ESAMI A.A. 2015-16

ANDREA RATTO

SOMMARIO. In questo file presentiamo le prove d'esame relative al Corso di Geometria e Algebra per Ingegneria Ambientale e Civile (a.a.2015-16). Si noti che, durante tutte le prove d'esame, è ammessa la consultazione di qualunque materiale cartaceo (libri, appunti, formulari etc.) e l'uso di calcolatrici NON programmabili; viene invece fatto divieto di utilizzare computer portatili ed ogni altro dispositivo che consenta collegamento internet o video-audio con l'esterno (telefoni cellulari etc.).

1. Esercitazione (15 Aprile 2016, tempo: 115 minuti) per la prima prova parziale

Esercizio 1.1. Si considerino i vettori $\vec{u} = [0, 1, 2]$, $\vec{v} = [1, -1, 3]$ e il punto $P_0 = [0, 2, 3]$.

(i) Calcolare $\sin \vartheta$, dove ϑ è l'angolo formato da $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
(ii) Calcolare il volume V del parallelepipedo individuato da $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{j}$.
(iii) Scrivere l'equazione del piano π che passa per P_0 ed è parallelo a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
(iv) Scrivere un sistema di equazioni che definisce la retta r passante per l'origine e parallela a $\vec{v}$.
(v) Scrivere l'equazione della sfera S avente centro l'origine e tangente al piano π determinato al punto (iii) .
(vi) Scrivere l'equazione del piano π^* che contiene $P^* = [2, 1, 4]$ e la retta r di cui al (iv) sopra.
(vii) Scrivere una rappresentazione parametrica della retta r' che passa per P_0 ed è parallela a $\vec{u}$.
(viii) Calcolare $\mathrm{dist}(r', O)$, dove r' è la retta determinata al punto (vii).

Esercizio 1.2. Siano $P(z) = z^5 + z^4 + z^3 + 27\, z^2 + 27\, z + 27$ e $P'(z) = z^2 + z + 1$:

(1) Calcolare quoziente $Q(z)$ e resto $R(z)$ della divisione di polinomi
$$\frac{P(z)}{P'(z)} \, .$$
(2) Determinare le radici di $P(z)$ in $\mathbb{C}$, precisando per ognuna di esse il valore della molteplicità algebrica.

Esercizio 1.3. Sia $z = 3 + 4i$: calcolare
$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{(i\,z)^2}\right) \quad ; \qquad \mathrm{Im}\left(\frac{1}{(i\,z)^2}\right) \, .$$

Esercizio 1.4. Siano r_1 e r_2 le 2 rette incidenti definite rispettivamente da:
$$r_1 \, : \, \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = -t \end{cases} , t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \qquad r_2 \, : \, \begin{cases} x = -1 \\ y = z \end{cases} \, .$$

(i) Calcolare le coordinate di $Q = r_1 \bigcap r_2$.
(ii) Determinare l'equazione del piano Π che contiene r_1 e r_2, e darne una rappresentazione parametrica.

Esercizio 1.5. Determinare la comune perpendicolare r a r_1 e r_2, dove:

$$r_1 : \begin{cases} x+1=0 \\ y=1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad r_2 : \begin{cases} x+5=0 \\ z=2 \ . \end{cases}$$

Esercizio 1.6. Determinare le radici in $\mathbb{C}$ del seguente polinomio:

$$P(z) = z^6 - 64 \ .$$

Esercizio 1.7.

(i) Dare una rappresentazione parametrica $X(u, v)$ della superficie S (cono) che si ottiene ruotando intorno all'asse y il segmento che unisce i punti $P_0 = [0, 0, 2]$ e $P_1 = [0, 2, 0]$, precisando il dominio di u, v.

(ii) Calcolare l'equazione del piano tangente $T_P(S)$ nel punto $P = [0, 1, 1]$.

Soluzioni:

Soluzione dell'Es. 1.1:

(i)

$$\sin\vartheta = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{11}} \ .$$

(ii) $V = 2$.

(iii) $\pi \ : \quad 5x + 2y - z - 1 = 0$.

(iv)

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 3x - z = 0 \ . \end{cases}$$

(v) $S \ : \quad x^2 + y^2 + z^2 = (1/30)$.

