

# Lezione XVI

## (Moti rotatori: cinematica)



## FRUIZIONE E UTILIZZO DEI MATERIALI DIDATTICI

- ➔ **E' vietata** la **copia**, la **rielaborazione**, la **riproduzione** dei contenuti e immagini presenti nelle lezioni in qualsiasi forma
- ➔ **E' inoltre vietata** la **diffusione**, la **redistribuzione** e la **pubblicazione** dei contenuti e immagini, incluse le registrazioni delle videolezioni con qualsiasi modalità e mezzo non autorizzati espressamente dall'autore o da Unica

# Cinematica del moto rotatorio

Sino adesso ci siamo occupati del **moto traslatorio** di un corpo. In questo caso ciascun punto del corpo si muove come tutti gli altri e quindi il moto di una singola particella, il punto materiale, è rappresentativo del moto dell'intero corpo.

Adesso studieremo il **moto rotatorio** di un corpo. Cioè il caso in cui il corpo ruota attorno ad un certo asse.

Per semplicità cominciamo a considerare il caso di un **corpo rigido**

Cioè **un corpo in cui le distanze relative fra tutti i punti sono costanti**, anche quando il corpo è soggetto a forze esterne.

In questo caso, potremo trascurare eventuali vibrazioni del corpo in questione.

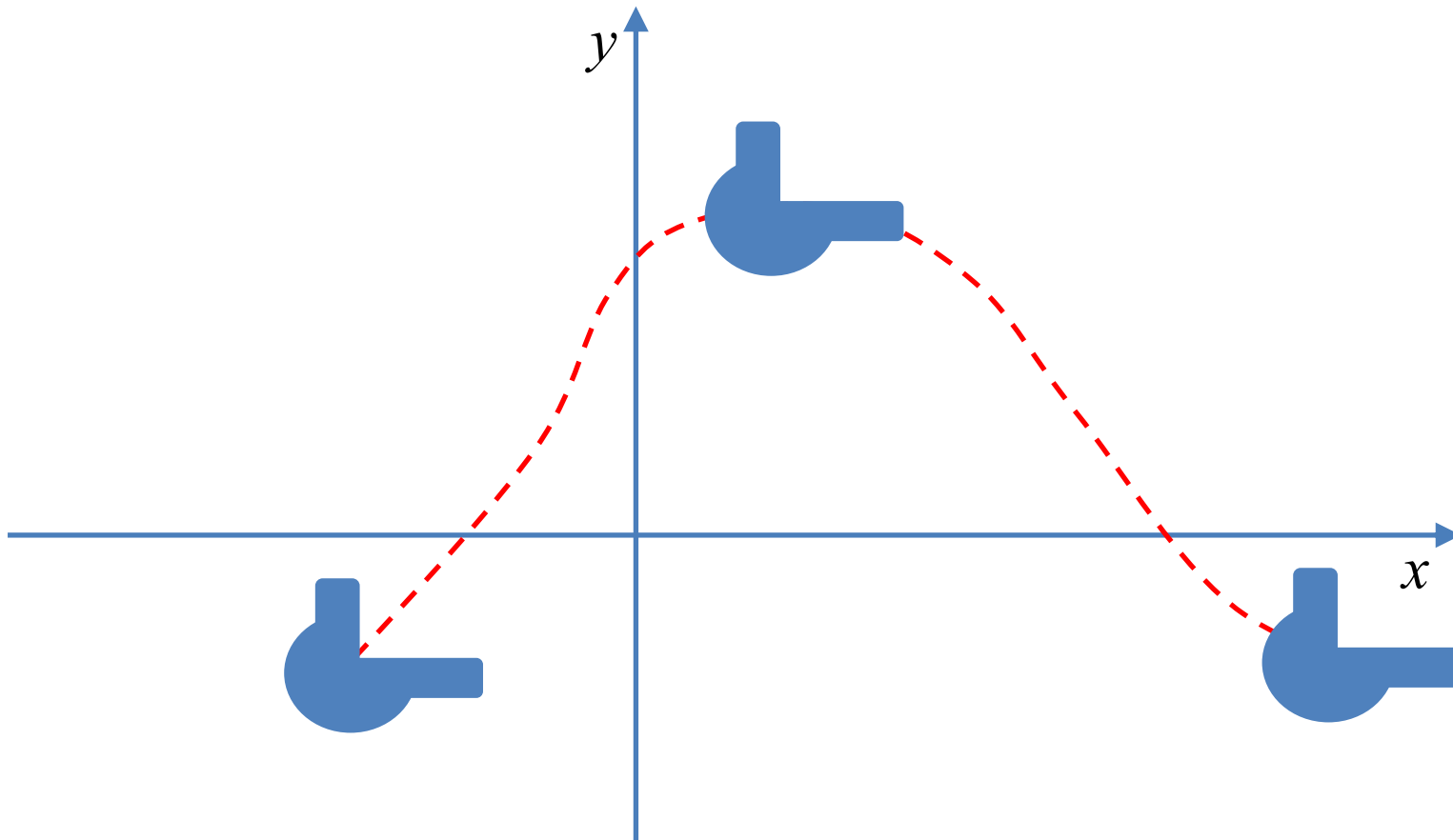
Sia una particella, sia un corpo rigido in **moto traslatorio** si possono identificare univocamente assegnando loro una posizione  $x$ ,  $y$ ,  $z$  nel nostro sistema di riferimento.

Queste 3 coordinate tuttavia **non sono sufficienti** se il corpo rigido è anche soggetto ad un **moto rotatorio** oltre che ad un moto traslatorio.

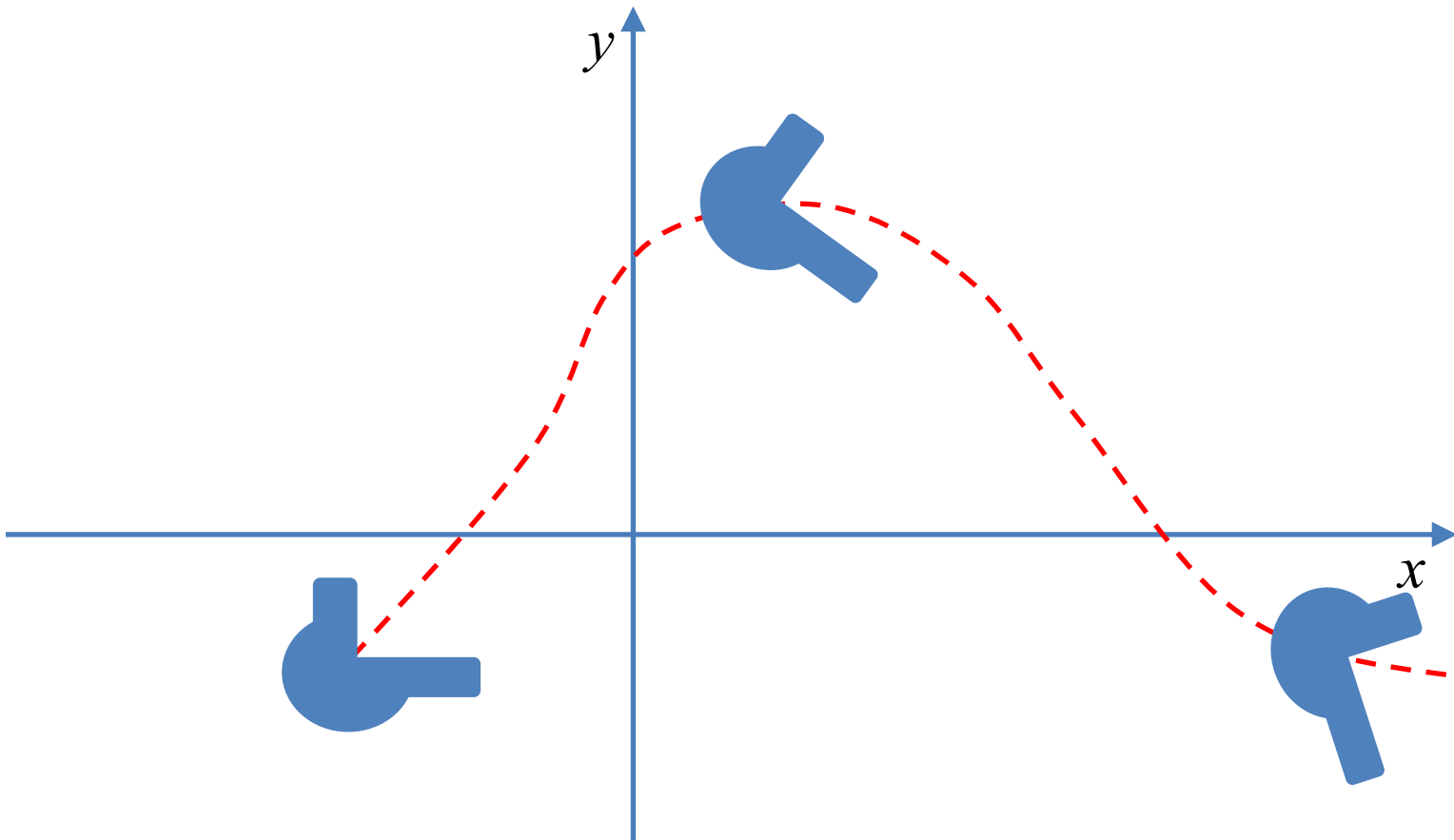
In generale, oltre alle **tre** coordinate  $x$ ,  $y$ ,  $z$  che definiscono la posizione di un punto di riferimento del corpo rigido, serviranno anche altre **tre** coordinate, tipicamente degli **angoli**, che definiscono l'orientazione del corpo rispetto al sistema di riferimento.

