Lezione XV

(Urti a due dimensioni, Sezione d'Urto, esempi)

FRUIZIONE E UTILIZZO DEI MATERIALI DIDATTICI

- E’ vietata la **copia**, la **rielaborazione**, la **riproduzione** dei contenuti e immagini presenti nelle lezioni in qualsiasi forma

- E’ inoltre vietata la **diffusione**, la **redistribuzione** e la **pubblicazione** dei contenuti e immagini, incluse le registrazioni delle videolezioni con qualsiasi modalità e mezzo non autorizzati espressamente
dall'autore o da Unica

Urti in due dimensioni

Abbiamo visto che nel caso di **urti elastici unidimensionali**, l'applicazione delle due leggi di conservazione studiate ci fornisce **sufficienti equazioni** per determinare le velocità **dopo** l'urto, note le velocità prima dell'urto.

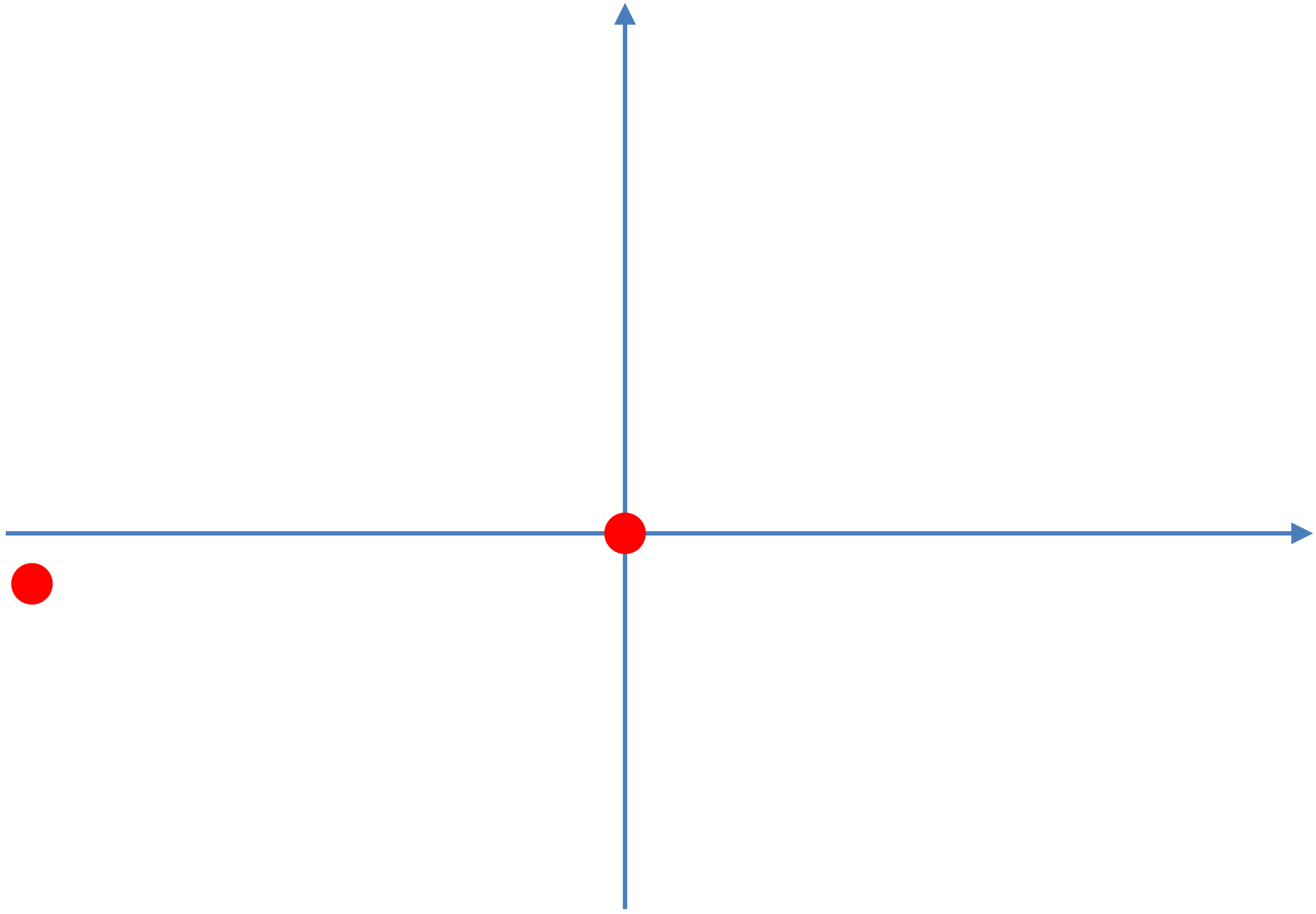
Nel caso di urti **elastici in due dimensioni** invece abbiamo **4 incognite** che sono le componenti x e y delle velocità dopo l'urto delle due particelle, ma abbiamo a disposizione solo **3 equazioni**: **due** per la quantità di moto lungo x e lungo y e **una** per l'energia cinetica.

L'unico caso in cui un urto in due dimensioni può essere risolto è infatti il caso di un urto **completamente anelastico**: in questo caso infatti le due particelle rimangono attaccate, hanno cioè la stessa velocità e abbiamo pertanto **2 incognite in meno**

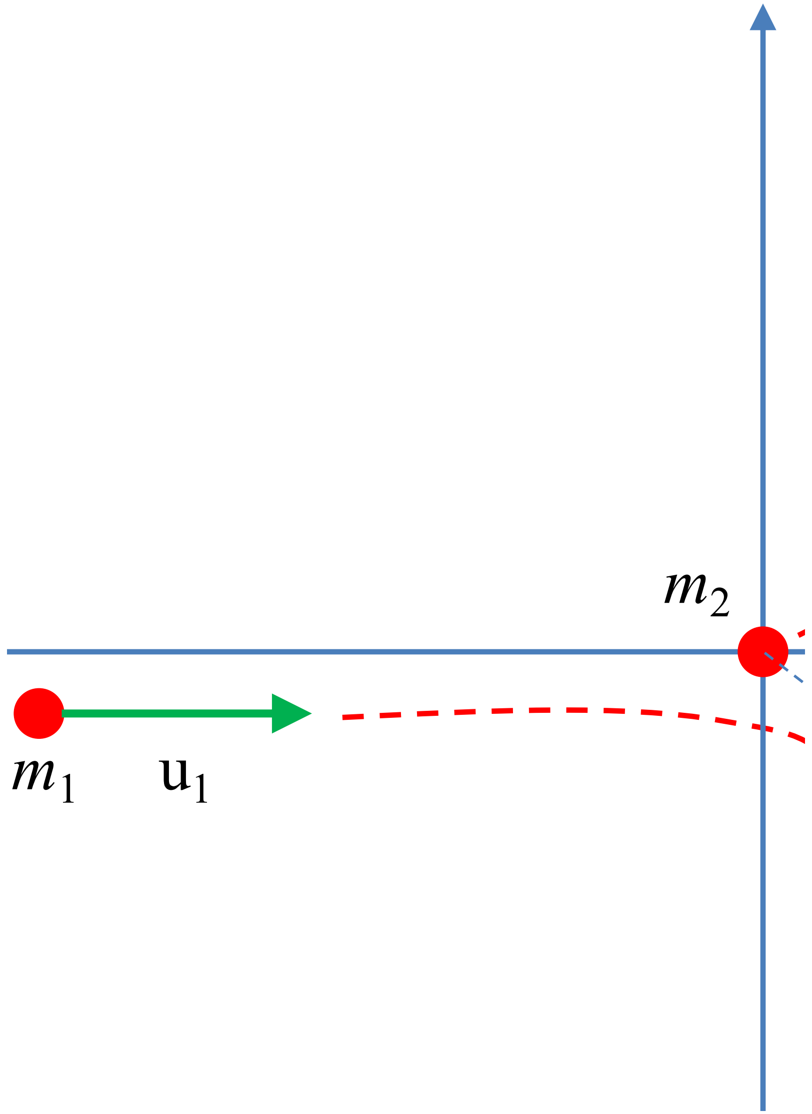
Pertanto, nel caso di **urti elastici** in due dimensioni, occorrono **maggiori informazioni** sul particolare esperimento in questione.