(vi) $\pi^* \ : \quad 7x - 2y - 3z = 0$.

(vii)

$$r' \ : \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 + t \\ z = 3 + 2t \ , \quad t \in \mathbb{R} \ . \end{cases}$$

(viii)

$$\mathrm{dist}(r', O) = \frac{1}{\sqrt{5}} \ .$$

Soluzione dell'Es. 1.2:

(1) Quoziente e resto sono rispettivamente:

$$Q(z) = z^3 + 27 \ ; \qquad R(z) \equiv 0 \ .$$

(2) Dato che $P(z) = (z^3 + 27)\,(z^2 + z + 1)$, è facile determinare le sue 5 radici, ognuna delle quali risulta avere molteplicità algebrica 1:

$$\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \ ; \qquad -3 \ ; \qquad \frac{3 \pm i\,3\sqrt{3}}{2} \ .$$

Soluzione dell'Es. 1.3:

$$\mathrm{Re}(1/(i\,z^2)) = \frac{7}{625} \ ; \qquad \mathrm{Re}(1/(i\,z^2)) = \frac{24}{625} \ .$$

Soluzione dell'Es. 1.4: (i) $Q = [-1, 2, 2]$. (ii) $\Pi \ : \ x - y + z + 1 = 0$. Una rappresentazione parametrica di Π è:

$$\begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = -1 - t + s \qquad\qquad s,\, t \in \mathbb{R} \ . \end{cases}$$

Soluzione dell'Es. 1.5:
r è parallela all'asse x:

$$r \ : \quad \begin{cases} y-1=0 \\ z-2=0 \ . \end{cases}$$

Soluzione dell'Es. 1.6:

$$\pm 2 \ , \quad 1 \pm \sqrt{3} \ , \quad -1 \pm \sqrt{3} \ ,$$

ognuna con molteplicità algebrica 1 .

Soluzione dell'Es. 1.7:

(i) La curva che dobbiamo far ruotare intorno all'asse y è:

$$\gamma(u) = [0, u, \, (2-u)] \qquad 0 \le u \le 2 \ .$$

Quindi:

$$X(u,v) = \begin{cases} x = (2-u)\, \cos v \\ y = u \\ z = (2-u)\, \sin v \ , \qquad 0 \le u \le 2 \ , \quad 0 \le v \le 2\,\pi \ . \end{cases}$$

(ii) $P = X(1, \, (\pi/2))$ e

$$T_P(S) \ : y + z - 2 = 0 \ .$$

2. Prova intermedia del 22 Aprile 2016 (Pari)

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 2.1. (Punti: 2+2) Siano $P(z) = z^4+3z^2+2$, $P'(z) = z^2+2$.
(i) Calcolare
$$Q(z) = \frac{P(z)}{P'(z)} \ .$$
(ii) Determinare le 4 radici complesse di $P(z)$.

Esercizio 2.2. (Punti: 2+3+3) Siano $P = [1, 0, 1]$ e r la retta definita da:
$$r \ : \ \begin{cases} x+1=0 \\ y-z=0 \ . \end{cases}$$
(i) Determinare un versore $\vec{v_r}$ parallelo a r.
(ii) Calcolare $\mathrm{dist}(r,\ P)$.
(iii) Determinare l'equazione del piano Π che contiene P e r, e dare una rappresentazione parametrica di Π .

Svolgere, **a scelta**, **uno** dei due seguenti esercizi:

Esercizio 2.3. (Punti:4) Determinare la comune perpendicolare r a r_1 e r_2, dove:
$$r_1 \ : \ \begin{cases} x-1=0 \\ y-x=0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad r_2 \ : \ \begin{cases} x-2=0 \\ z=0 \ . \end{cases}$$

Esercizio 2.4. (Punti:4) Determinare le radici in $\mathbb{C}$ del seguente polinomio:
$$P(z) = z^6 - 7^6 \ .$$

Esercizio 2.5. (Punti:4) Sia $P = [1, 0, 0]$. Si consideri la superficie regolare $\mathcal{S}$ in $\mathbb{R}^3$ parametrizzata mediante:
$$X(u, v) \ : \ \begin{cases} x = u \\ y = u^2\, v^2 \\ z = v \ , \quad u,\, v \in \mathbb{R} \ . \end{cases}$$
Determinare l'equazione di $T_P(\mathcal{S})$ (piano tangente a $\mathcal{S}$ in P).

