Lezione XIII

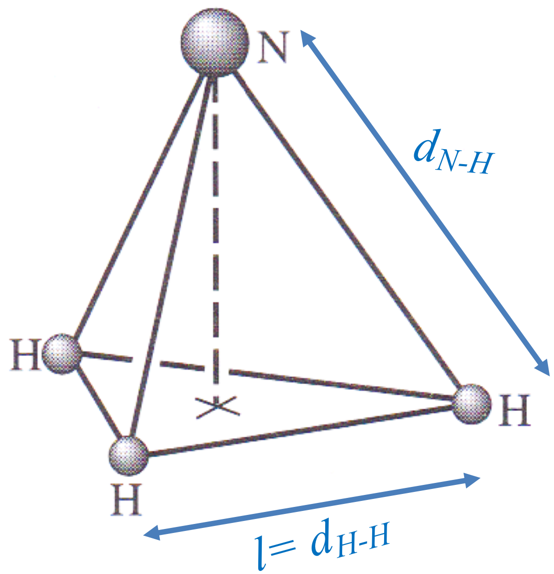
(esercizi,
Impulso,
Urti fra particelle
ad 1 dimensione)

FRUIZIONE E UTILIZZO DEI MATERIALI DIDATTICI

- **E' vietata** la **copia**, la **rielaborazione**, la **riproduzione** dei contenuti e immagini presenti nelle lezioni in qualsiasi forma

- **E' inoltre vietata** la **diffusione**, la **redistribuzione** e la **pubblicazione** dei contenuti e immagini, incluse le registrazioni delle videolezioni con qualsiasi modalità e mezzo non autorizzati espressamente dall'autore o da Unica

Esempio - 6

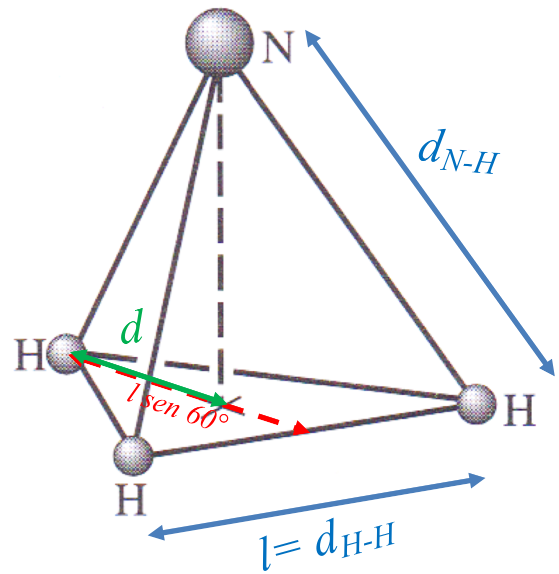


Nella molecola di ammoniaca NH_3 i tre atomi di idrogeno H formano un triangolo equilatero di lato $16{,}28 \cdot 10^{-11}$ m

L'atomo di azoto N costituisce il vertice di una piramide la cui base è individuata dal triangolo formato dai tre atomi di idrogeno (vedi figura). La distanza tra l'atomo di azoto e ciascuno dei tre atomi di idrogeno vale $10{,}14 \cdot 10^{-11}$ m; il rapporto tra la massa atomica dell'azoto e quella dell'idrogeno è 13,9. Si determini la distanza del centro di massa della molecola dall'atomo di azoto.

Esempio - 6

$d = 2/3\ (l\ sen\ 60°\ )$



Nella molecola di ammoniaca NH_3 i tre atomi di idrogeno H formano un triangolo equilatero di lato $16{,}28 \cdot 10^{-11}$ m