Una situazione semplice è quella in cui viene fornito come dato del problema **l'angolo** con cui viene deviata una delle due particelle.

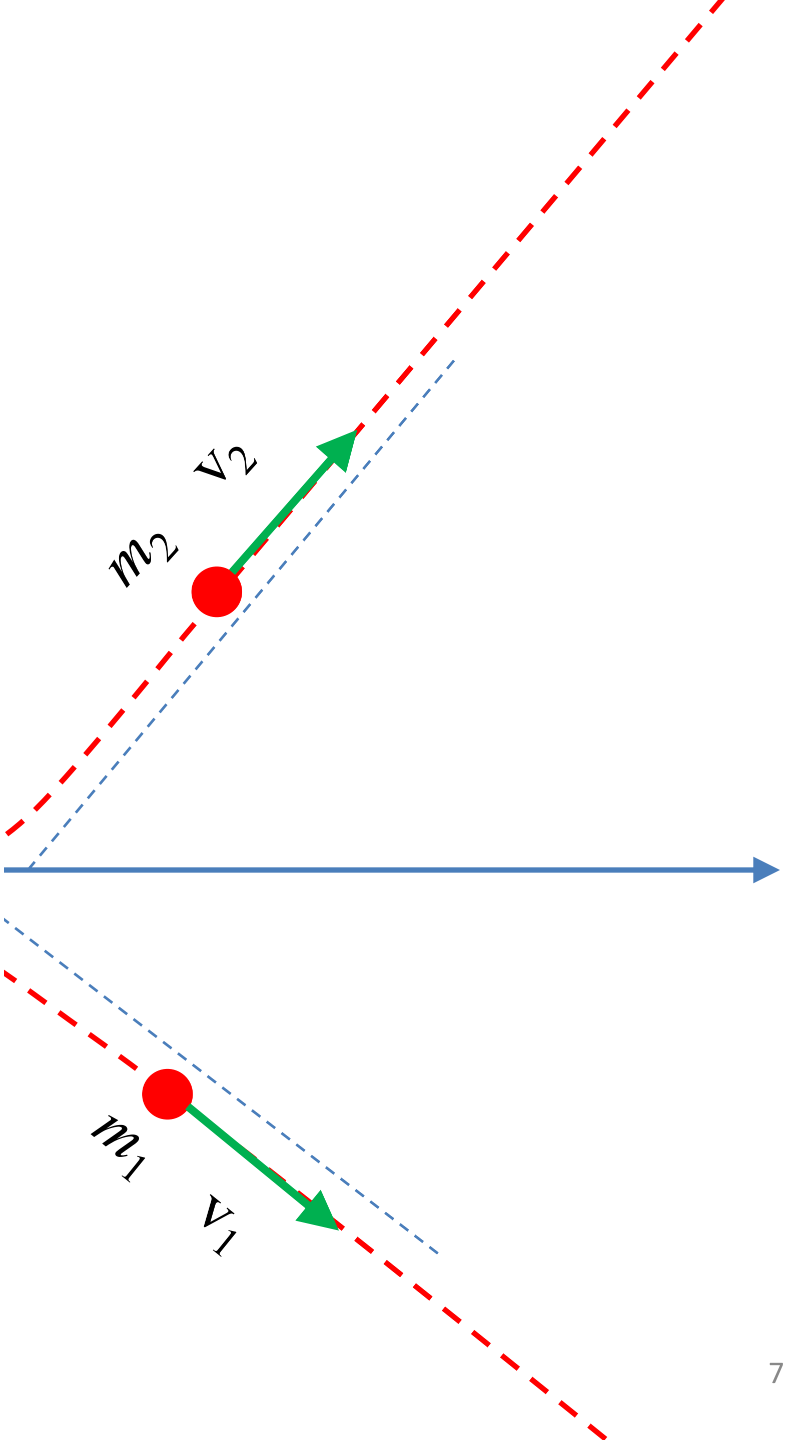
Consideriamo per esempio un urto in due dimensioni come di seguito:



