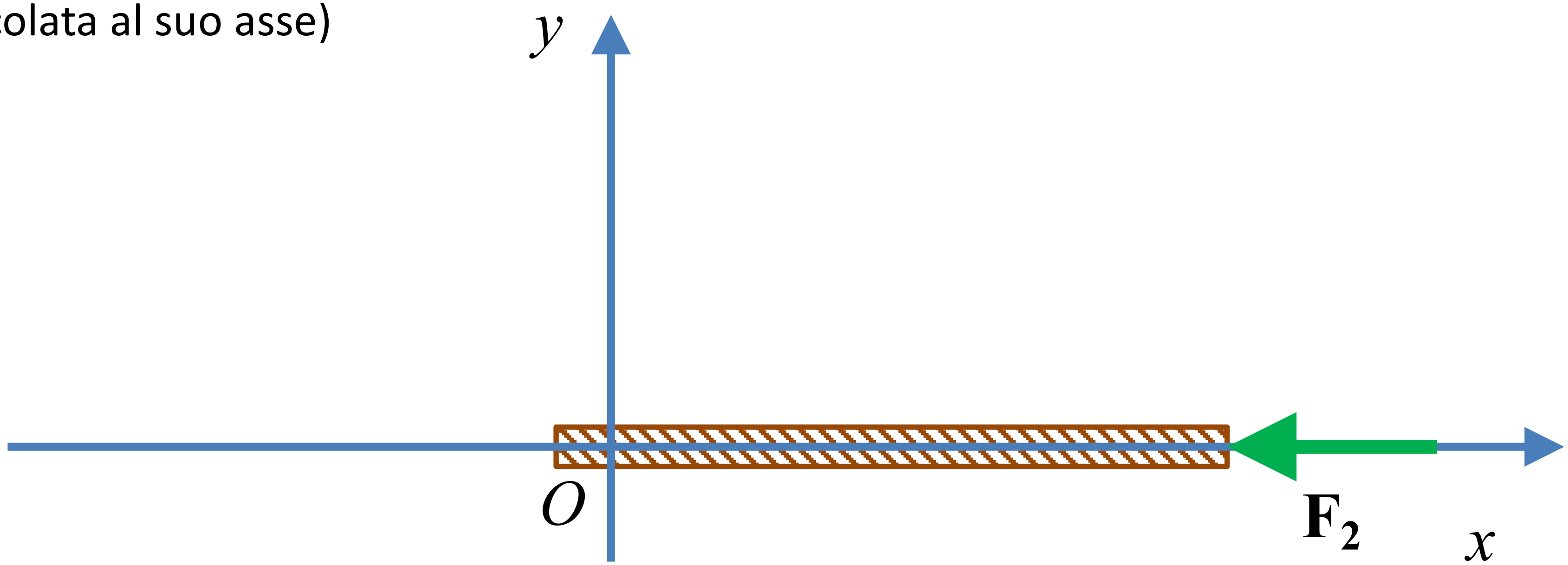
Per aprire una porta facciamo meno fatica se spingiamo in un punto distante dall'asse di rotazione: è per questo che la maniglia è li e non vicino l'asse !

Se dovessimo aprire una porta applicando la forza ad un punto vicino l'asse, dovremmo applicare una forza molto elevata, e se applicassimo la **stessa** forza lontano dall'asse, la porta acquista maggiore accelerazione angolare !

Evidentemente ciò che conta per imprimere una accelerazione angolare non è solo la forza