Le figure che seguono illustrano la differenza fra moto semplicemente traslatorio e moto traslatorio + rotatorio di un corpo rigido e la conseguente necessità di definire 6 coordinate

### Moto traslatorio

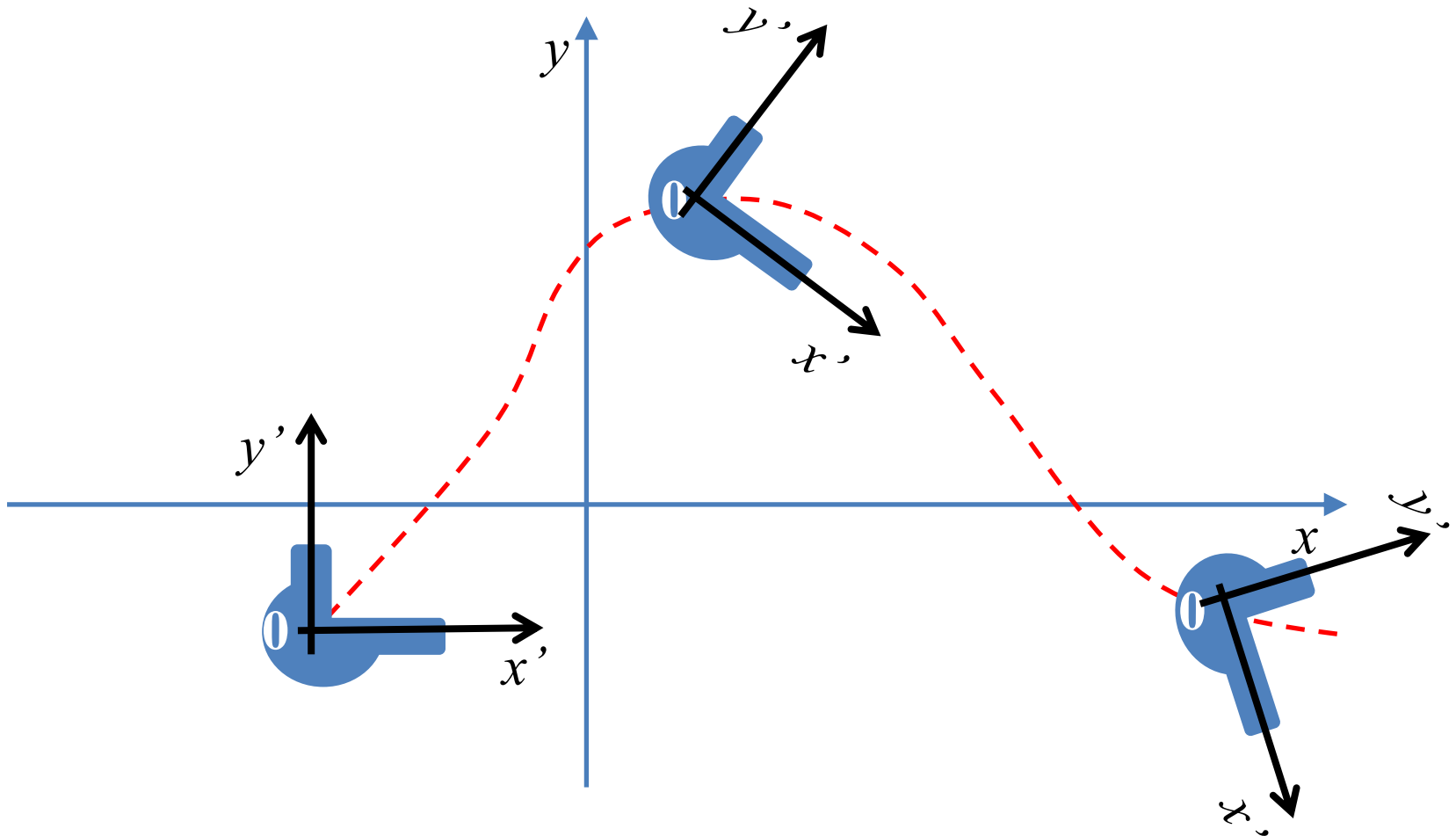


## Moto traslatorio + rotatorio



In questo caso, oltre che definire le coordinate  $x_0-y_0$  del punto di riferimento  $O$  sul corpo, rispetto al nostro sistema di riferimento, dovremo definire anche l'orientazione di un sistema di assi  $x'-y'$  solidale col corpo, rispetto al nostro sistema di riferimento  $x-y$ .

### Moto traslatorio + rotatorio



Studieremo questo tipo di moto **separando** il moto traslatorio dal moto rotatorio.