PRIMA DELL'URTO

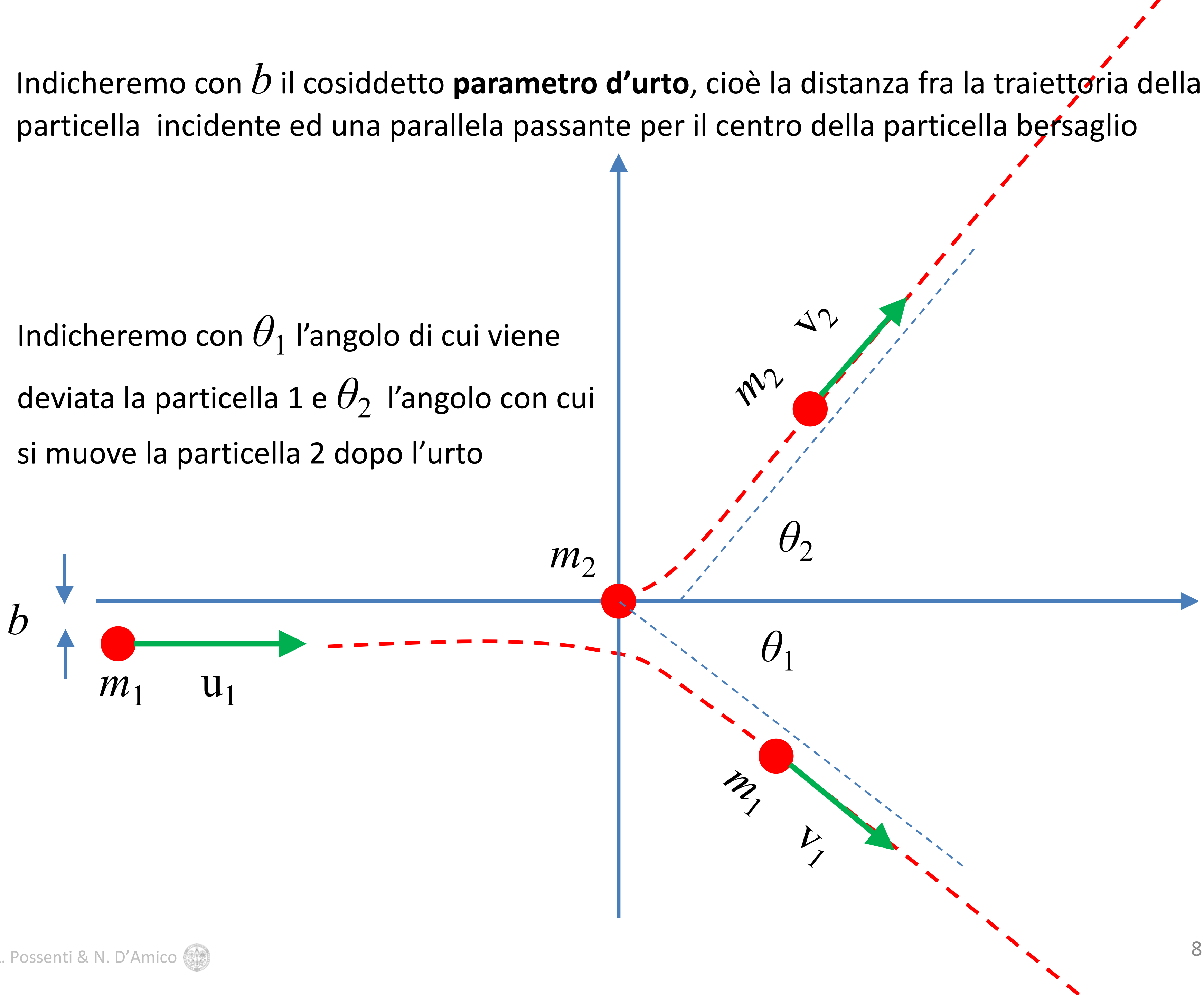


DOPO L'URTO



Indicheremo con b il cosiddetto **parametro d'urto**, cioè la distanza fra la traiettoria della particella incidente ed una parallela passante per il centro della particella bersaglio

Indicheremo con θ_1 l'angolo di cui viene deviata la particella 1 e θ_2 l'angolo con cui si muove la particella 2 dopo l'urto



Applicando la conservazione della quantità di moto, che essendo una relazione vettoriale ci fornisce due equazioni scalari, una lungo x e una lungo y, si ha:

Per l’asse x:

$$m_1 \, \mathrm{u}_1 \; = \; m_1 \, \mathrm{v}_1 \cos(\theta_1) \; + \; m_2 \, \mathrm{v}_2 \cos(\theta_2)$$

e per l’asse y:

$$0 = \; m_1 \, \mathrm{v}_1 \sin(\theta_1) \; + \; m_2 \, \mathrm{v}_2 \sin(\theta_2)$$

Per un urto elastico potremo anche applicare la conservazione dell’energia cinetica:

$$\tfrac{1}{2} \, m_1 \, \mathrm{u}_1^{\,2} \; = \; \tfrac{1}{2} \, m_1 \, \mathrm{v}_1^{\,2} + \; \tfrac{1}{2} \, m_2 \, \mathrm{v}_2^{\,2}$$

Note le **sole** condizioni iniziali:

$$m_1 \quad m_2 \quad \mathrm{e} \ \mathrm{u}_1$$

avremmo **4** incognite:

$$\mathrm{v}_1 \quad \mathrm{v}_2 \quad \theta_1 \ \ \mathrm{e} \ \ \theta_2$$

E abbiamo a disposizione solo **3 equazioni**

Pertanto potremo descrivere il moto dopo l'urto **solo se misuriamo** una delle 4 incognite, per esempio θ_1

Sezione d’urto

Quando invece le **forze in gioco** nell’urto **sono note**, si possono derivare le caratteristiche del moto a partire dalle sole condizioni iniziali. In questo caso, la stessa legge fondamentale della dinamica (la II Legge di Newton) fornisce la **quarta equazione** necessaria.

In questo caso, il **parametro d’urto** diventa un’importante condizione iniziale che deve essere nota per definire il **range di azione** della forza in questione.

Per esempio può essere utile definire una **dimensione massima del parametro d’urto** per il quale la deflessione attesa è la minima, affinché nel particolare esperimento si possa parlare di urto.

In sostanza, risulta rilevante definire la **distanza** sino alla quale la forza di interazione è **efficace**

In sostanza, possiamo definire un'**area** attorno alla particella bersaglio, tale che l'urto avviene solo se la particella incidente **intercetta questa area**