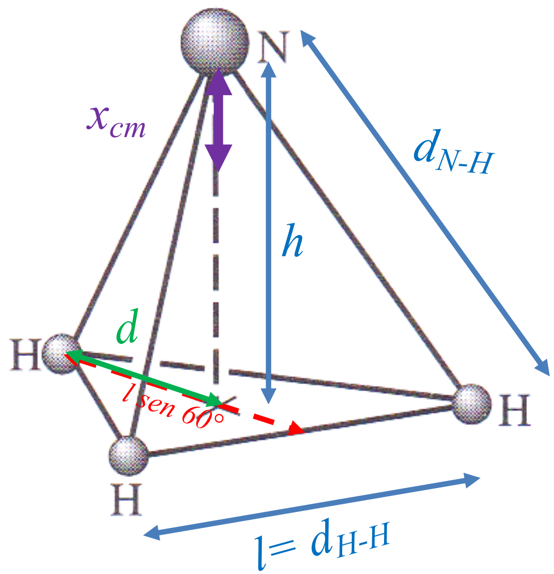
L'atomo di azoto N costituisce il vertice di una piramide la cui base è individuata dal triangolo formato dai tre atomi di idrogeno (vedi figura). La distanza tra l'atomo di azoto e ciascuno dei tre atomi di idrogeno vale $10{,}14 \cdot 10^{-11}$ m; il rapporto tra la massa atomica dell'azoto e quella dell'idrogeno è 13,9. Si determini la distanza del centro di massa della molecola dall'atomo di azoto.

Per calcolare il centro di massa di un insieme di punti materiali è possibile procedere gradualmente, determinando, per esempio, il CM fra due punti, poi il nuovo CM tra questo CM e un terzo punto, ecc. Nel nostro caso allora, dopo aver osservato che il CM dei tre atomi di idrogeno sta nel «baricentro» geometrico del triangolo di base (incrocio delle mediane), immaginiamo di sostituire, ai fini del calcolo del CM, i tre atomi con un punto materiale di massa pari a tre volte la massa dell'idrogeno nel centro del triangolo di base. L'altezza di un triangolo rettangolo di lato l è $h = l\sqrt{3}/2$, per cui, ricordando che il centro dista dal vertice 2/3 della mediana, si ha

$$d = \frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} = 9{,}40 \cdot 10^{-11}\ \text{m}\,.$$

Il CM finale si troverà allora sulla congiungente tale centro con l'atomo di azoto.

Esempio - 6



Nella molecola di ammoniaca NH_3 i tre atomi di idrogeno H formano un triangolo equilatero di lato $16{,}28 \cdot 10^{-11}$ m

L'atomo di azoto N costituisce il vertice di una piramide la cui base è individuata dal triangolo formato dai tre atomi di idrogeno (vedi figura). La distanza tra l'atomo di azoto e ciascuno dei tre atomi di idrogeno vale $10{,}14 \cdot 10^{-11}$ m; il rapporto tra la massa atomica dell'azoto e quella dell'idrogeno è 13,9. Si determini la distanza del centro di massa della molecola dall'atomo di azoto.

Per calcolare il centro di massa di un insieme di punti materiali è possibile procedere gradualmente, determinando, per esempio, il CM fra due punti, poi il nuovo CM tra questo CM e un terzo punto, ecc. Nel nostro caso allora, dopo aver osservato che il CM dei tre atomi di idrogeno sta nel «baricentro» geometrico del triangolo di base (incrocio delle mediane), immaginiamo di sostituire, ai fini del calcolo del CM, i tre atomi con un punto materiale di massa pari a tre volte la massa dell'idrogeno nel centro del triangolo di base. L'altezza di un triangolo rettangolo di lato l è $h = l\sqrt{3}/2$, per cui, ricordando che il centro dista dal vertice 2/3 della mediana, si ha

$$d = \frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} = 9{,}40 \cdot 10^{-11}\ \text{m}\,.$$

Il CM finale si troverà allora sulla congiungente tale centro con l'atomo di azoto.