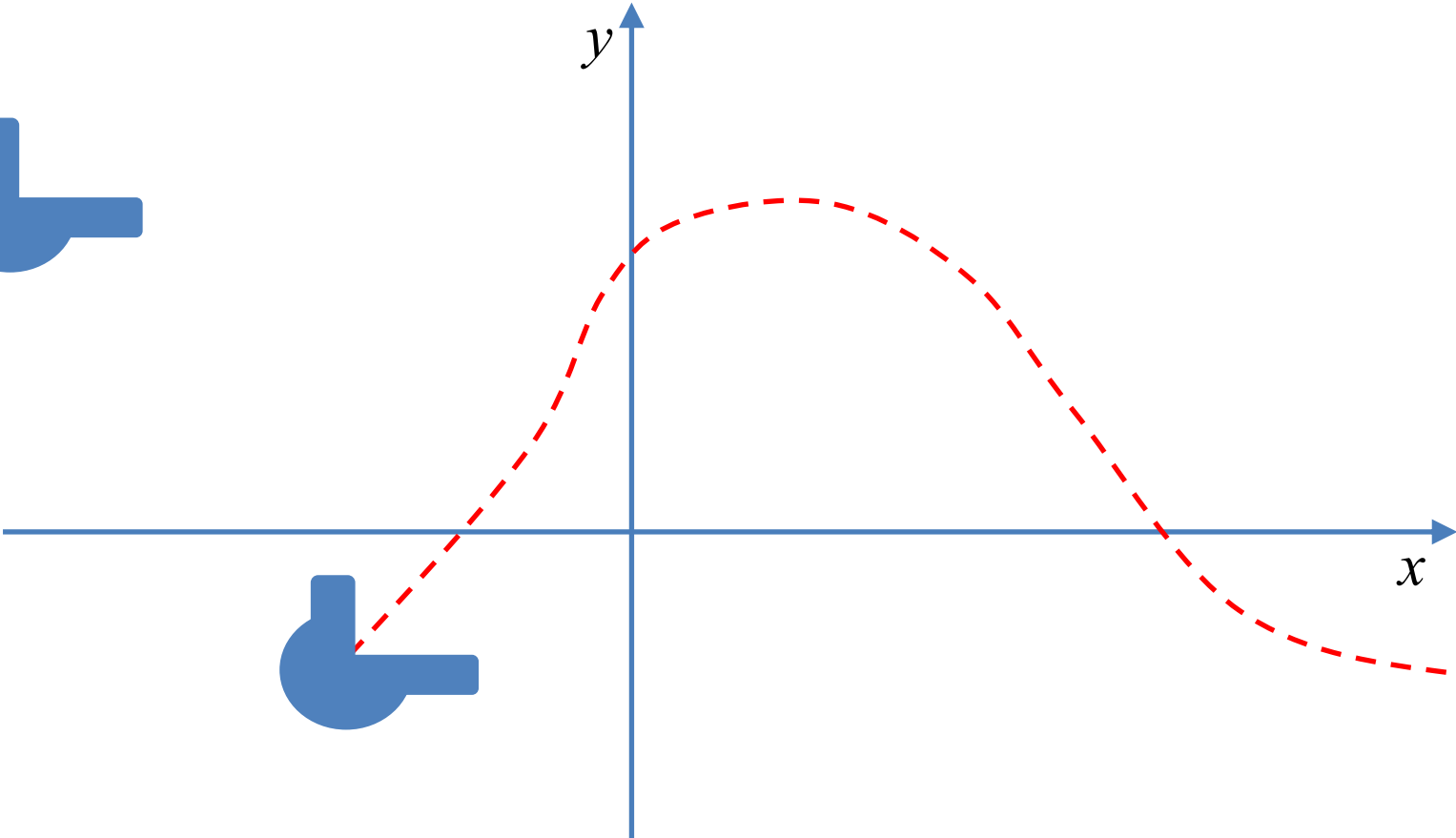
Applicheremo in sostanza il **principio di sovrapposizione**.

Cioè: **ad ogni istante** lo stato del corpo è definibile in base ad una **traslazione + una rotazione**

**Rotazione**



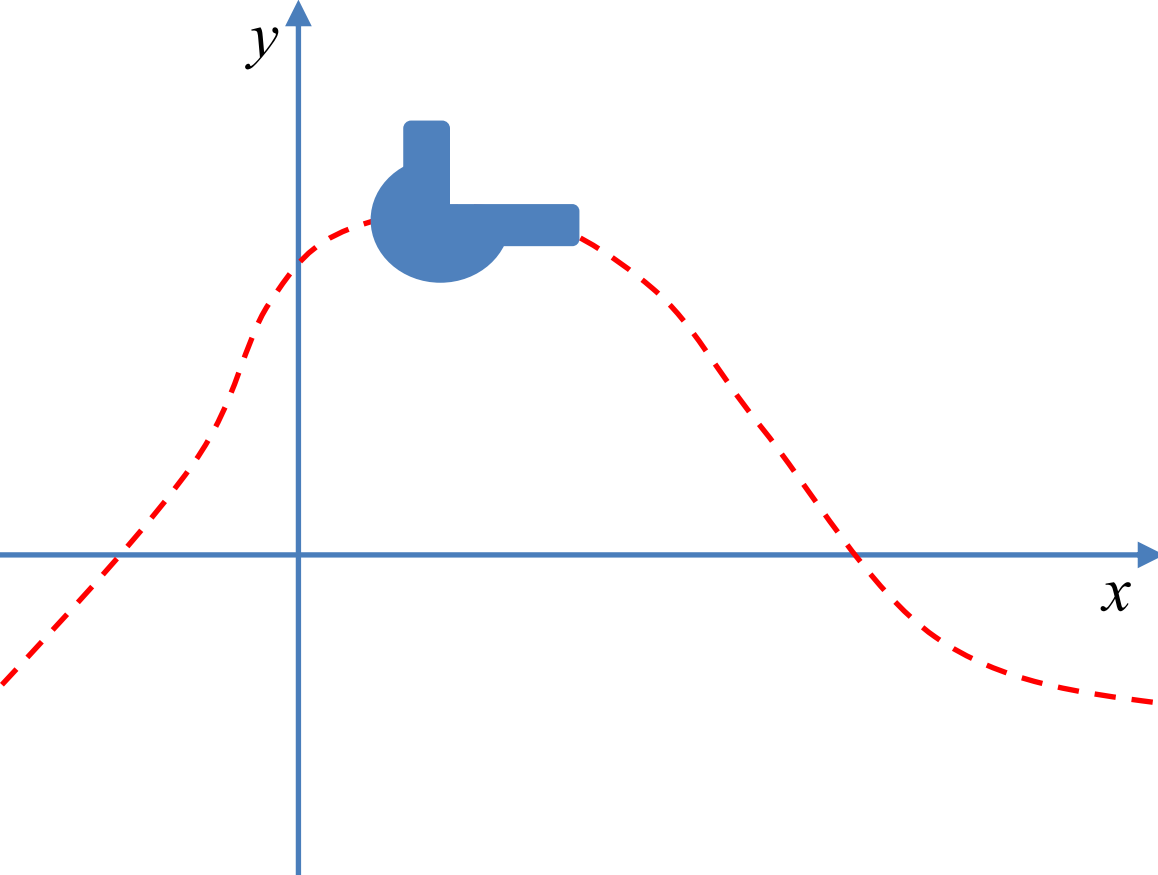
**Traslazione**



**Rotazione**



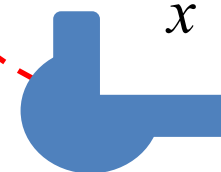
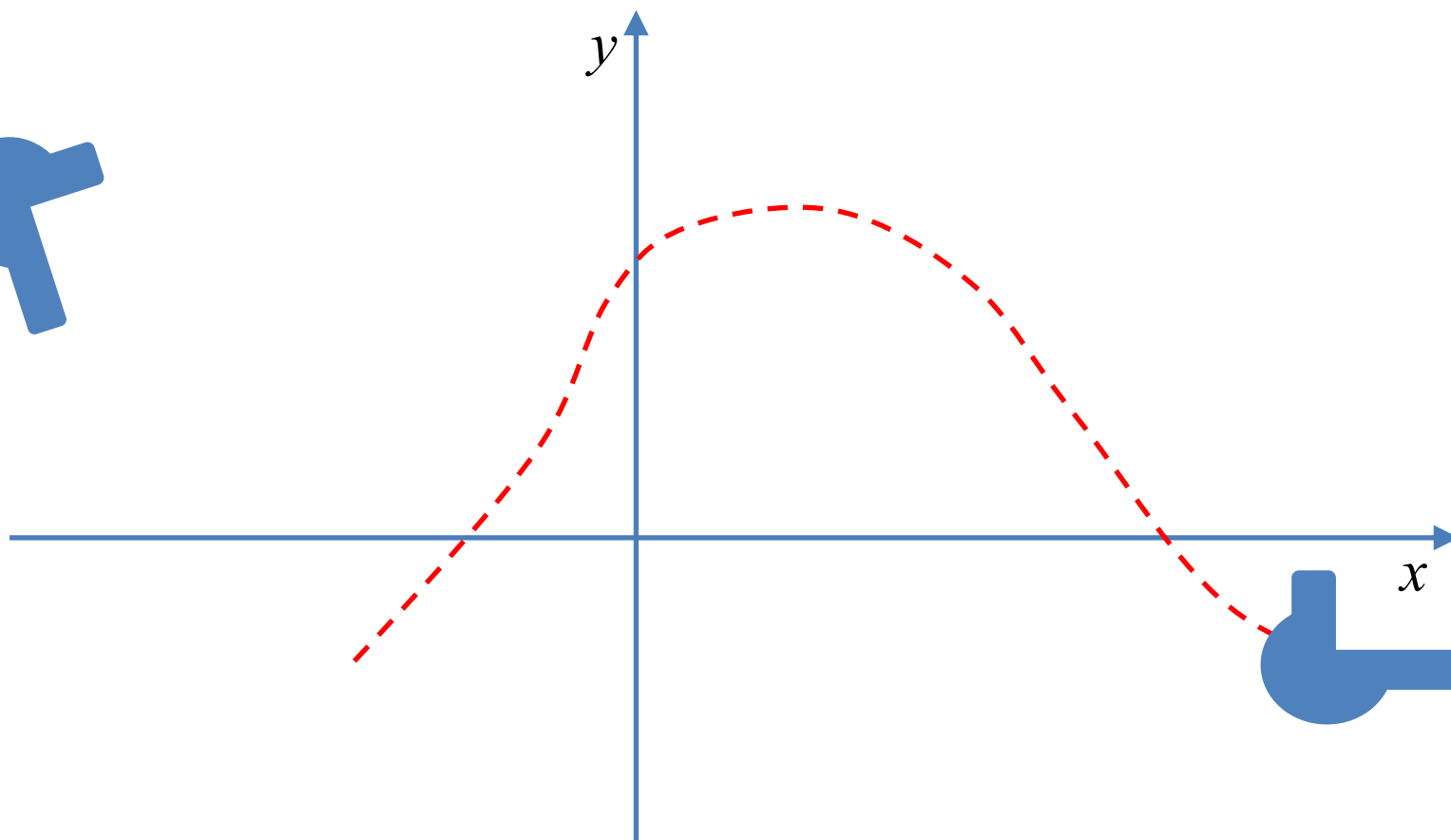
**Traslazione**