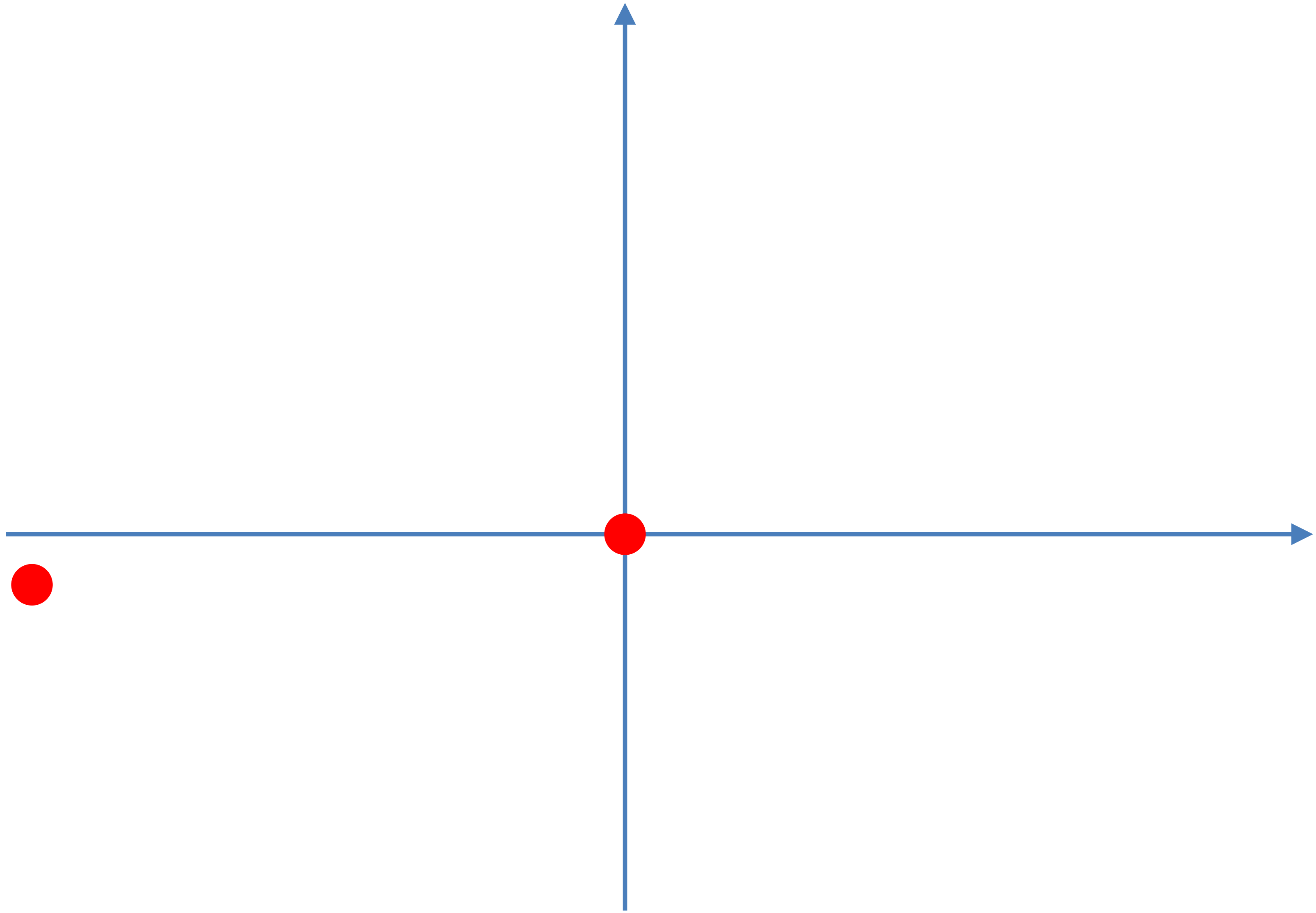
Chiameremo quest'area sezione d'urto σ

Esempio 1

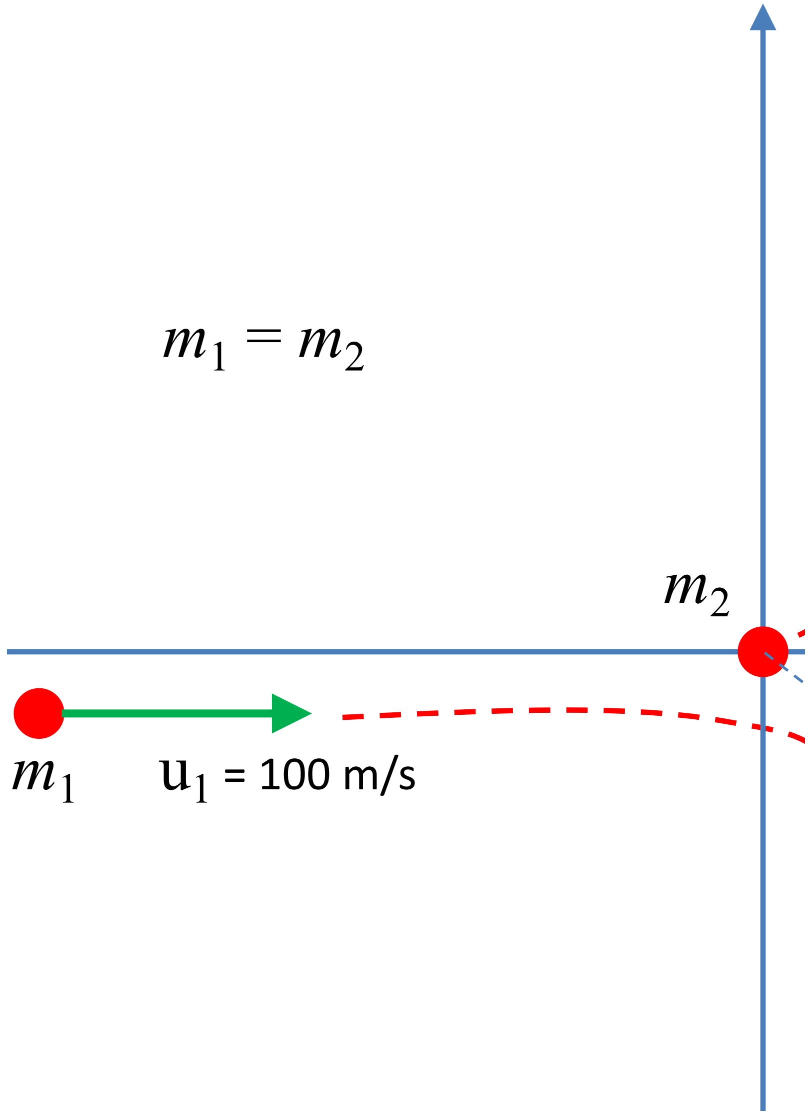
Una molecola che ha una velocità di 100 m/sec urta elasticamente contro un'altra molecola ferma di eguale massa. Dopo l'urto la molecola incidente si muove ad un angolo di 30° rispetto alla direzione iniziale.

Quesito: Determinare le velocità delle due molecole dopo l'urto e l'angolo formato dalla traiettoria della molecola originariamente ferma con la direzione di incidenza della molecola incidente.

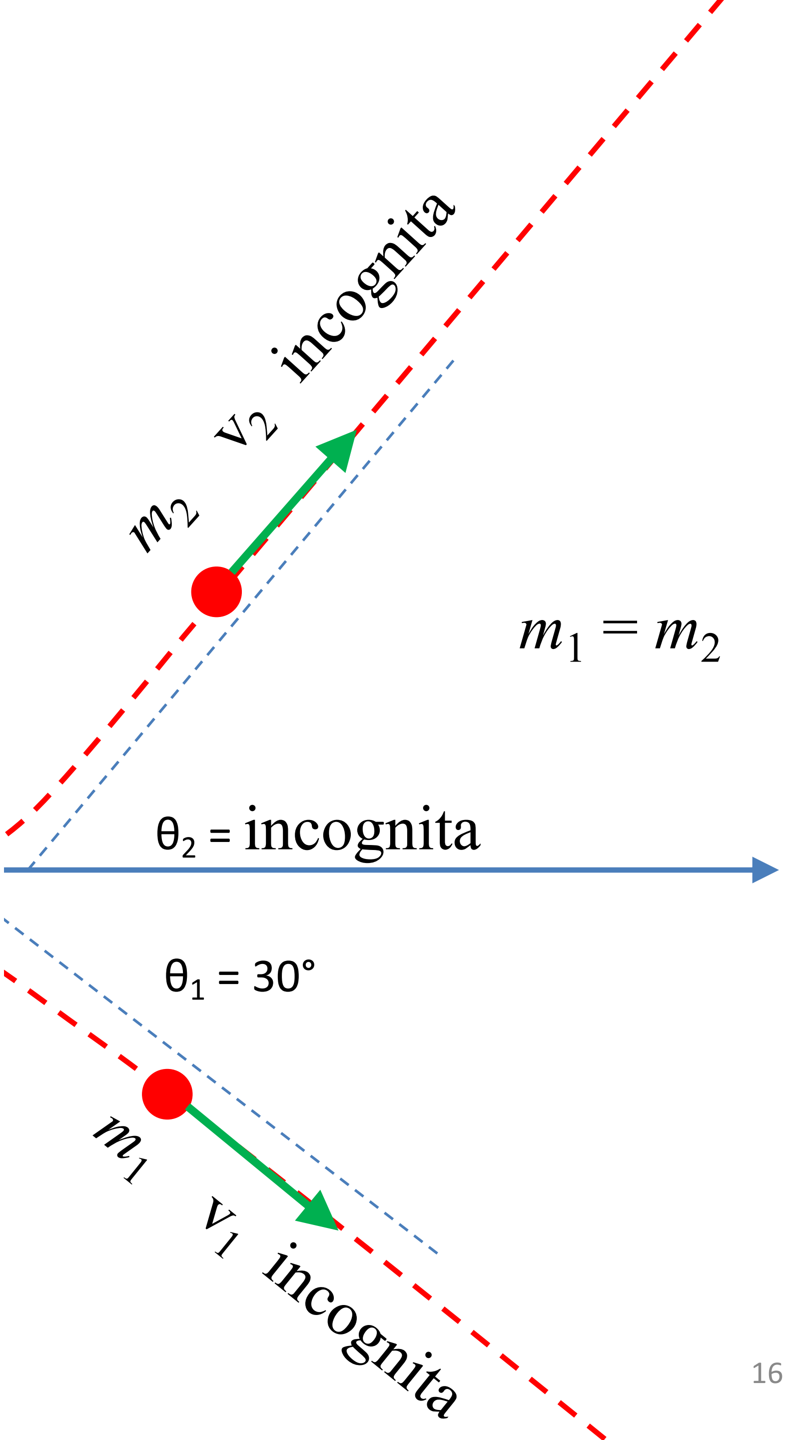
L’esercizio in questione propone esattamente il caso illustrato a lezione:



Condizioni iniziali:



Condizioni finali



Poniamo $m = m_1 = m_2$. Dalla conservazione della quantità di moto si ha:

Per l'asse x:

P_x iniziale = P_x finale

$$m\,u_1 = m\,v_1 \cos(\theta_1) + m\,v_2 \cos(\theta_2)$$

$$u_1 = v_1 \cos(\theta_1) + v_2 \cos(\theta_2)$$

Per l'asse y:

P_y iniziale = P_y finale

$$0 = m\,v_1 \sin(\theta_1) + m\,v_2 \sin(\theta_2)$$

$$0 = v_1 \sin(-\theta_1) + v_2 \sin(\theta_2)$$

$$0 = -v_1 \sin(\theta_1) + v_2 \sin(\theta_2)$$

$$v_1 \sin(\theta_1) = v_2 \sin(\theta_2)$$

(porre attenzione ai segni, vista la scelta di contare θ_1 in modo orario)

Dalla conservazione dell'energia cinetica si ricava:

$$\tfrac{1}{2}\, m\, u_1^2 = \tfrac{1}{2}\, m\, v_1^2 + \tfrac{1}{2}\, m\, v_2^2$$

$$u_1^2 = v_1^2 + v_2^2$$

Riassumendo abbiamo a disposizione le tre equazioni per risolvere le tre incognite:

$$u_1 = v_1 \cos(\theta_1) + v_2 \cos(\theta_2)$$

$$v_1 \sin(\theta_1) = v_2 \sin(\theta_2)$$

$$u_1^2 = v_1^2 + v_2^2$$

Esempio 2

Una palla avente una massa di 100 gr viene colpita da una mazza mentre vola orizzontalmente ad una velocità di 30 m/s. Dopo l'urto la palla viaggia ad una velocità di 40 m/s in verso opposto. **Determinare l'impulso della collisione**.

Una palla avente una massa di 100 gr viene colpita da una mazza mentre vola orizzontalmente ad una velocità di 30 m/s. Dopo l'urto la palla viaggia ad una velocità di 40 m/s in verso opposto. **Determinare l'impulso della collisione**.

Ovviamente **non** possiamo ricavare l'impulso dalla sua definizione:

$$\mathbf{J} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\, dt$$

In quanto non conosciamo $\mathbf{F}$ (né tantomeno t_1 e t_2)

Dobbiamo servirci della relazione che ci dice che:

$\mathbf{J} = \Delta\mathbf{p}$ → **cioè: Impulso = variazione quantità di moto**

Pertanto scriveremo:

$$\mathbf{J} = \Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 = m(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)$$

Quindi:

$\mathbf{J} =$ 0,100 Kg **x** (−40 m/sec − 30 m/sec) = 0,100 kg **x** (−70 m/sec) = − 7,0 kg m/sec

Il risultato

− 7,0 kg m /sec

Può essere scritto:

− 7,0 (kg m /sec^2) sec = − 7,0 N sec

ma → dimensioni di una forza

Ovviamente, abbiamo determinato $\mathbf{J}$ come richiesto, ma NON possiamo determinare $\mathbf{F}$, che dipende dall'intervallo di durata dell'impulso

Esempio 3

Un neutrone (massa m_1) urta frontalmente in modo elastico contro un nucleo atomico.

L'energia cinetica iniziale K_i vale:

$$K_i = \frac{1}{2} m_1 \mathrm{u}_1^2$$

Mentre quella finale vale:

$$K_f = \frac{1}{2} m_1 \mathrm{v}_1^2$$

Determinare la diminuzione frazionaria di Energia Cinetica

Un neutrone (massa m_1) urta frontalmente in modo elastico contro un nucleo atomico.

L'energia cinetica iniziale K_i vale:

$$K_i = ½\, m_1\, \mathrm{u}_1^2$$

Mentre quella finale vale:

$$K_f = ½\, m_1\, \mathrm{v}_1^2$$

Determinare la diminuzione frazionaria di Energia Cinetica

La diminuzione percentuale è

$$(K_i - K_f)\,/\,K_i = 1 - \mathrm{v}_1^2\,/\,\mathrm{u}_1^2$$

Quindi la diminuzione frazionaria è

$$(K_i - K_f)/K_i = 1 - \mathrm{v}_1^2/\mathrm{u}_1^2$$

Ricordando che per questo tipo di urto risulta:

$$\mathrm{v}_1 = \mathrm{u}_1 (m_1 - m_2)/(m_1 + m_2)$$

e quindi:

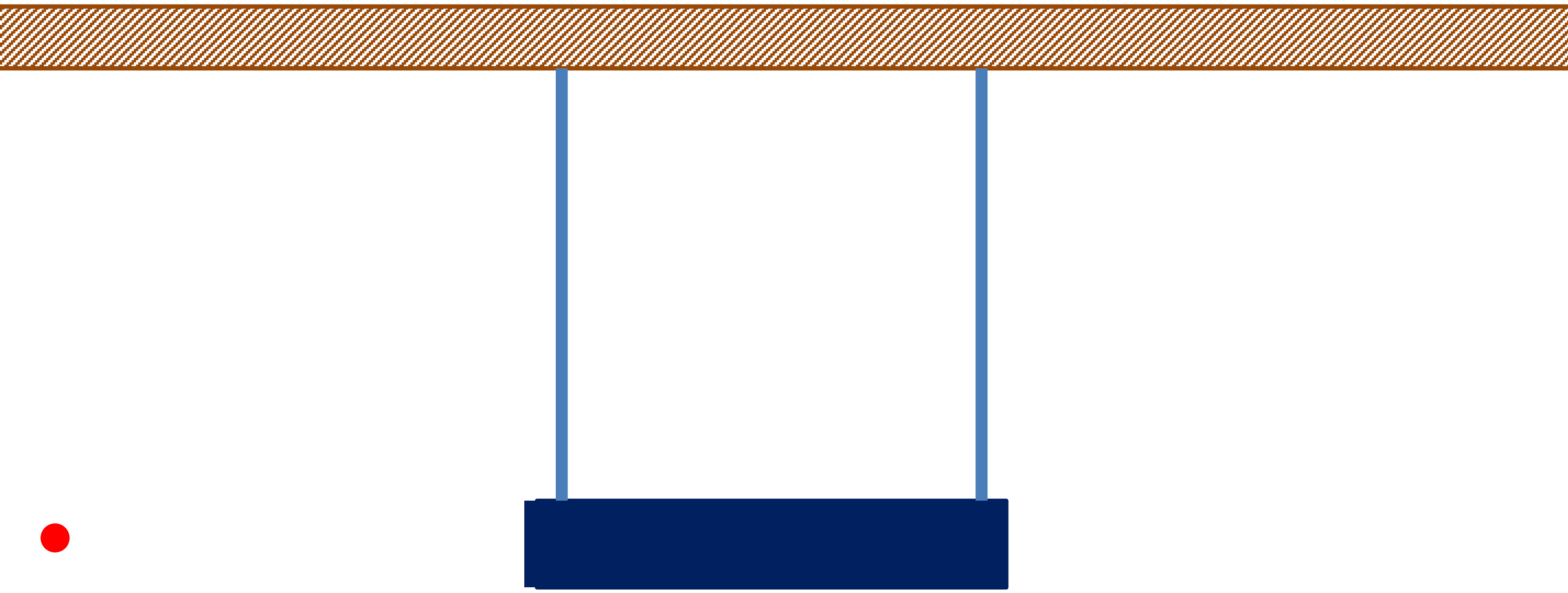
$$(K_i - K_f)/K_i = 1 - (m_1 - m_2)^2/(m_1 + m_2)^2$$

$$= 4\, m_1\, m_2/(m_1 + m_2)^2$$

Esempio 4

Il cosiddetto pendolo balistico viene usato per **misurare la velocità** delle pallottole.

Il sistema è così congegnato: un grande blocco di legno di massa M è appeso con due cordicelle e la pallottola di massa m, sparata orizzontalmente, incide su un lato



Consideriamo la conservazione della componente orizzontale della quantità di moto del sistema pallottola-legno. La quantità di moto iniziale è quella della pallottola.

Indicando con u la velocità iniziale della pallottola e con v la velocità subito dopo l'urto della pallottola e del legno attaccati, scriveremo:

$$P_{iniziale} = m\,\mathrm{u}$$

$$P_{finale} = (m + \mathrm{M})\mathrm{v}$$

E poiché:

$$P_{finale} = P_{iniziale} \quad \rightarrow \quad m\,\mathrm{u} = (m + \mathrm{M})\mathrm{v}$$

D'altra parte, la velocità v che acquista il sistema pallottola-legno subito dopo l'urto corrisponde ad una energia cinetica $K = ½\,(m + \mathrm{M})\mathrm{v}^2$

Quindi adesso sappiamo che questo pendolo comincerà ad oscillare, raggiungendo una altezza massima y tale che l'energia potenziale corrispondente U eguagli l'energica cinetica subito dopo l'urto K. Quindi scriveremo:

$$½\,(m + \mathrm{M})\mathrm{v}^2 = (m + \mathrm{M})\ \mathrm{g}\ y$$

Da cui si ricava: $\mathrm{v} = (2\ \mathrm{g}\ y)^{1/2}$

Tornando alla equazione della quantità di moto:

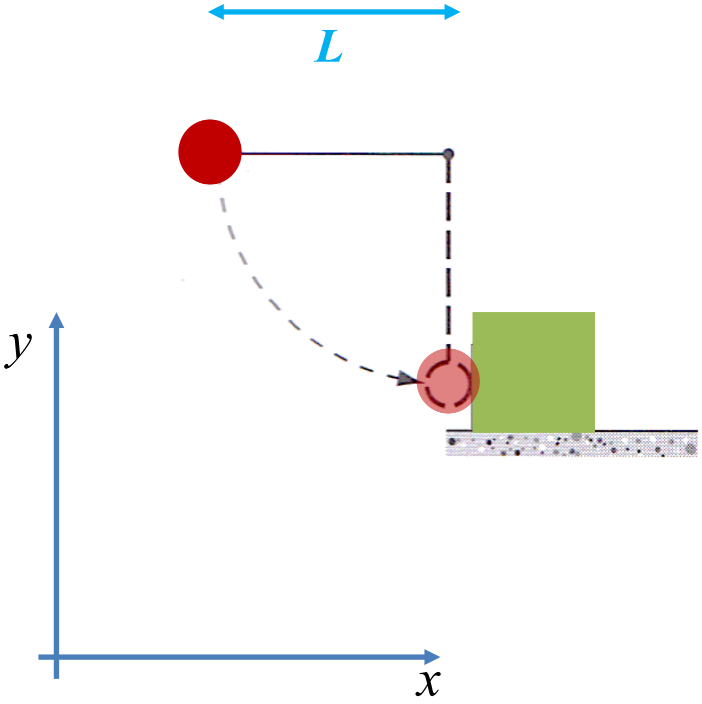
$$m\ \mathrm{u} = (m + \mathrm{M})\mathrm{v}$$

si ricava:

$$m\ \mathrm{u} = (m + \mathrm{M})\ (2\ \mathrm{g}\ y)^{1/2} \quad \rightarrow \quad \mathrm{u} = (1/m)\ (m + \mathrm{M})\ (2\ \mathrm{g}\ y)^{1/2}$$

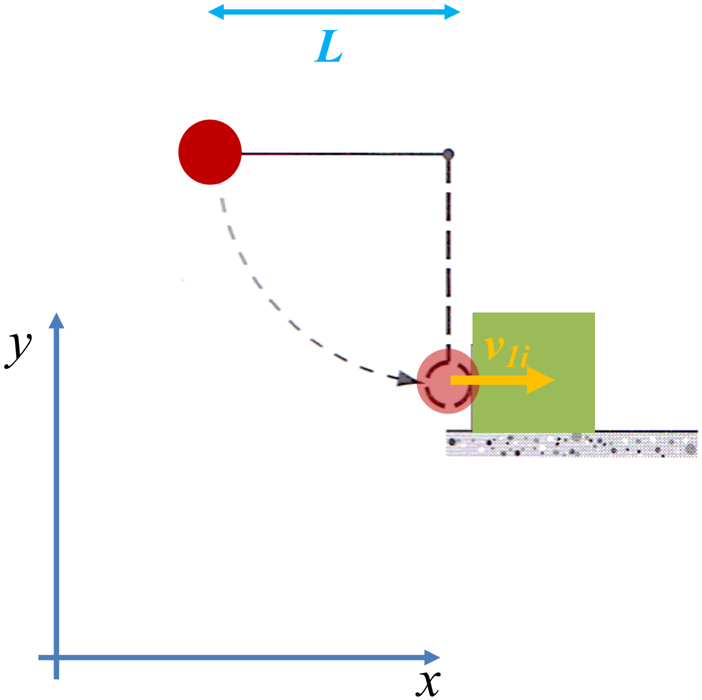
Questa è la velocità **iniziale** della pallottola ricavata in funzione delle grandezze note

Esempio 5



Una palla di acciaio con massa 0,514 kg, attaccata a un filo di lunghezza 68,7 cm fissato all'altra estremità, è lasciata libera partendo da una posizione in cui il filo è orizzontale. Come mostra la figura, nel punto più basso della sua corsa la palla colpisce un blocco di acciaio di 2,63 kg fermo su un piano orizzontale privo di attrito. Nell'urto metà dell'energia meccanica si converte in energia interna e in energia acustica. Calcolare le velocità finali del blocco e della palla dopo l'urto.