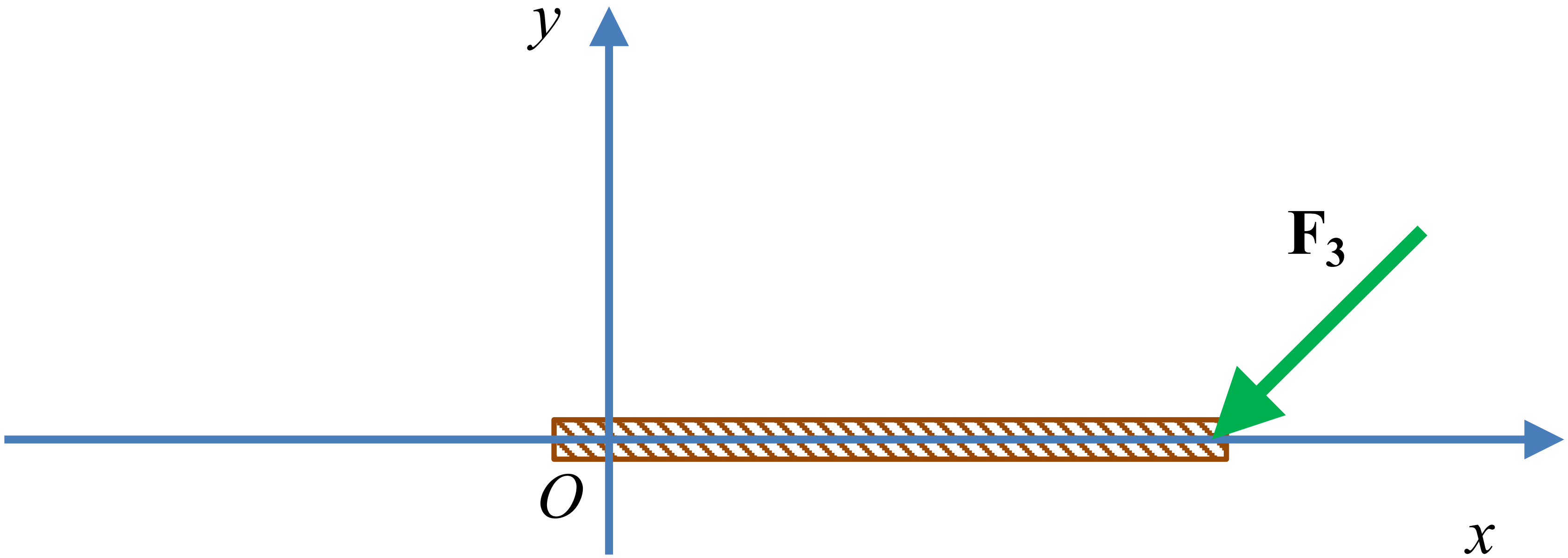
E' vero che se aumentiamo la forza aumenta l'accelerazione angolare, ma possiamo aumentare l'accelerazione angolare **anche** spostando il ***punto di applicazione*** della forza

Se invece applichiamo una forza $\mathbf{F_2}$ come in figura, cioè una forza la cui direzione passa per l'asse di rotazione,  non otterremo alcun moto rotatorio (e neanche traslatorio se la barra è vincolata al suo asse)




**Evidentemente, oltre al punto di applicazione,  anche la direzione della forza è rilevante nel determinare l'accelerazione angolare  ?**

Se adesso applichiamo una forza $\mathbf{F_3}$ come in figura, e scomponiamo la forza nelle sue componenti $x$ e $y$ ci renderemo conto che **l'unica componente che conta** è quella lungo $y$