L'altezza della piramide è

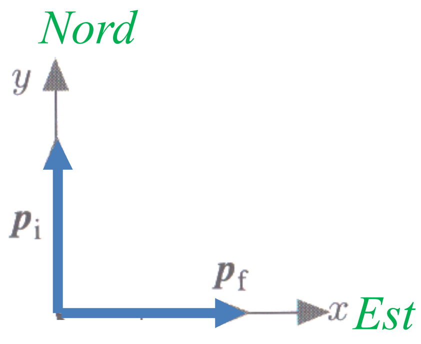
$$h = \sqrt{(10{,}14 \cdot 10^{-11}\ \text{m})^2 - (9{,}40 \cdot 10^{-11}\ \text{m})^2} = 3{,}80 \times 10^{-11}\ \text{m}$$

per cui, misurando le distanze a partire dall'atomo di azoto,

$$x_{cm} = \frac{3m_H h}{3m_H + m_N} = \frac{3h}{3 + m_N/m_H} = \frac{3(3{,}8 \cdot 10^{-11}\ \text{m})}{3 + 13{,}9} = 6{,}75 \times 10^{-12}\ \text{m}$$

Il CM è dunque molto vicino all'atomo di azoto.

Esempio - 7



Un camion di massa 2000 kg che viaggia verso nord alla velocità di 40,0 km/h curva verso est e accelera fino alla velocità di 50,0 km/h. Quali sono il modulo, la direzione e il verso della variazione della sua quantità di moto?

Iniziamo con il calcolare i moduli della quantità di moto iniziale e di quella finale

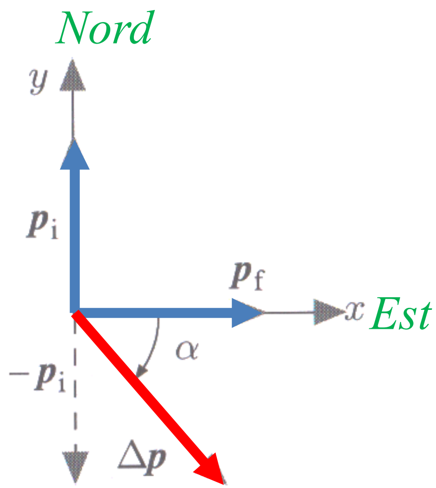
$$p_{\mathrm{i}} = m v_{\mathrm{i}} = 2000 \ \mathrm{kg} \cdot \left(\frac{40}{3{,}6} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \right) = 22\,222 \ \mathrm{N \cdot s}$$

$$p_{\mathrm{f}} = m v_{\mathrm{f}} = 2000 \ \mathrm{kg} \cdot \left(\frac{50}{3{,}6} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \right) = 27\,778 \ \mathrm{N \cdot s} \, .$$

Per quel che riguarda la direzione, indicando con $\boldsymbol{i}$ il versore dell'asse x e con $\boldsymbol{j}$ quello dell'asse y, abbiamo

$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{i}} = (22\,222 \ \mathrm{N \cdot s})\,\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{f}} = (27\,778 \ \mathrm{N \cdot s})\,\boldsymbol{i} \, .$$

Esempio - 7



Un camion di massa 2000 kg che viaggia verso nord alla velocità di 40,0 km/h curva verso est e accelera fino alla velocità di 50,0 km/h. Quali sono il modulo, la direzione e il verso della variazione della sua quantità di moto?

Iniziamo con il calcolare i moduli della quantità di moto iniziale e di quella finale

$$p_\mathrm{i} = mv_\mathrm{i} = 2000 \text{ kg} \cdot \left(\frac{40}{3{,}6}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) = 22\,222 \text{ N} \cdot \text{s}$$

$$p_\mathrm{f} = mv_\mathrm{f} = 2000 \text{ kg} \cdot \left(\frac{50}{3{,}6}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) = 27\,778 \text{ N} \cdot \text{s}\,.$$

Per quel che riguarda la direzione, indicando con $\boldsymbol{i}$ il versore dell'asse x e con $\boldsymbol{j}$ quello dell'asse y, abbiamo

$$\boldsymbol{p}_\mathrm{i} = (22\,222 \text{ N} \cdot \text{s})\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{p}_\mathrm{f} = (27\,778 \text{ N} \cdot \text{s})\boldsymbol{i}\,.$$