Esempio 5



Una palla di acciaio con massa 0,514 kg, attaccata a un filo di lunghezza 68,7 cm fissato all'altra estremità, è lasciata libera partendo da una posizione in cui il filo è orizzontale. Come mostra la figura, nel punto più basso della sua corsa la palla colpisce un blocco di acciaio di 2,63 kg fermo su un piano orizzontale privo di attrito. Nell'urto metà dell'energia meccanica si converte in energia interna e in energia acustica. Calcolare le velocità finali del blocco e della palla dopo l'urto.

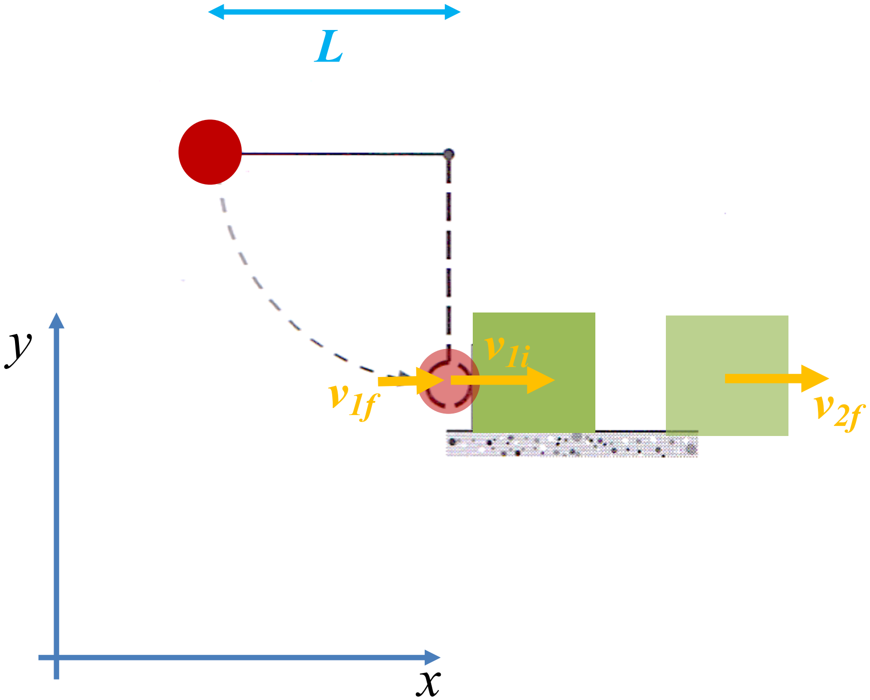
La velocità della palla d'acciaio immediatamente prima dell'urto può essere ricavata attraverso la legge di conservazione dell'energia meccanica; l'energia potenziale posseduta inizialmente dalla sfera viene convertita integralmente in energia cinetica:

$$m_1 g L = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 .$$

La velocità della palla prima dell'urto è quindi:

$$v_{1i} = \sqrt{2gL} = 3{,}70 \text{ m/s} .$$

Esempio 5



Una palla di acciaio con massa 0,514 kg, attaccata a un filo di lunghezza 68,7 cm fissato all'altra estremità, è lasciata libera partendo da una posizione in cui il filo è orizzontale. Come mostra la figura, nel punto più basso della sua corsa la palla colpisce un blocco di acciaio di 2,63 kg fermo su un piano orizzontale privo di attrito. Nell'urto metà dell'energia meccanica si converte in energia interna e in energia acustica. Calcolare le velocità finali del blocco e della palla dopo l'urto.

La velocità della palla d'acciaio immediatamente prima dell'urto può essere ricavata attraverso la legge di conservazione dell'energia meccanica; l'energia potenziale posseduta inizialmente dalla sfera viene convertita integralmente in energia cinetica:

$$m_1 g L = \frac{1}{2} m_1 v_{1\mathrm{i}}^2 .$$

La velocità della palla prima dell'urto è quindi:

$$v_{1\mathrm{i}} = \sqrt{2gL} = 3{,}70 \ \mathrm{m/s} .$$

L'energia cinetica dopo l'urto è pari alla metà dell'energia meccanica prima dell'urto, come asserito dal testo. Un'altra equazione è fornita dalla conservazione della quantità di moto totale: infatti la sua componente verticale è zero e rimane zero, perché anche dopo l'urto i due corpi si muovono orizzontalmente; e non ci sono forze orizzontali esterne. Si ottiene il sistema nelle due incognite $v_{1\mathrm{f}}$, $v_{2\mathrm{f}}$

$$\begin{cases} m_1 v_{1\mathrm{i}} + m_2 v_{2\mathrm{i}} = m_1 v_{1\mathrm{f}} + m_2 v_{2\mathrm{f}} \\ 0{,}5\left(\frac{1}{2} m_1 v_{1\mathrm{i}}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2\mathrm{i}}^2\right) = \frac{1}{2} m_1 v_{1\mathrm{f}}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2\mathrm{f}}^2 . \end{cases}$$

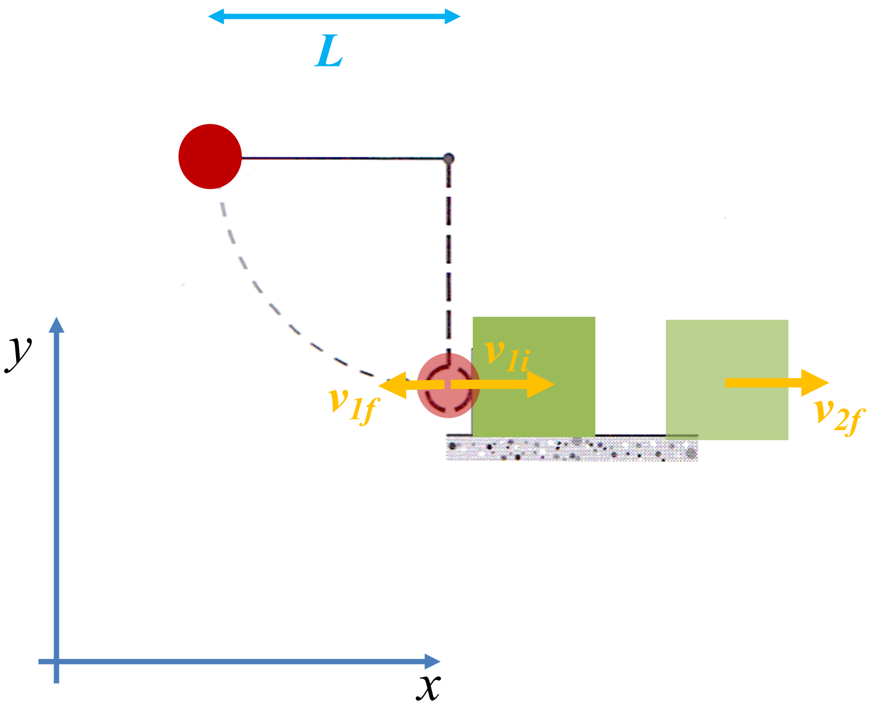
Il sistema può essere scritto in forma più semplice, tenuto conto che $v_{2\mathrm{i}} = 0$:

$$\begin{cases} v_{1\mathrm{f}} + \frac{m_2}{m_1} v_{2\mathrm{f}} = v_{1\mathrm{i}} \\ v_{1\mathrm{f}}^2 + \frac{m_2}{m_1} v_{2\mathrm{f}}^2 = 0{,}5 v_{1\mathrm{i}}^2 \end{cases}$$

che, sostituiti i valori numerici, diventa

$$\begin{cases} v_{1\mathrm{f}} + 5{,}117 v_{2\mathrm{f}} = 3{,}70 \\ v_{1\mathrm{f}}^2 + 5{,}117 v_{2\mathrm{f}}^2 = 6{,}85 . \end{cases}$$

Esempio 5



Una palla di acciaio con massa 0,514 kg, attaccata a un filo di lunghezza 68,7 cm fissato all'altra estremità, è lasciata libera partendo da una posizione in cui il filo è orizzontale. Come mostra la figura, nel punto più basso della sua corsa la palla colpisce un blocco di acciaio di 2,63 kg fermo su un piano orizzontale privo di attrito. Nell'urto metà dell'energia meccanica si converte in energia interna e in energia acustica. Calcolare le velocità finali del blocco e della palla dopo l'urto.

La velocità della palla d'acciaio immediatamente prima dell'urto può essere ricavata attraverso la legge di conservazione dell'energia meccanica; l'energia potenziale posseduta inizialmente dalla sfera viene convertita integralmente in energia cinetica:

$$m_1 g L = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 .$$

La velocità della palla prima dell'urto è quindi:

$$v_{1i} = \sqrt{2gL} = 3{,}70 \text{ m/s} .$$

L'energia cinetica dopo l'urto è pari alla metà dell'energia meccanica prima dell'urto, come asserito dal testo. Un'altra equazione è fornita dalla conservazione della quantità di moto totale: infatti la sua componente verticale è zero e rimane zero, perché anche dopo l'urto i due corpi si muovono orizzontalmente; e non ci sono forze orizzontali esterne. Si ottiene il sistema nelle due incognite v_{1f}, v_{2f}

$$\begin{cases} m_i v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\ 0{,}5 \left(\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 \right) = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 . \end{cases}$$

Il sistema può essere scritto in forma più semplice, tenuto conto che $v_{2i} = 0$:

$$\begin{cases} v_{1f} + \dfrac{m_2}{m_1} v_{2f} = v_{1i} \\ v_{1f}^2 + \dfrac{m_2}{m_1} v_{2f}^2 = 0{,}5 v_{1i}^2 \end{cases}$$

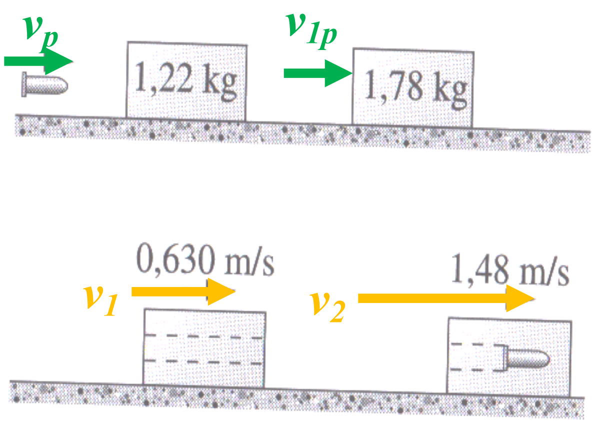
che, sostituiti i valori numerici, diventa

$$\begin{cases} v_{1f} + 5{,}117 v_{2f} = 3{,}70 \\ v_{1f}^2 + 5{,}117 v_{2f}^2 = 6{,}85 . \end{cases}$$

Le soluzioni sono

$$v_{1f} = -1{,}36 \text{ m/s} \qquad v_{2f} = 0{,}989 \text{ m/s}$$

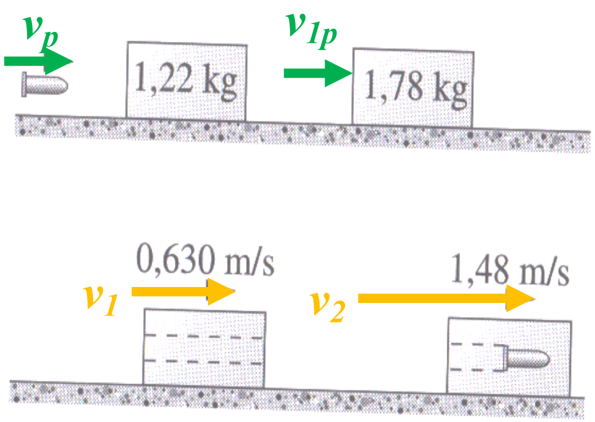
Esempio 6



(b)

Un proiettile di massa 3,54 g è sparato contro due blocchi posti su una superficie piana senza attrito, come in figura (a). Il proiettile passa attraverso il primo blocco, di massa 1,22 kg, e si conficca nel secondo, di massa 1,78 kg. Come risulta dalla figura (b), i due blocchi assumono rispettivamente le velocità di 0,630 m/s e di 1,48 m/s. Trascurando la massa asportata dal primo blocco dal proiettile passante, trovare (a) la velocità del proiettile all'uscita dal primo blocco e (b) la sua velocità iniziale.

Esempio 6



Un proiettile di massa 3,54 g è sparato contro due blocchi posti su una superficie piana senza attrito, come in figura (a). Il proiettile passa attraverso il primo blocco, di massa 1,22 kg, e si conficca nel secondo, di massa 1,78 kg. Come risulta dalla figura (b), i due blocchi assumono rispettivamente le velocità di 0,630 m/s e di 1,48 m/s. Trascurando la massa asportata dal primo blocco dal proiettile passante, trovare (a) la velocità del proiettile all'uscita dal primo blocco e (b) la sua velocità iniziale.

Analizziamo separatamente i due urti e, dato che non ci sono forze impulsive nella direzione del moto tra i blocchi e la superficie di appoggio, applichiamo il principio di conservazione della quantità di moto ai due urti; indichiamo con m_p, m_1 ed m_2 rispettivamente la massa del proiettile, quella del primo blocco e quella del secondo, con v_1 e v_2 le velocità acquisite dal primo e dal secondo blocco in seguito agli urti e con v_p e v_{1p} le velocità del proiettile prima del primo urto e prima del secondo urto. Avremo

$$\begin{cases} m_p v_p = m_p v_{1p} + m_1 v_1 \\ m_p v_{1p} = (m_p + m_2)\, v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_p = 963 \text{ m/s} \\ v_{1p} = 746 \text{ m/s} \end{cases}$$