NOTA1: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -2 e $+2$ per valutare la chiarezza dell'esposizione.
NOTA2: Voto massimo: **17**. Voto minimo per essere ammessi al secondo parziale: **9**.

Soluzioni della prova parziale del 22 Aprile 2016 (PARI):

Soluzione dell'Es. 2.1:

$$\frac{P(z)}{P'(z)} = z^2 + 1 \ .$$

Le radici di $P(z)$ sono:

$$\pm\, i \,, \qquad \pm\, i\sqrt{2} \ ,$$

ognuna con molteplicità algebrica 1 .

Soluzione dell'Es. 2.2:

(i)

$$\vec{v_r} = \left[0,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \ .$$

(ii)

$$\mathrm{dist}(r,\ P) = \frac{3}{\sqrt{2}} \ .$$

(iii)

$$\Pi \ : \quad x + 2y - 2z + 1 = 0 \ .$$

Una rappresentazione parametrica di Π è:

$$\begin{cases} x = 2s - 2t - 1 \\ y = t \\ z = s \qquad s,\, t \ \in \ \mathbb{R} \ . \end{cases}$$

Soluzione dell'Es. 2.3:

$$r \ : \quad \begin{cases} y - 1 = 0 \\ z = 0 \ . \end{cases}$$

Soluzione dell'Es. 2.4:

$$\pm 7 \ , \quad \frac{7}{2} \pm \frac{7\sqrt{3}}{2} \ , \quad -\frac{7}{2} \pm \frac{7\sqrt{3}}{2} \ ,$$

ognuna con molteplicità algebrica 1 .

Soluzione dell'Es. 2.5:

$$T_P(\mathcal{S}) \ : \quad y = 0 \ .$$

3. Prova intermedia del 22 Aprile 2016 (Dispari)

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 3.1. (Punti: 2+2) Siano $P(z) = z^4+3z^2+2$, $P'(z) = z^2+1$.
(i) Calcolare
$$Q(z) = \frac{P(z)}{P'(z)} \ .$$
(ii) Determinare le 4 radici complesse di $P(z)$.

Esercizio 3.2. (Punti: 2+3+3) Siano $P = [2, 0, 1]$ e r la retta definita da:
$$r \ : \ \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - z = 0 \ . \end{cases}$$

(i) Determinare un versore $\vec{v_r}$ parallelo a r.
(ii) Calcolare $\text{dist}(r, \ P)$.
(iii) Determinare l'equazione del piano Π che contiene P e r, e dare una rappresentazione parametrica di Π .

Svolgere, **a scelta**, **uno** dei due seguenti esercizi:

Esercizio 3.3. (Punti:4) Determinare la comune perpendicolare r a r_1 e r_2, dove:
$$r_1 \ : \ \begin{cases} x + 1 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad r_2 \ : \ \begin{cases} x = 0 \\ y - 1 = 0 \ . \end{cases}$$

Esercizio 3.4. (Punti:4) Determinare le radici in $\mathbb{C}$ del seguente polinomio:
$$P(z) = z^8 - 2^4 \ .$$

Esercizio 3.5. (Punti:4) Sia $P = [0, 1, 0]$. Si consideri la superficie regolare $\mathcal{S}$ in $\mathbb{R}^3$ parametrizzata mediante:
$$X(u, v) \ : \ \begin{cases} x = u^2 \, v \\ y = u \\ z = v \ , \quad u, \, v \, \in \, \mathbb{R} \ . \end{cases}$$
Determinare l'equazione di $T_P(\mathcal{S})$ (piano tangente a $\mathcal{S}$ in P).

NOTA1: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -2 e $+2$ per valutare la chiarezza dell'esposizione.
NOTA2: Voto massimo: **17**. Voto minimo per essere ammessi al secondo parziale: **9**.