Ora siamo in grado di calcolare il vettore variazione di quantità di moto, che risulta essere

$$\Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_\mathrm{f} - \boldsymbol{p}_\mathrm{i} = (27778 \text{ Ns})\ \boldsymbol{i} - (22222 \text{ Ns})\ \boldsymbol{j}\,.$$

Il modulo vale

$$\Delta p = \sqrt{p_\mathrm{f}^2 + p_\mathrm{i}^2} = 35\,573 \text{ N} \cdot \text{s}\,.$$

Per la direzione rispetto all'asse delle x (α) abbiamo

$$\tan\alpha = -\frac{p_\mathrm{i}}{p_\mathrm{f}} = 0{,}8 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -39^\circ\,.$$

Quindi il vettore variazione di quantità di moto risulta avere direzione e verso formante un angolo negativo rispetto all'asse delle x: giace quindi nel quarto quadrante.

Impulso di una forza

Impulso e quantità di moto

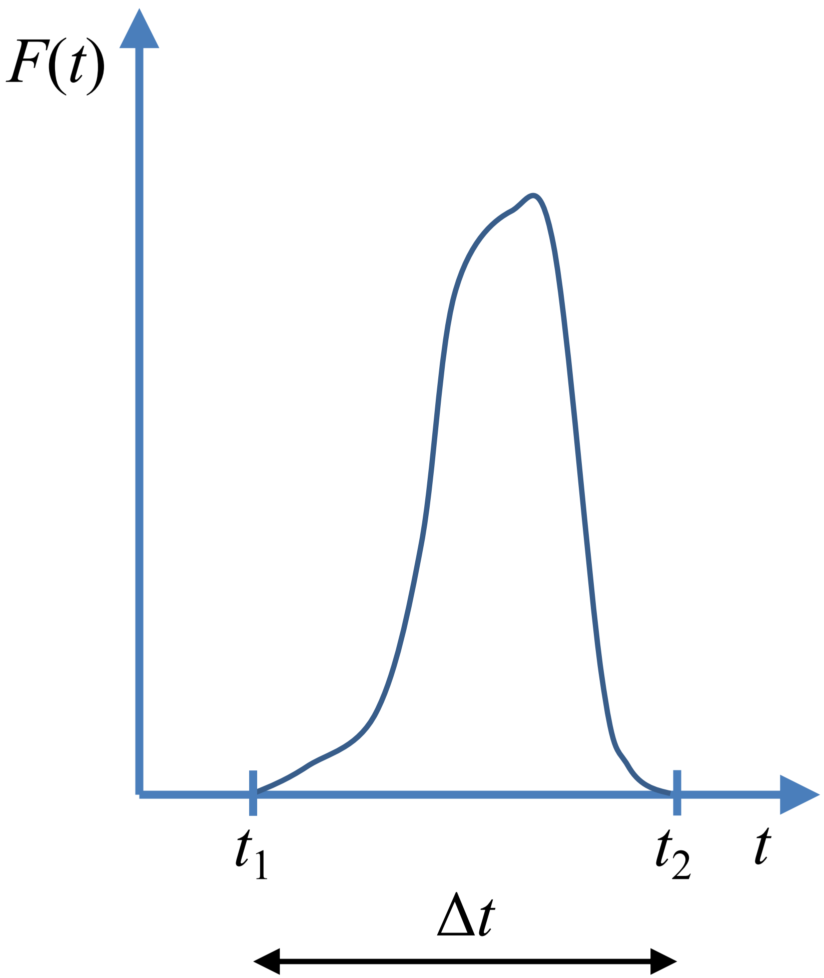
Quando due particelle si urtano, agisce su di esse una forza molto grande per un intervallo di tempo molto breve: durante il tempo in cui esse sono a contatto, esercitano l'una sull'altra una forza molto intensa.

Il fenomeno è simile al caso di una mazza che colpisce una palla. Durante il brevissimo intervallo di tempo in cui la mazza è a contatto con la palla, su di questa si esercita una forza molto grande.

La forza in gioco varia nel tempo in un modo abbastanza complicato che non è facilmente quantificabile.