**Rotazione**



**Traslazione**



Abbiamo già visto che **per un sistema di particelle, rigido o non rigido, il centro di massa (baricentro) si muove come se tutta la massa fosse concentrata in quel punto e se tutte le forze esterne agissero su quel punto.**

Cioè il moto del centro di massa di un corpo rigido è determinato dalla:

$$\mathbf{F}_{\text{est}} = m_{\text{totale}} \mathbf{a}_{\text{baricentro}}$$

Questo moto è ovviamente **solo traslatorio**, essendo il baricentro un punto.

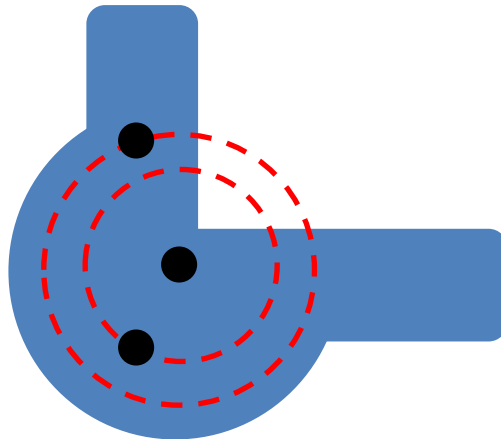
Quindi:

- a) **Il moto traslatorio di un corpo può essere descritto dal moto del suo baricentro**
- b) **Il moto rotatorio sarà descritto dalla rotazione del corpo in questione rispetto ad un determinato sistema di assi**

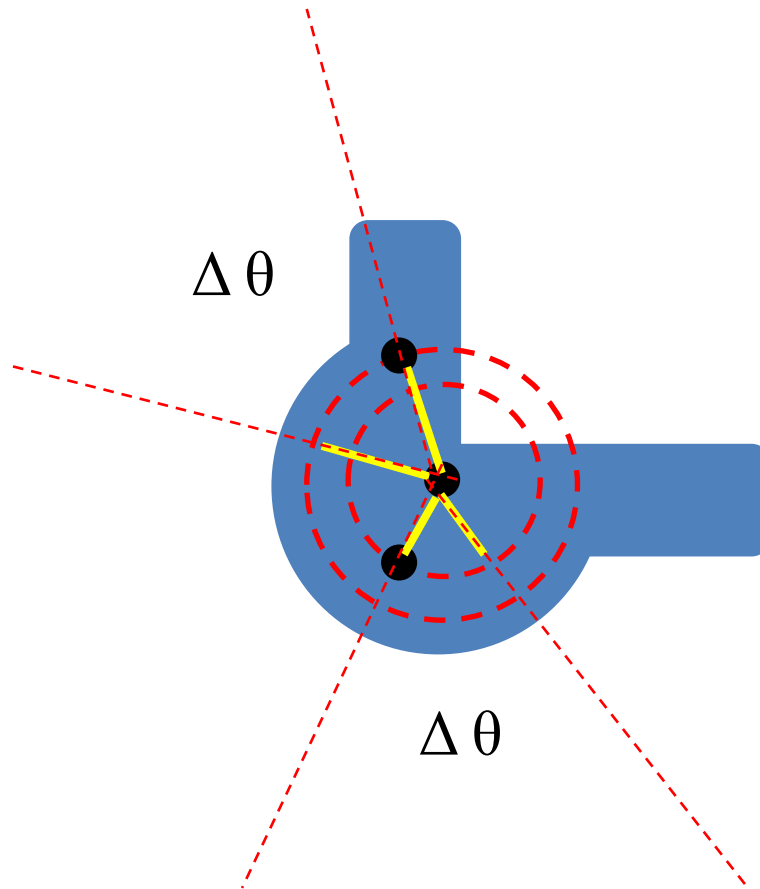
## Definizione formale di moto puramente traslatorio e di moto puramente rotatorio

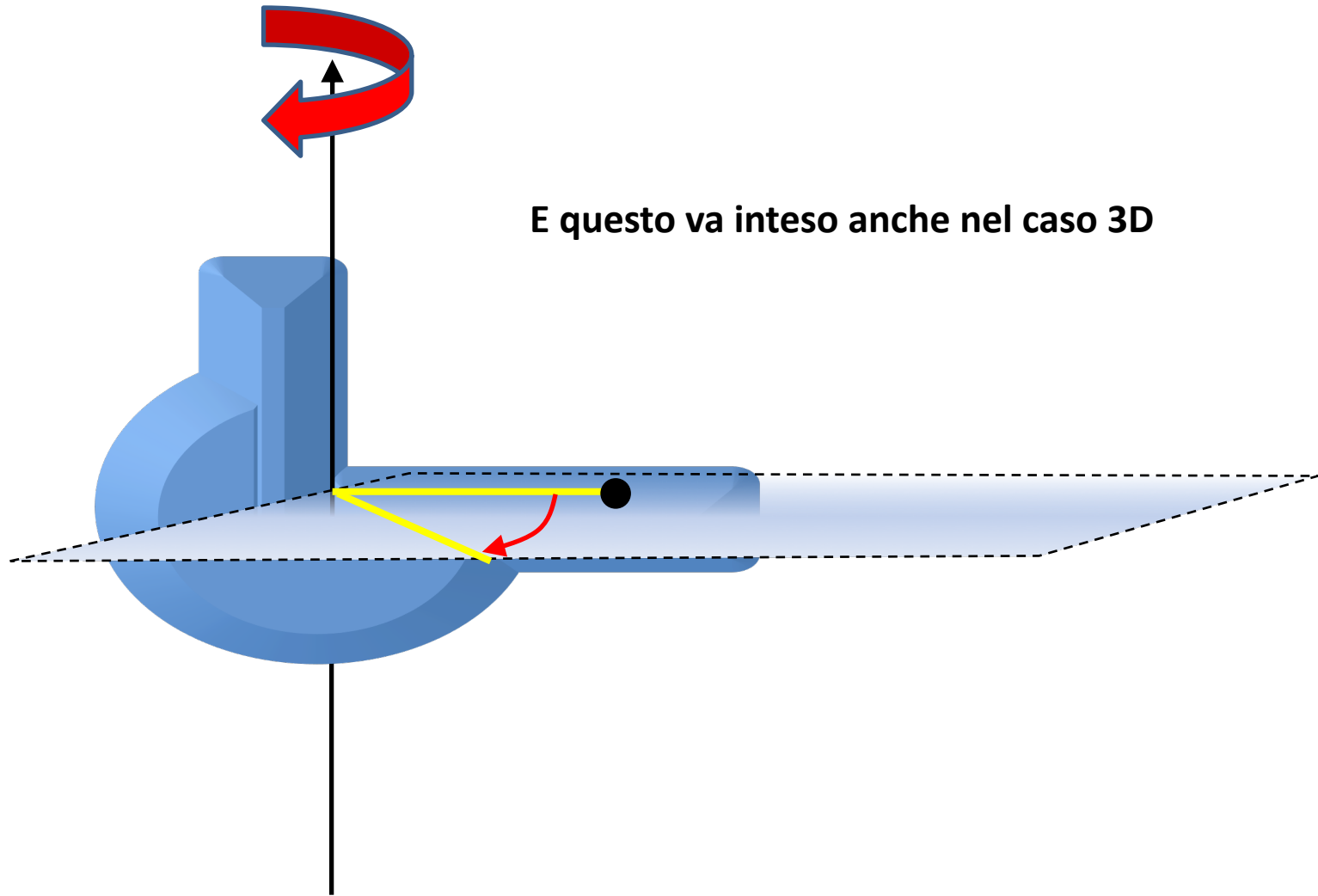
Il moto di un corpo rigido è puramente traslatorio se tutti i punti del corpo subiscono lo stesso spostamento in un dato intervallo di tempo