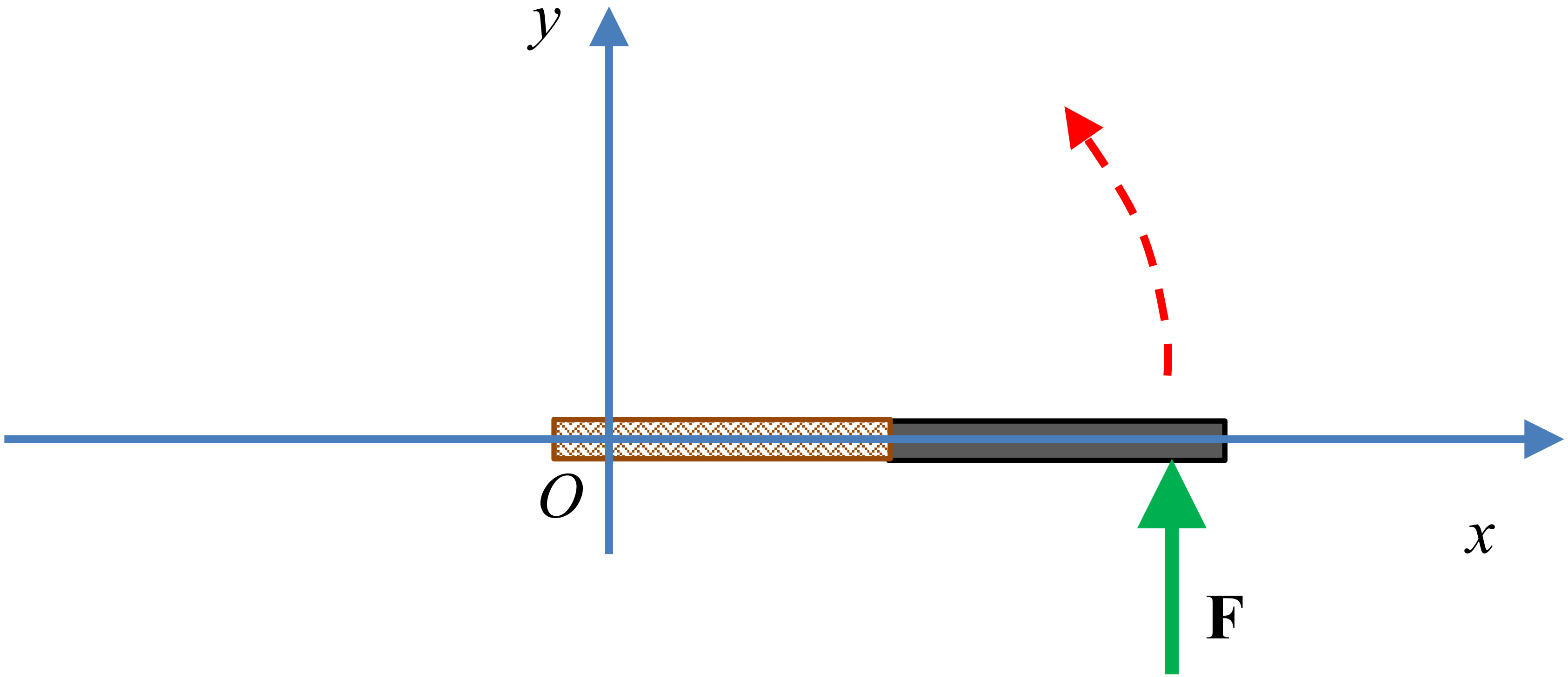

**Questo fatto conferma che**, **oltre al punto di applicazione, anche la direzione della forza è rilevante nel determinare l'accelerazione angolare**

Occorre quindi identificare una grandezza fisica che rappresenti la causa della accelerazione angolare, e che sia legata alla forza dalle proprietà che abbiamo appena esaminato.