Queste forze si chiamano **impulsive**.

Il generale possiamo supporre che l'andamento in funzione del tempo di una forza impulsiva del genere sia approssimabile come in figura, e che la forza abbia una direzione costante.



In questo caso, la collisione inizia all'istante t_1 e finisce all'istante t_2.

La forza è nulla prima e dopo.

Dall'equazione che abbiamo scritto a proposito della forza e della variazione di quantità di moto (la II Legge di Newton nella sua formulazione generale), si ha:

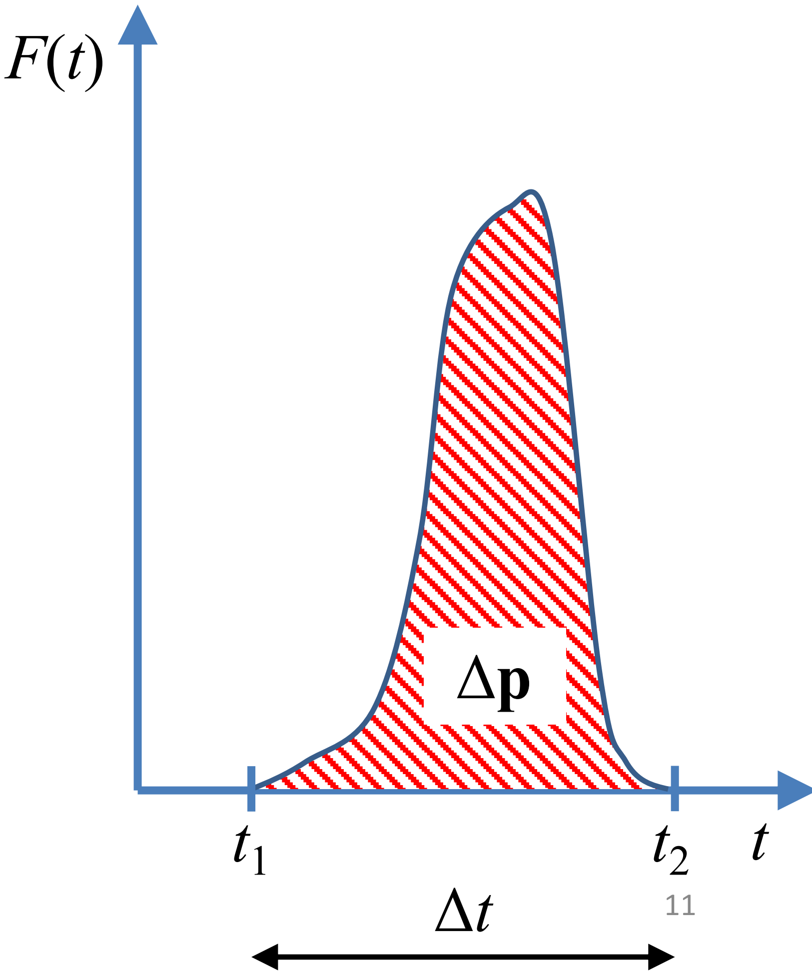
$$\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$$

Possiamo quindi scrivere che la variazione infinitesima di quantità di moto $d\mathbf{p}$ dovuta ad una forza $\mathbf{F}$ che agisce per un tempo infinitesimo dt è data da:

$$d\mathbf{p} = \mathbf{F}(t)\, dt$$

Possiamo quindi ricavare la **variazione di quantità di moto** di un corpo durante un urto **integrando** questa equazione su tutto l'intervallo di tempo in cui dura l'urto, ricavando in sostanza l'area in figura.

$$\Delta\mathbf{p} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t)\, dt$$



L'**integrale** di una forza $\mathbf{F}$ sull'intervallo di tempo in cui agisce, viene definito **impulso** ed

è una **grandezza vettoriale.** Di norma indicheremo il **vettore** impulso con $\mathbf{J}$

$$\mathbf{J} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t)\, dt \rightarrow = \Delta\mathbf{p}$$