Il moto di un corpo rigido è puramente rotatorio se tutti i punti del corpo si muovono su dei cerchi i cui centri sono localizzati tutti lungo una retta detta asse di rotazione

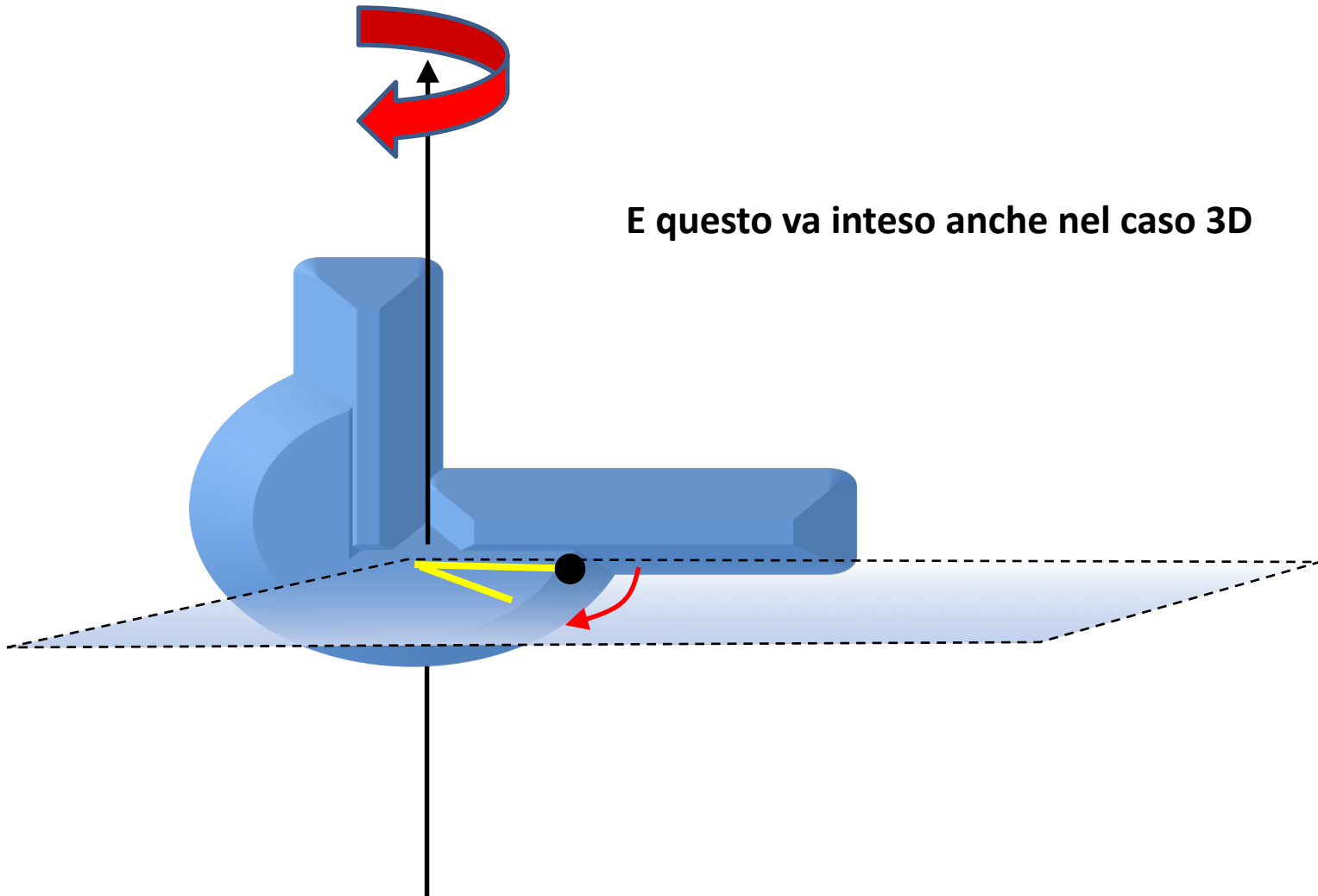


Se per ogni punto del corpo in questione, tracciamo dei segmenti perpendicolari all'asse di rotazione, tutti questi segmenti ruoteranno di uno **stesso angolo**  $\Delta \theta$  in un dato intervallo di tempo  $\Delta t$