Soluzioni della prova parziale del 22 Aprile 2016 (DISPARI):

Soluzione dell'Es. 3.1:

$$\frac{P(z)}{P'(z)} = z^2 + 2 \ .$$

Le radici di $P(z)$ sono:

$$\pm\, i \,, \qquad \pm\, i\sqrt{2} \ ,$$

ognuna con molteplicità algebrica 1 .

Soluzione dell'Es. 3.2:

(i)

$$\vec{v_r} = \left[0,\, \frac{1}{\sqrt{2}},\, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \ .$$

(ii)

$$\mathrm{dist}(r,\, P) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \ .$$

(iii)

$$\Pi \ : \quad x + y - z - 1 = 0 \ .$$

Una rappresentazione parametrica di Π è:

$$\begin{cases} x = s - t + 1 \\ y = t \\ z = s \qquad s,\, t \,\in\, \mathbb{R} \ . \end{cases}$$

Soluzione dell'Es. 3.3:

$$r \ : \quad \begin{cases} y - 1 = 0 \\ z + 1 = 0 \ . \end{cases}$$

Soluzione dell'Es. 3.4:

$$\pm\sqrt{2} \ , \quad \pm\, i\,\sqrt{2} \ , \quad 1 \pm\, i \ , \quad -1 \pm\, i \quad ,$$

ognuna con molteplicità algebrica 1 .

Soluzione dell'Es. 3.5:

$$T_P(\mathcal{S}) \ : \quad x - z = 0 \ .$$

4. Esercitazione del 20 maggio 2016

Esercizio 4.1. Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) .$$

Determinare una **matrice di rotazione** P tale che:

$${}^tP \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} , \quad \text{con } \lambda_1 > \lambda_2 .$$

Esercizio 4.2. Usando i calcoli dell'Esercizio 4.1, svolgere lo studio completo della conica γ di equazione:

$$4xy - 2\sqrt{2}\,x - 2\sqrt{2}y = 0 . \tag{4.1}$$

Esercizio 4.3. Determinare una base ortonormale del sottospazio vettoriale $W \subset \mathbb{R}^4$ definito dal seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2\,x_4 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

Esercizio 4.4. Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R}) .$$

(i) Stabilire se A è diagonalizzabile.
(ii) Determinare (se possibile) $P \in M_4(\mathbb{R})$ tale che $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sia diagonale.

Soluzioni dell'esercitazione del 20 maggio 2016:

Soluzione dell'Es. 4.1: Si trova:

$$P = \begin{bmatrix} (1/\sqrt{2}) & -(1/\sqrt{2}) \\ \\ (1/\sqrt{2}) & (1/\sqrt{2}) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad {}^tP \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} .$$

Soluzione dell'Es. 4.2: Preliminarmente, si verifica che $\det(A') \neq 0$ (conica non degenere) e $\det(A) < 0$ (iperbole). Rispetto alle coordinate x', y' , legate alle coordinate di partenza dalla rotazione

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} ,$$

l'equazione dell'iperbole γ diventa:

$$2\,x'^{\,2} - 2\,y'^{\,2} - 4x' = 0 \ , \quad \text{ovvero} \quad (x'-1)^{\,2} - y'^{\,2} = 1 \ .$$

Gli assi x', y' si ottengono da quelli di partenza mediante una rotazione, in senso antiorario, pari ad un angolo $\theta = (\pi/4)$. Si conclude passando alla rappresentazione grafica in cui si riconosce che gli asintoti di γ sono paralleli agli assi del sistema di partenza.

Soluzione dell'Es. 4.3: $\rho(A) = 2$, per cui abbiamo $n - \rho(A) = 2$ incognite libere.

$$I = \left\{ {}^t[\,-(3/2)\,x_4,\; x_3 + (1/2)\,x_4, x_3, x_4\,] \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_3,\, x_4 \in \mathbb{R} \right\} .$$

Ne segue che una base di W è, ad esempio:

$${}^t[0,\ 1,\ 1,\ 0] \ , \quad {}^t[-3,\ 1,\ 0,\ 2] \ .$$

Ortonormalizzando:

$${}^t[0,\ (1/\sqrt{2}),\ (1/\sqrt{2}),\ 0] \ , \quad \mathrm{vers}({}^t[-6,\ 1,\ -1,\ 4]) = \frac{1}{\sqrt{54}}\ {}^t[-6,\ 1,\ -1,\ 4] \ .$$

Soluzione dell'Es. 4.4:

(i) $P(\lambda) = \lambda^2\,(1-\lambda)^2$. Quindi $\lambda_1 = 0$, con $m_a(\lambda_1) = m_g(\lambda_1) = 2$, e $\lambda_2 = 1$, con $m_a(\lambda_2) = m_g(\lambda_2) = 2$, per cui A è diagonalizzabile.