Da cui il **TEOREMA DELL'IMPULSO:**

la variazione di quantità di moto a cui è soggetto un corpo su cui agisce una forza impulsiva (direzione costante durante il tempo di applicazione) è uguale all'impulso

Ricordando quello che abbiamo discusso a proposito del teorema lavoro-energia,

risulta quindi che:

$$\Delta \mathrm{L} = \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{F}(\mathrm{x})\, dx = \Delta E = -\Delta U \rightarrow$$

Teorema Lavoro – energia

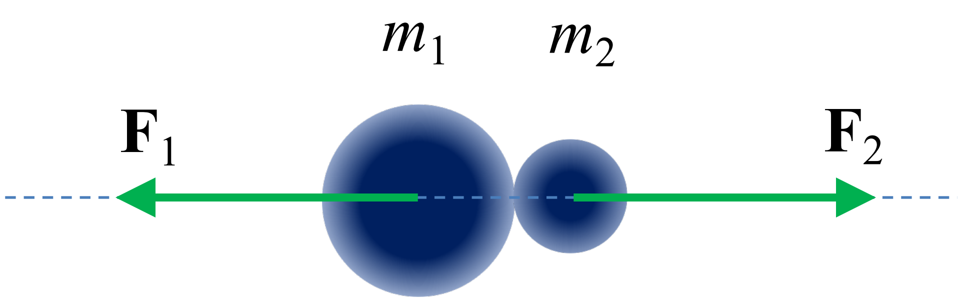
$$\Delta \mathbf{p} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,(t)\, dt \rightarrow$$

Teorema Impulso – Quantità di moto

Urti fra particelle

Fenomeni d'urto

Consideriamo l'urto fra due particelle di massa m_1 e m_2, come illustrato in figura:



Durante il brevissimo intervallo di tempo Δt in cui le due masse sono a contatto, esse esercitano una sull'altra una grande forza. Ad ogni istante, la massa m_1 esercita una forza $\mathbf{F}_2$ sulla massa m_2 e la massa m_2 esercita una forza $\mathbf{F}_1$ sulla massa m_1

In base alla III Legge di Newton, queste due forze sono, istante per istante, eguali e contrarie e agiscono per lo stesso intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$

La variazione di quantità di moto della particella 1 sarà pertanto:

$$\Delta \mathbf{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_1 \, dt \; = \; <\mathbf{F}_1> \Delta t$$

dove $<\mathbf{F}_1>$ è il valor medio di durante l'intervallo Δt

E analogamente, la variazione di quantità di moto della particella 2 sarà:

$$\Delta \mathbf{p}_2 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_2 \, dt \; = \; <\mathbf{F}_2> \Delta t$$

dove $<\mathbf{F}_2>$ è il valor medio di durante l'intervallo Δt

Sappiamo che ad ogni istante risulta $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$ quindi

$$<\mathbf{F}_1> \; = - <\mathbf{F}_2> \qquad \rightarrow \qquad \Delta \mathbf{p}_1 \; = \; - \Delta \mathbf{p}_2$$

La quantità di moto totale del sistema d'altra parte è data dalla:

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$$

E poiché come abbiamo visto

$$\Delta\mathbf{p}_1 = -\Delta\mathbf{p}_2$$

ne segue che

$$\Delta\mathbf{p}_1 + \Delta\mathbf{p}_2 = 0 \rightarrow \Delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = 0 \rightarrow \Delta\mathbf{P} = 0$$

Questo riflette il fatto che la quantità di moto del sistema (che considerato come un sistema isolato in quanto le uniche forze che abbiamo preso in esame sono le forze interne) non cambia durante l'urto