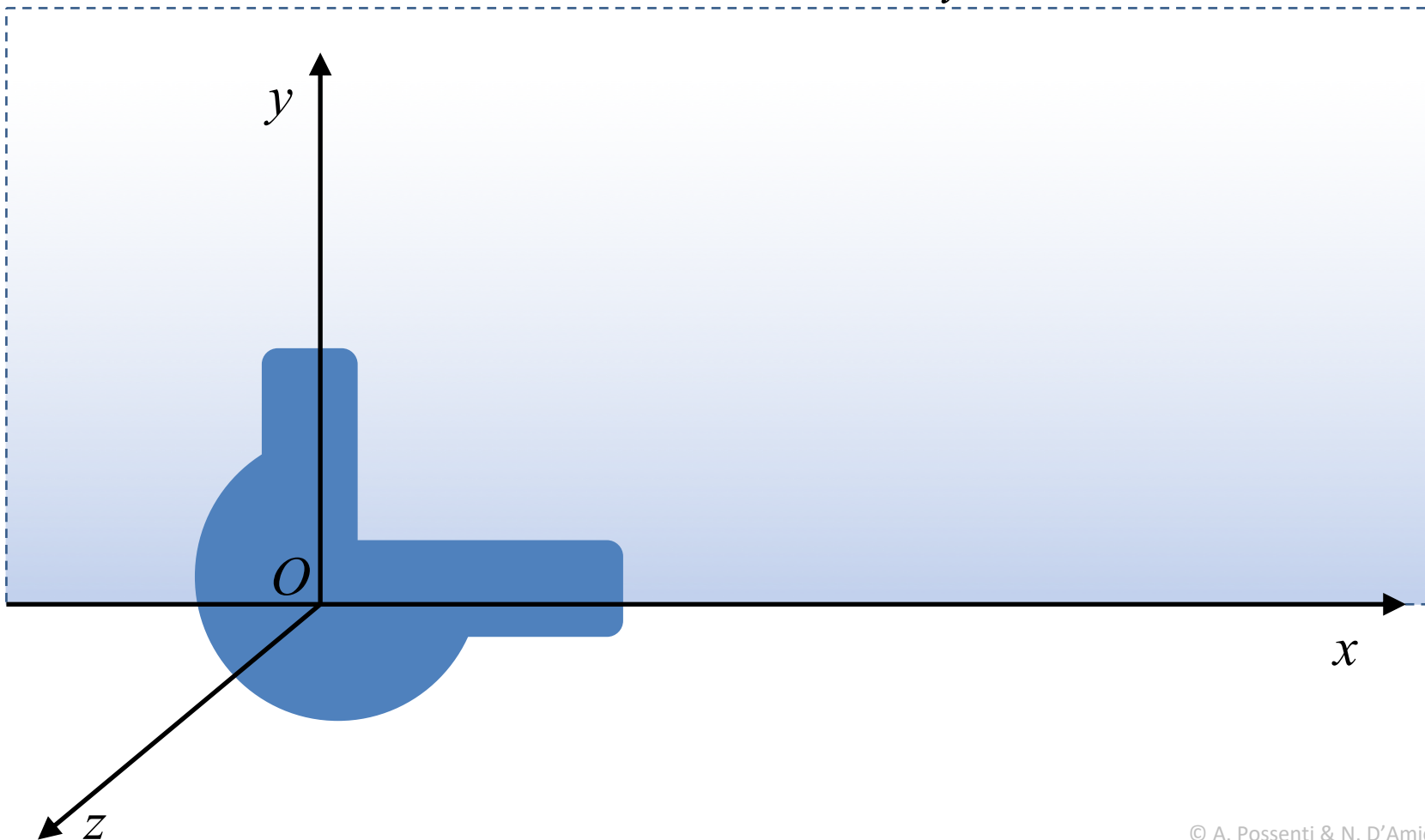


**E questo va inteso anche nel caso 3D**

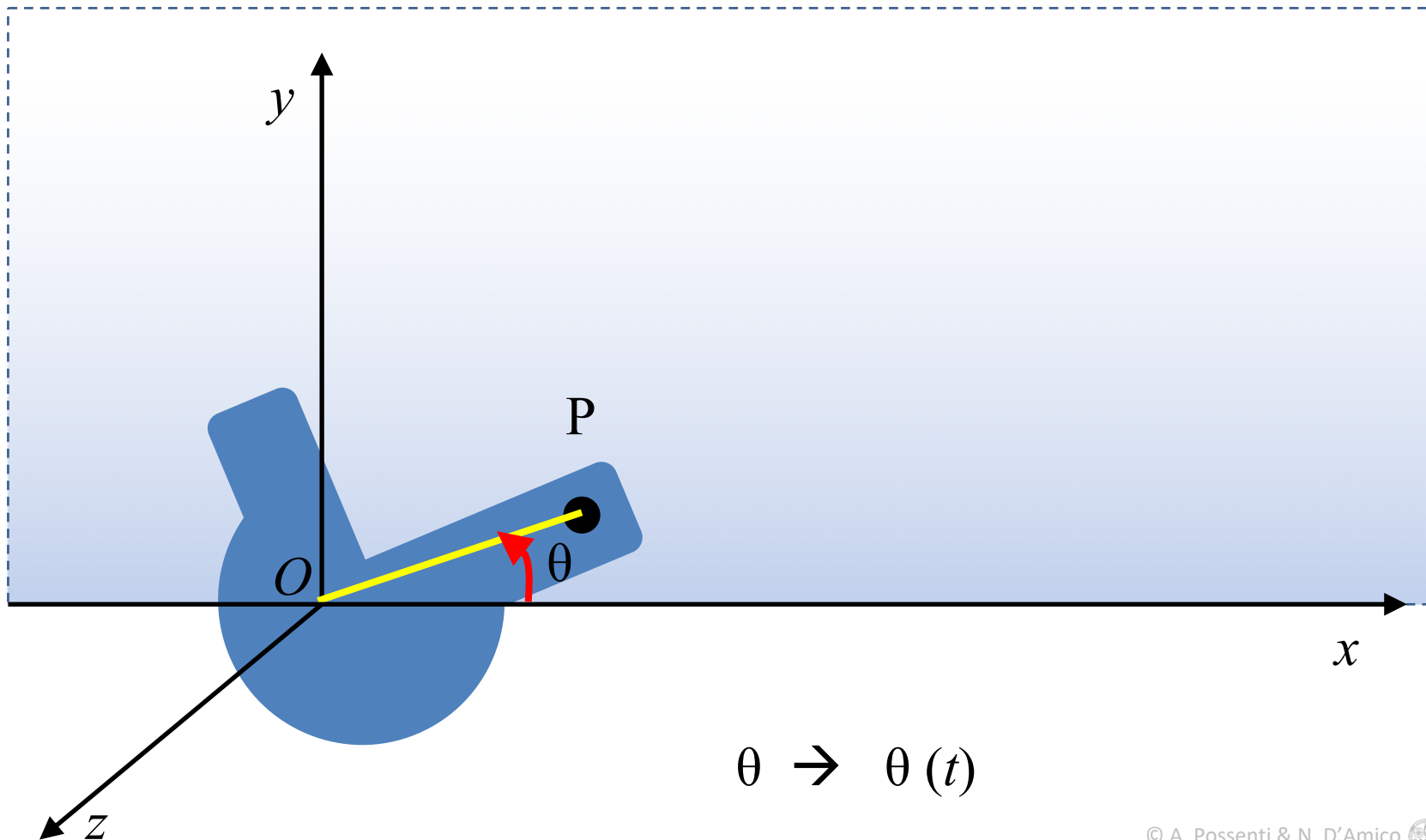


E questo va inteso anche nel caso 3D

Per semplicità di trattazione, adesso prenderemo in considerazione il caso di un corpo rigido che si estende **solo in superficie**, per esempio su un piano  $x$ - $y$  e che ruota attorno ad un punto  $O$ , preso come origine del sistema di assi. In questo caso l'asse di rotazione è l'asse  $z$  che interseca perpendicolarmente il piano  $x$ - $y$  passando per  $O$ .



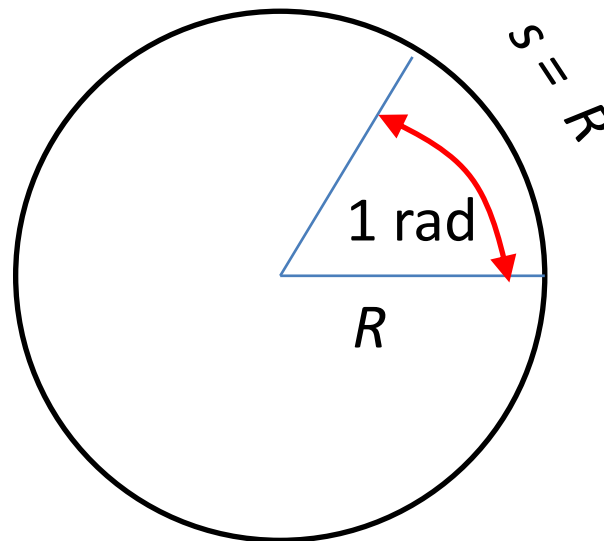
Consideriamo un generico punto  $P$  e consideriamo il segmento  $O-P$ . Questo segmento è fisso rispetto al corpo e ruota con esso. Ad **ogni istante** possiamo individuare la posizione del corpo specificando l'angolo  $\theta$  che il segmento  $O-P$  forma con l'asse  $x$ , che stabiliremo **positivo** nel caso di rotazione in **senso antiorario**.



Stabiliremo di misurare gli angoli in radianti. **Un radiante** è l'angolo al centro in un cerchio sotteso da un arco di lunghezza  $S$  pari al raggio  $R$ .

Pertanto un angolo  $\theta$  è espresso in radianti dalla relazione

$$\theta = s / R$$



Poiché la circonferenza di un cerchio di raggio  $R$  è lunga  $2\pi R$ , **vi sono  $2\pi$  radianti in un angolo giro**. Quindi  $2\pi \text{ rad} = 360^\circ \rightarrow \mathbf{1 \text{ rad} \approx 57,3^\circ}$

Supponiamo che il corpo rigido in questione ruoti in senso antiorario. Indichiamo con  $\theta_1$  l'angolo formato dal segmento  $O-P$  con l'asse  $x$  all'istante  $t_1$  e con  $\theta_2$  l'angolo al tempo  $t_2$ .