(ii)

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

5. Prova parziale del 27 Maggio 2016

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 5.1. (Punti: 7) Svolgere lo studio completo della conica γ di equazione:

$$3\,x^2 + 3\,y^2 - 4\,xy - 5 = 0$$

(porre $\lambda_1 > \lambda_2$).

Esercizio 5.2. (Punti: 4) Determinare una base ortonormale del sottospazio vettoriale $W \subset \mathbb{R}^4$ definito dal seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 3\,x_4 = 0 \\ x_1 - 2\,x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3\,x_4 = 0 \end{cases} \tag{5.1}$$

Esercizio 5.3. (Punti: 5) Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \ .$$

Determinare (se possibile) una matrice invertibile $P \in M_3(\mathbb{R})$ tale che $P^{-1} \cdot A \cdot P$ è una matrice diagonale.

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -2 e $+2$ per valutare la chiarezza espositiva.

Soluzioni della prova parziale del 27 Maggio 2016:

Soluzione dell'Es. 5.1: La conica è non degenere e si tratta di un'ellisse ($\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 1$). Rispetto alle coordinate x', y', legate alle coordinate di partenza dalla rotazione

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} ,$$

dove

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} ,$$

l'equazione della conica γ diventa:

$$x'^{\,2} + \frac{y'^{\,2}}{5} = 1$$

Osservando che le colonne di P rappresentano i versori degli assi ruotati (rotazione pari ad un angolo di $(\pi/4)$ in senso orario), si procede al disegno qualitativo dell'ellisse (semiasse $a = 1$ lungo l'asse x', e semiasse $b = \sqrt{5}$ lungo l'asse y').

Soluzione dell'Es. 5.2: : $\dim(W) = 1$:

$$W = \left\{ {}^t[2\,x_2,\, x_2,\, 0,\, x_2\,] \ \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_2 \ \in \ \mathbb{R} \right\} .$$

Una base ortonormale di W è: $\overrightarrow{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\ {}^t[2, 1, 0, 1]$.

Soluzione dell'Es. 5.3: A è diagonalizzzabile, in quanto si trovano gli autovalori

$$\lambda_1 = 0 , \quad \lambda_2 = 1 ,$$

con $m_a(\lambda_1) = 1$, e $m_a(\lambda_2) = m_g(\lambda_2) = 2$. Poi si costruisce, ad esempio,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

6. Prova del 15 Giugno 2016

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 6.1. (Punti: 12) Eseguire lo studio completo (disegno compreso) della seguente conica:

$$\gamma : \quad 4\,x^2 \,-\, 4\,y^2 \,-\, 6\,xy + 5 \,=\, 0$$

(si ponga $\lambda_1 < \lambda_2$).

Esercizio 6.2. (Punti: 4+4) Siano $P = [\,1,\,0,\,0\,]$ e r la retta

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - z = 0 \;. \end{cases}$$

(a) Calcolare $\mathrm{dist}(P,\,r)$.
(b) Determinare (se possibile) l'equazione del piano Π che contiene r e l'asse y .

Esercizio 6.3. (Punti: 5) Determinare una base ortonormale $\mathcal{B}$ del sottospazio vettoriale $W \subset \mathbb{R}^4$ definito dal seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \;. \end{cases} \tag{6.1}$$

Esercizio 6.4. (Punti: 5) Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \;\in\; M_3(\mathbb{R}) \;.$$

Stabilire se A è diagonalizzabile.

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -2 e $+2$ per valutare la chiarezza espositiva (scrivere molto **non** equivale a chiarezza espositiva!!).