Questa grandezza sarà il cosiddetto **momento della forza.**

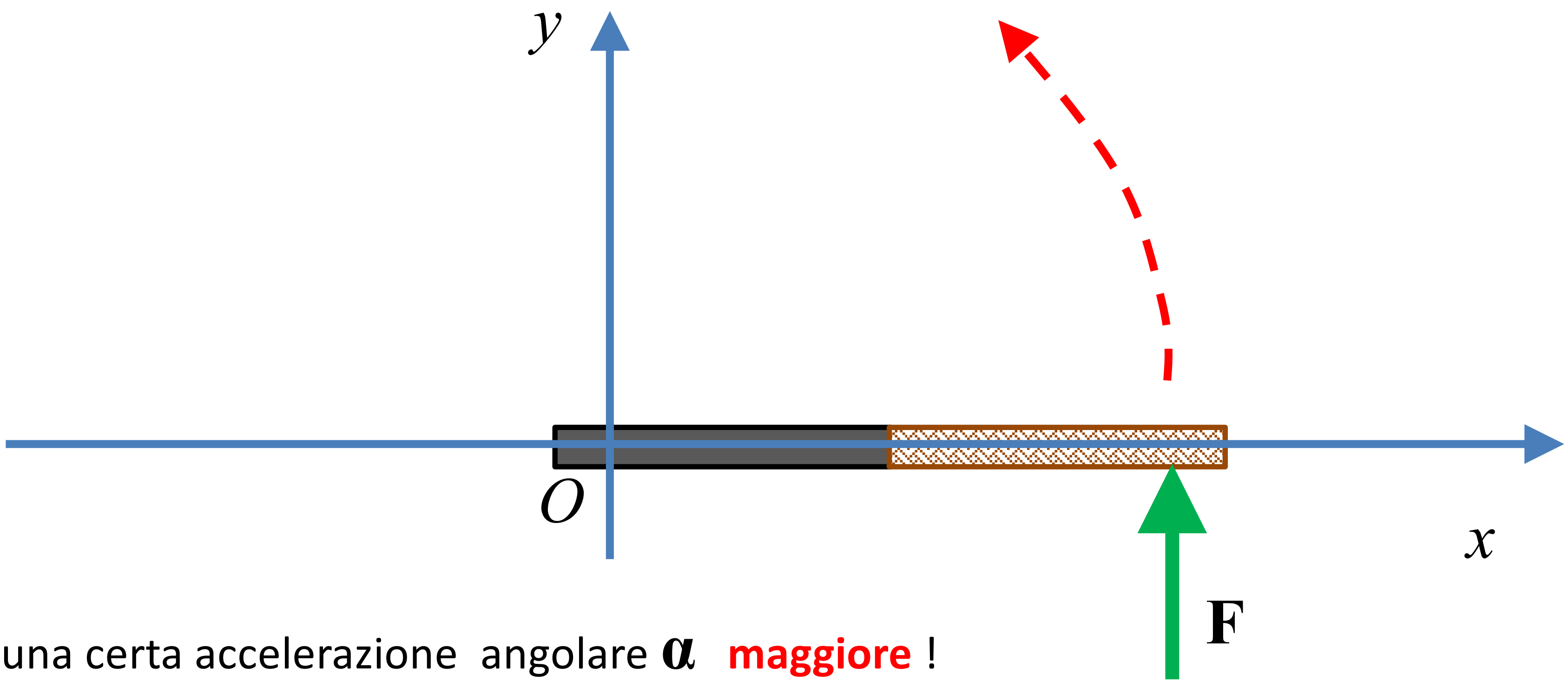
Ma prima di passare alla definizione del momento della forza, **vediamo come si comporta la massa**, e vediamo se non sia necessario definire anche un'altra grandezza analoga a ciò che è la massa nel caso lineare.

Supponiamo che la nostra barra sia costituita di due materiali di massa differente, per esempio legno e ferro, e applichiamo la nostra forza $\mathbf{F}$ come in figura.




Otterremo una certa accelerazione angolare $\boldsymbol{\alpha}$

Se però capovolgiamo la barra e applichiamo la stessa forza $\mathbf{F}$ nel punto come in figura:




Otterremo una certa accelerazione angolare $\alpha$ **maggiore** !

E questo sebbene la massa della barra **non sia cambiata**!

E sebbene non sia cambiata la forza, né la sua distanza dall'asse di rotazione !!

**Ciò che è cambiato è la distribuzione della massa rispetto all'asse di rotazione**

**Quindi:** La grandezza analoga, nel moto rotazionale, alla massa nel caso traslatorio, non è la massa ma una grandezza che potrebbe essere chiamata **inerzia rotazionale** e che dipende in qualche modo dalla **distribuzione della massa** rispetto all'asse di rotazione

Cominciamo quindi a sviluppare in modo più rigoroso questi due concetti:

**- Momento di una forza**

**- Inerzia rotazionale in funzione della distribuzione della massa**

# Momento di una forza

**Definizione**: Se una forza $\mathbf{F}$ agisce su un punto $P$ la cui posizione rispetto al riferimento $O$ è individuata da un vettore $\mathbf{r}$, il **momento della forza** rispetto a $O$ è un **vettore** definito dalla:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

dove il simbolo **x** rappresenta il **prodotto vettoriale** fra $\mathbf{r}$ e $\mathbf{F}$