Lo **spostamento angolare** nell'intervallo di tempo  $\Delta t = t_2 - t_1$  sarà  $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$

Definiremo la **velocità angolare media**  $\langle \omega \rangle$  del corpo nell'intervallo  $\Delta t$  :

$$\langle \omega \rangle = (\theta_2 - \theta_1) / (t_2 - t_1) = \Delta\theta / \Delta t$$

In perfetta analogia con quanto abbiamo studiato in cinematica nel caso lineare, la

**velocità angolare istantanea** sarà data dal limite per  $\Delta t \rightarrow 0$  di questo rapporto:

$$\omega(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta\theta / \Delta t = d\theta / dt$$

La velocità angolare ha le dimensioni dell'inverso di un tempo:

$$[ T^{-1} ]$$

e in generale l'unità di misura è il

**radiante / sec**

Se la velocità angolare  $\omega(t)$  di un corpo non è costante, il corpo è soggetto ad una **accelerazione angolare**. In analogia con quanto abbiamo già studiato, indicate con  $\omega_1$  e  $\omega_2$  le velocità angolari agli istanti  $t_1$  e  $t_2$  **l'accelerazione angolare media**  $\langle \alpha \rangle$  è definita dalla relazione:

$$\langle \alpha \rangle = (\omega_2 - \omega_1) / (t_2 - t_1) = \Delta \omega / \Delta t$$

e di conseguenza l' **accelerazione angolare istantanea** è data dalla relazione

$$\alpha(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \omega / \Delta t = d\omega/dt$$

L'accelerazione angolare ha le dimensioni dell'inverso di un tempo quadrato:

$$[ T^{-2} ]$$

e in generale l'unità di misura è il

**radiante / sec<sup>2</sup>**

## Analogia fra le grandezze cinematiche lineari e quelle angolari

Caso lineare		Caso rotazionale	
$x$	[L]	$\theta$	[ ]
$v = dx / dt$	[L T <sup>-1</sup> ]	$\omega = d\theta / dt$	[T <sup>-1</sup> ]
$a = dv/dt = d^2x/dt^2$	[L T <sup>-2</sup> ]	$\alpha = d\omega/dt = d^2\theta/dt^2$	[T <sup>-2</sup> ]

Le dimensioni lineari differiscono dalle corrispondenti dimensioni angolari per un fattore avente dimensione di una lunghezza, il che deriva dalla definizione di

**radiante**  $\theta = s / R$  che è un numero puro, essendo il rapporto fra due lunghezze

# Carattere vettoriale delle grandezze rotazionali

Avevamo visto che in cinematica lineare lo spostamento, la velocità e l'accelerazione sono grandezze vettoriali, cioè necessitano anche della definizione di una direzione e di un verso per essere individuate. Poi avevamo anche visto che nel caso unidimensionale la trattazione era riconducibile al semplice caso scalare, in quanto la direzione è già individuata, e il verso è specificato dal segno della grandezza scalare.

A prima vista sembra che anche le grandezze rotazionali siano dei vettori, in quanto per ogni rotazione dobbiamo individuare l'asse di rotazione e il verso. E anche in questo caso laddove esiste solo un asse preassegnato, possiamo trattare le grandezze in questione come scalari.

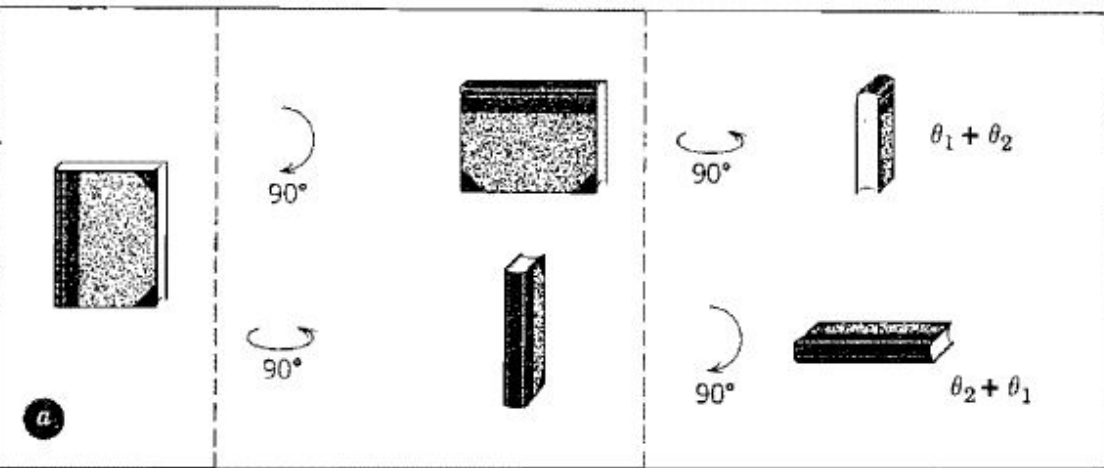
**Tuttavia, prima di affermare che le grandezze rotazionali sono dei vettori occorre verificare che esse obbediscono alle regole del calcolo vettoriale, in particolare le regole sulla addizione di vettori**

## Consideriamo il caso dello spostamento angolare $\theta$

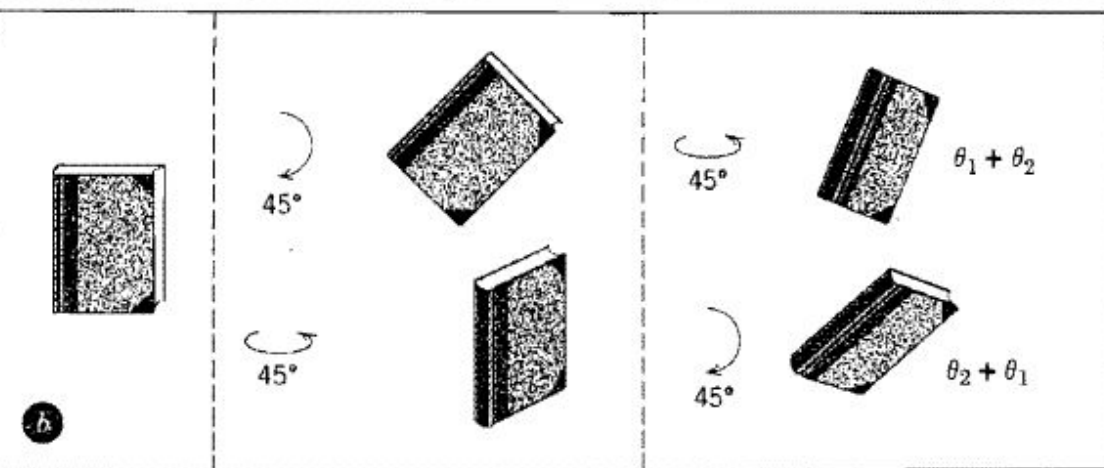
Si può verificare sperimentalmente che **gli spostamenti angolari non si sommano come vettori**. Infatti se si sommassero come vettori dovrebbero obbedire alle regole sulla somma dei vettori e in particolare alla proprietà commutativa della somma di due vettori, cioè:

$$\theta_1 + \theta_2 = \theta_2 + \theta_1$$

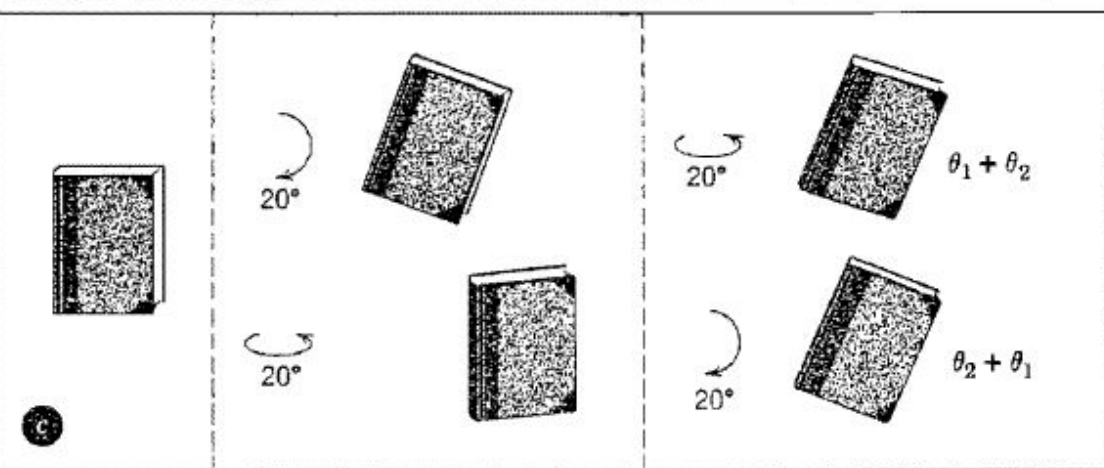
Mostriamo che è **FALSA**



Un libro ruota di 90° in senso orario visto di fronte, e **poi** in senso antiorario visto da sopra. Se l'**ordine** delle due rotazioni viene invertito la posizione finale è differente