Soluzioni della prova del 15 Giugno 2016:

Soluzione dell'Es. 6.1:
Si verifica preliminarmente che $\det(A') \neq 0$ e $\det(A) < 0$, per cui γ è un'iperbole (si trovano gli autovalori $\lambda_1 = -5$ e $\lambda_2 = 5$). Poi, diagonalizzando A, si determina la rotazione:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1/\sqrt{10}) & (-3/\sqrt{10}) \\ (3/\sqrt{10}) & (1/\sqrt{10}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} .$$

Rispetto alle coordinate x', y' la conica γ ha equazione:

$$x'^2 - y'^2 = 1 .$$

Per realizzare il disegno si può osservare che l'asse x' coincide con la retta $y = 3x$, mentre l'asse y' coincide con la retta $y = -(1/3)x$. Gli asintoti di γ hanno equazione $y' = \pm x'$, ovvero (pensarci e calcolare) $y = -2x$ e $y = (1/2)\,x$. I punti di γ sugli assi ruotati sono facili da calcolare, e così pure le intersezioni di γ con gli assi x e y: si procede quindi senza difficoltà al disegno dell'iperbole.

Soluzione dell'Es. 6.2:

(a) La proiezione ortogonale di P su r è

$$Q = [(1/3),\, -(1/3),\, (1/3)] ,$$

da cui si ricava $\mathrm{dist}(P,\, r) = (\sqrt{2}/\sqrt{3})$.

(b) Le 2 rette sono incidenti nell'origine, quindi è possibile determinare il piano richiesto. Si trova $\Pi \; : \quad x - z = 0$.

Soluzione dell'Es. 6.3: L'insieme delle soluzioni del sistema è:

$$\left\{ {}^t[0,\, 0,\, x_3,\, -x_3\,] \;\in\; \mathbb{R}^4 \;:\; x_3 \;\in\; \mathbb{R} \right\} ,$$

per cui, ad esempio,

$$\mathcal{B} = \left\{ {}^t[\,0\,,\, 0,\; -(1/\sqrt{2}),\; (1/\sqrt{2})\,] \right\} .$$

Soluzione dell'Es. 6.4: La matrice A ha due autovalori reali: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$. Ma $m_a(\lambda_1) = 2$, mentre $m_g(\lambda_1) = 1$. Quindi si può concludere che A non è diagonalizzabile.

7. Prova del 5 Luglio 2016

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 7.1. (Punti: 3+3+3+3+3) Siano

$$\vec{u} = [1, 2, 0] \ , \quad \vec{v} = [0, 3, 0] \ , \quad \vec{w} = [0, 2, 1] \ .$$

(a) Calcolare $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge (\vec{u} - \vec{v}) + 2(\vec{u} \wedge \vec{v})$.

(b) Determinare un sistema lineare che definisce la retta r che passa per il punto $P_1 = [1, 1, 4]$ ed è parallela a $\vec{w}$.

(c) Determinare l'equazione del piano Π_1 che passa per l'origine e contiene la retta r determinata al punto (b).

(d) Determinare l'equazione del piano Π_2 che passa per $P_2 = [4, 1, 0]$ ed è parallelo agli assi y e z .

(e) Scrivere l'equazione del piano Π_3 che passa per l'origine ed è parallelo a $\vec{u}$ e $(\vec{u} + \vec{w})$.

Esercizio 7.2. (Punti: 6+3) Siano ($t \in \mathbb{R}$)

$$A_t = \begin{bmatrix} (1-t) & (1-t) & 0 & 2 \\ 0 & t & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} , \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} , \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} .$$

(a) Stabilire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ il sistema lineare $A_t \cdot X = B$ ammette soluzione.

(b) Determinare l'insieme delle soluzioni del sistema quando $t = 1$.

Esercizio 7.3. (Punti: 6) Disegnare, precisando in particolare le coordinate del centro C e l'equazione degli asintoti, l'iperbole

$$\gamma \ : 4\,x^2 - y^2 + 8\,x + 2\,y - 1 \quad = 0 \ .$$

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -2 e $+2$ per valutare la chiarezza espositiva (scrivere molto **non** equivale a chiarezza espositiva!!).