Il **modulo** di $\boldsymbol{\tau}$ è dato dalla relazione:

$$\tau = r\, F \sin \theta$$

**dove** $\theta$ è l'angolo fra $\mathbf{r}$ e $\mathbf{F}$

La **direzione** è ortogonale al piano individuato da $\mathbf{r}$ e $\mathbf{F}$

il **verso** segue la regola della **mano destra**

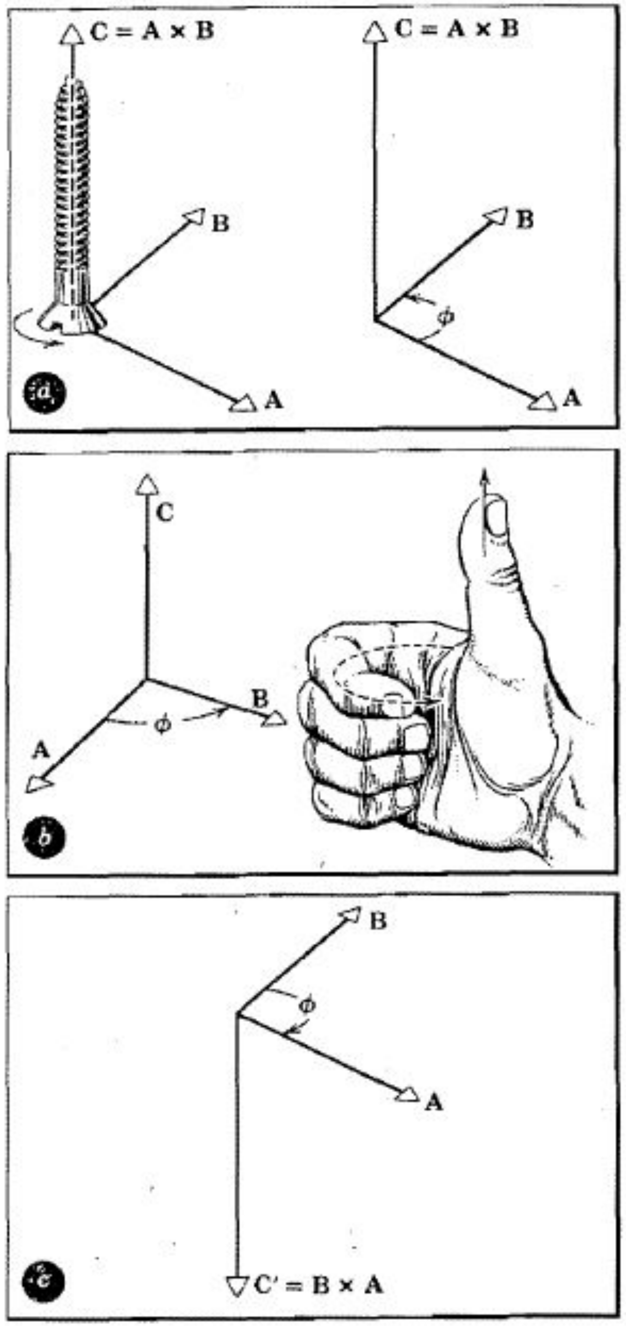



Fig. 2-9. – Il prodotto vettoriale. (*a*) La direzione di **C** è quella in cui avanza una vite quando è ruotata da **A** a **B** attraverso l'angolo più piccolo. (*b*) La direzione di **C** può anche essere ottenuta con la cosidetta regola della mano destra: Se la mano è tenuta in modo che le dita piegate seguono la rotazione di **A** in **B** il pollice punterà nella direzione di **C**. (*c*) Il prodotto vettoriale cambia segno quando l'ordine dei fattori è invertito: $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$.

Avevamo accennato  durante le prime lezioni all’esistenza del cosiddetto prodotto vettoriale fra due vettori, ma ci eravamo  riservati di definirlo non appena avessimo trovato una **applicazione fisica** che lo rendesse comprensibile.

**Eccola !**

Le dimensioni del **momento della forza** sono quelle di forza x  distanza, e cioè

$$[\, M \;\; L \;\; T^{-2} \;\; L \,] \rightarrow [\, M \;\; L^2 \; T^{-2} \,]$$

L’unità di misura il

**nt-metro = N-metro**