Lo stesso succede se si adotta un angolo di rotazione più piccolo, per esempio di 45°, ma in questo caso la differenza di orientazione finale è minore



Nel caso di angoli sempre più piccoli, la differenza di orientazione finale tende a 0

Quindi:

$$\theta_1 + \theta_2 = \theta_2 + \theta_1$$

**Ma è vero che:**

$$d\theta_1 + d\theta_2 = d\theta_2 + d\theta_1$$

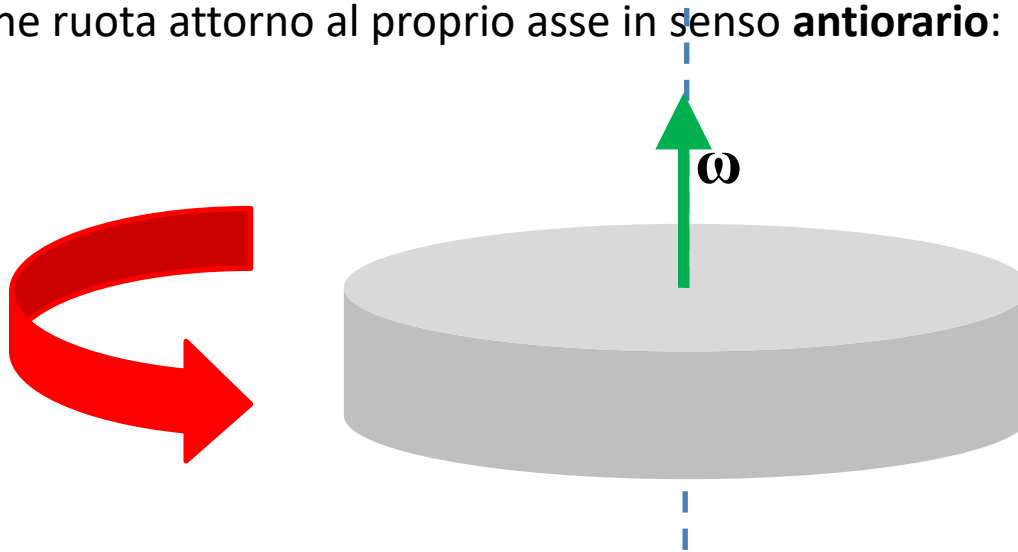
Gli **spostamenti angolari infinitesimi** obbediscono alla proprietà commutativa dell'algebra vettoriale e infatti **sono vettori**

Di conseguenza, data la velocità angolare e l'accelerazione angolare:

$$\boldsymbol{\omega}(t) = d\boldsymbol{\theta}/dt \quad ; \quad \boldsymbol{\alpha}(t) = d\boldsymbol{\omega}/dt$$

poiché  $d\boldsymbol{\theta}$  è un vettore e  $dt$  è uno scalare,  $\boldsymbol{\omega}(t)$  è un vettore  
e di conseguenza anche  $\boldsymbol{\alpha}(t)$  è un vettore

**Ma qual è la rappresentazione grafica di questo vettore?** Consideriamo per esempio un cilindro che ruota attorno al proprio asse in senso **antiorario**:



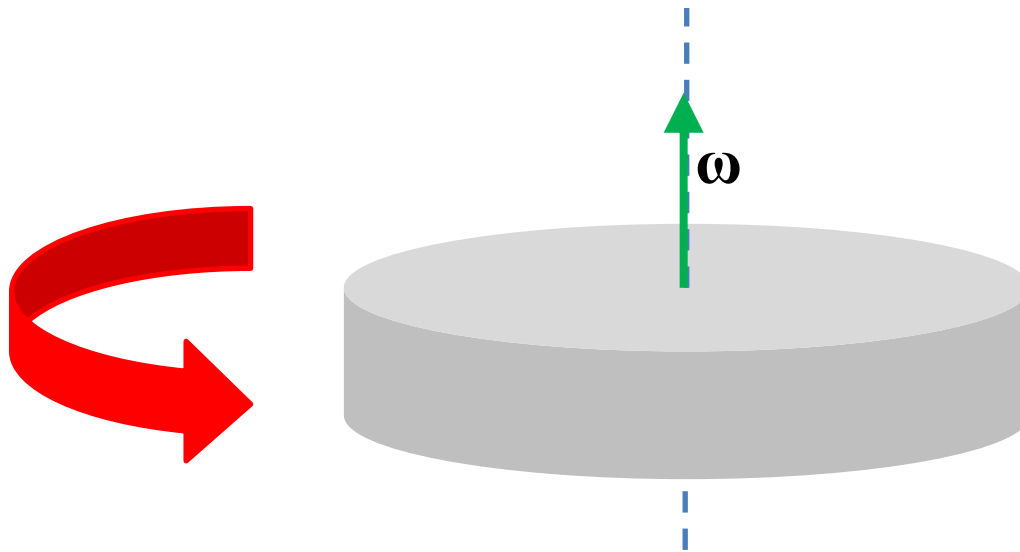
Il vettore velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$  è una freccia lungo la direzione dell'asse di rotazione, orientata verso l'alto se la rotazione è in senso antiorario e viceversa se è in senso orario, la cui lunghezza è pari al modulo  $\omega$ .

**La cosiddetta regola della mano destra.** Nozione mnemonica: se con la mano destra si afferra idealmente l'asse di rotazione, in modo che le dita si avvolgano intorno ad esso nel senso della rotazione, allora il pollice disteso punta nella direzione del vettore  $\omega$



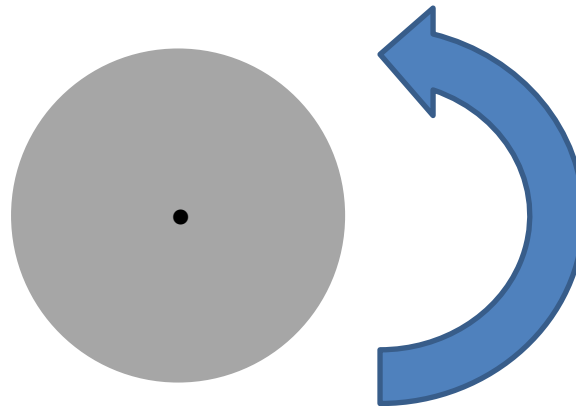
Notate che non c'è niente che si muove nella direzione del vettore  $\boldsymbol{\omega}$

Il moto avviene nel piano ortogonale ad esso.



## Simboli comunemente usati:

Se consideriamo un moto rotatorio in due dimensioni, tale cioè che si sviluppi per esempio sulla pagina del nostro quaderno:



Useremo il simbolo  $\odot$  per il caso in cui il vettore emerge dalla pagina

Useremo il simbolo  $\otimes$  per il caso in cui il vettore punta verso la pagina



# Equazioni orarie per rotazione con accelerazione angolare costante

Il caso più semplice di un moto rotatorio è quello che avviene

con **accelerazione angolare costante**

In questo caso le equazioni del moto sono del tutto analoghe a quelle lineari (moto traslatorio):

Moto traslatorio	Moto rotatorio
$v = v_0 + a t$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$x = \frac{1}{2} (v_0 + v) t$	$\theta = \frac{1}{2} (\omega_0 + \omega) t$
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$