Soluzioni della prova del 5 Luglio 2016:

Soluzione dell'Es. 7.1:

(a) Il risultato, che si può ottenere sia attraverso un calcolo diretto, sia attraverso l'uso delle proppriet à algebriche del prodotto vettoriale, è il vettore nullo.

(b)
$$r \ : \ \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - 2z + 7 = 0 \ . \end{cases}$$

(c) $\Pi_1 \ : \quad 7x + y - 2z = 0\,.$

(d) $\Pi_2 \ : \quad x - 4 = 0\,.$

(e) $\Pi_3 \ : \quad 2x - y + 2z = 0 \ .$

Soluzione dell'Es. 7.2:

(a) Il sistema risulta risolubile se e solo se ($t \neq (1/2)$ e $t \neq -1$). Inoltre si può precisare che, quando il sistema è risolubile, ammette ∞^1 soluzioni.

(b) Le soluzioni del sistema, quando $t = 1$, sono:
$$\left\{ {}^t[0,\, 1,\, x_3,\, 0] \, \in \, \mathbb{R}^4 \ : \ x_3, \in \, \mathbb{R} \right\} \ .$$

Soluzione dell'Es. 7.3: Si riscrive, usando il metodo di completamento dei quadrati, l'equazione di γ. Si ottiene
$$\gamma \ : \quad (x+1)^2 - \frac{(y-1)^2}{4} = 1 \ ,$$
da cui è facile ricavare il centro $C = [-1,\, 1]$ e l'equazione dei due asintoti $(y - 1) = \pm\, 2\,(x + 1)$, ovvero:
$$r_1 \ : \quad y = 2x + 3 \quad \text{e} \quad r_2 \ : \quad y = -2x - 1 \ .$$
A questo punto è facile realizzare il disegno, mettendo in luce i seguenti punti di γ:
$$[0, 1] \ , \quad [-2, 1] \ , \quad [-1 - (\sqrt{5}/2), 0] \quad \text{e} \quad [-1 + (\sqrt{5}/2), 0] \ .$$

8. Prova del 21 Luglio 2016

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 8.1. (Punti: 5) Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R}) \ .$$

Stabilire se A è diagonalizzabile.

Esercizio 8.2. (Punti: 11) Siano

$$r_1 \ : \quad \begin{cases} y + x = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 \ : \quad \begin{cases} y - x = 0 \\ x - z - 1 = 0 \ . \end{cases}$$

Determinare la comune perpendicolare r alle rette r_1 e r_2, precisando le coordinate del punto Q_1 di intersezione di r con r_1 e del punto Q_2 di intersezione di r con r_2 .

Esercizio 8.3. (Punti: 7) Disegnare l'ellisse γ di equazione

$$9\,x^2 + y^2 - 18\,x - 4\,y + 4 = 0 \ , \tag{8.1}$$

precisando le coordinate del suo centro C, le lunghezze dei due semi-assi a, b , le coordinate dei punti di intersesezione tra γ e gli assi, e l'equazione della retta r tangente a γ in $P = [2, \, 2]$.

Esercizio 8.4. (Punti: 5+5) Siano $P(z) = z^3 + 8\,z^2 + 41\,z - 122$, $P'(z) = z - 2$.

(a) Calcolare quoziente $Q(z)$ e resto $R(z)$ della divisione di polinomi $P(z) : P'(z)$.
(b) Determinare le radici di $P(z)$ in $\mathbb{C}$ (usare (a)).

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza espositiva (scrivere molto **non** equivale a chiarezza espositiva!!).

Soluzioni della prova del 21 Luglio 2016:

Soluzione dell'Es. 8.1: Il polinomio caratteristico di A è

$$P(\lambda) = (2-\lambda)^2 \cdot (\lambda^2+1) \ .$$

Dato che $P(\lambda)$ ha due radici complesse non reali si conclude che A non è diagonalizzabile.

Soluzione dell'Es. 8.2: Si trova:

$$r \ : \qquad \begin{cases} 4x-1=0 \\ 2y+2z+1=0 \ , \end{cases}$$

$$Q_1 = \left[\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right] \ , \qquad Q_2 = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\right] \ .$$

Soluzione dell'Es. 8.3: Mediante il metodo di completamento dei quadrati si trova che l'equazione dell'ellisse γ equivale a

$$(x-1)^2 + \frac{(y-2)^2}{9} = 1 \ ,$$

da cui si ricava:

$$a = 1 \, , \quad b = 3 \quad \text{e} \quad C = [1, 2] \ .$$

Con questi dati è facile eseguire il disegno: la tangente richiesta r ha equazione $x = 2$, ed i punti di intersezione con gli assi sono

$$[1 \pm (\sqrt{180}/18), 0] \, , \ [0, 2] \ .$$

Soluzione dell'Es. 8.4: (a)

$$Q(z) = z^2 + 10z + 61 \ , \qquad R(z) \equiv 0 \ .$$

(b)

$$z_0 = 2 \ , \quad z_1 = -5 + 6\,i \ , \quad z_2 = -5 - 6\,i \ .$$

9. Prova del 15 Settembre 2016

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 9.1. (Punti: 2+4)
Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ definito da:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \ . \end{cases}$$

(a) Determinare $\dim W$.
(b) Determinare una base di W .

Esercizio 9.2. (Punti: 3+3+3+3)
Si considerino i vettori $\vec{u} = [1, 0, 2]$, $\vec{v} = [2, 1, 0]$ e il punto $P = [1, 3, 1]$.

(a) Determinare l'equazione del piano Π che contiene P ed è parallelo a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
(b) Calcolare la distanza tra l'origine O e il piano Π .
(c) Scrivere il fascio di piani generato dalla retta r che passa per P ed è parallela a $\vec{u}$.
(d) Calcolare $\sin\theta$, dove θ indica l'angolo formato da $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Esercizio 9.3. (Punti: 6)
Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ \in \ M_3(\mathbb{R}) \ .$$

Determinare, se possibile, una matrice invertibile P tale che $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sia una matrice diagonale.

Esercizio 9.4. (Punti: 3+3)

(a) Sia $z = 1 - 2i \ \in \ \mathbb{C}$: calcolare

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z^2}\right) \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Im}\left(\frac{1}{z^2}\right) \ .$$

(b) Determinare le soluzioni in $\mathbb{C}$ di

$$z^2 + 2z + 5 = 0 \ .$$

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -2 e $+2$ per valutare la chiarezza dell'esposizione.

Soluzioni della prova del 15 Settembre 2016:

Soluzione dell'Es. 9.1: (a) La matrice dei coefficienti ha rango 2, per cui $\dim W = n - \rho(A) = 4 - 2 = 2$. Conviene quindi osservare che W è definito semplicemente da

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \ . \end{cases} \tag{9.1}$$

(b) Da (9.1) si ricava immediatamente una base di W:

$$\mathcal{B} = \left\{ {}^t[0,0,2,-1],\ {}^t[1,0,-1,0] \right\} \ . \tag{9.2}$$

Soluzione dell'Es. 9.2:

(a) $\Pi \ : \qquad 2x - 4y - z + 11 = 0.$
(b) $\mathrm{dist}(O,\Pi) = (11/\sqrt{21})$.
(c) $\lambda\,(2x - z - 1) + \mu\,(y - 3) = 0$, dove λ e μ sono parametri reali, non entrambi nulli.
(d) $\sin\theta = (\sqrt{21}/5)$.

Soluzione dell'Es. 9.3:
La matrice A possiede 3 autovalori reali e distinti, ovvero

$$\lambda_1 = 0 \ , \ \lambda_2 = \sqrt{5} \quad \text{e} \quad \lambda_3 = -\sqrt{5} \ ,$$

quindi è diagonalizzabile e si può determinare:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & \sqrt{5} \end{bmatrix} \ .$$

Soluzione dell'Es. 9.4:

(a) Si calcola per prima cosa $z^2 = -3 - 4i$, poi:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z^2}\right) = -\frac{3}{25} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Im}\left(\frac{1}{z^2}\right) = \frac{4}{25} \ .$$

(b)

$$z_1 = -1 + 2i \qquad \text{e} \qquad z_2 = -1 - 2i \ .$$