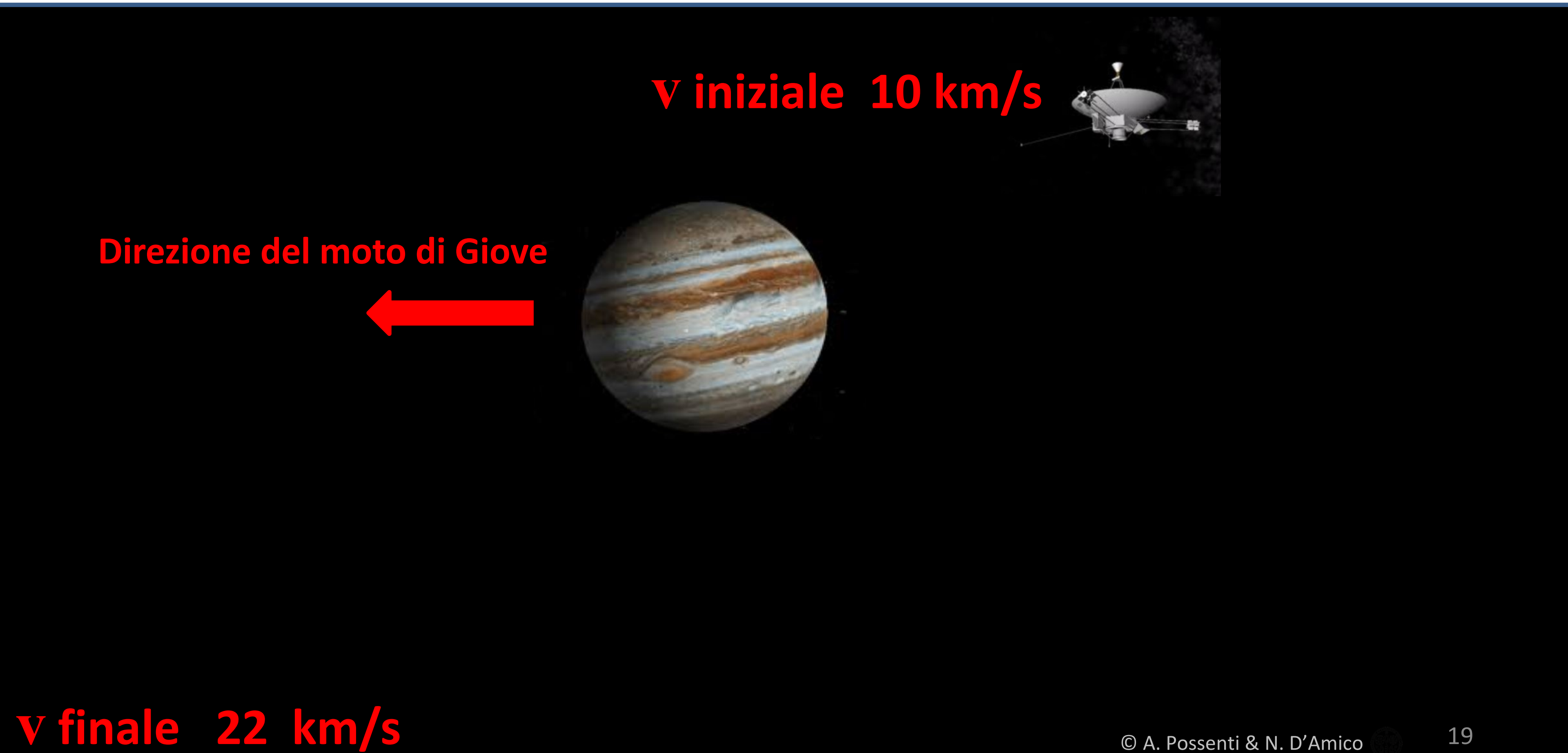
Urti in una dimensione

Sebbene non sempre sono note le forze che agiscono durante un urto, nel caso unidimensionale l'applicazione delle leggi di **conservazione della quantità di moto** e di **conservazione dell'energia** di norma consente di **prevedere l'esito dell'urto**, cioè la determinazione del moto dei corpi dopo l'urto**, se è noto il moto dei corpi prima dell'urto**.

In generale, parlare di urti, **non vorrà dire limitarsi al caso in cui due corpi entrano fisicamente in contatto**. Si può parlare di urti anche in quei casi in cui i corpi in questione esercitano delle **forze l'uno sull'altro**, in grado di **modificarne** il moto.

Un esempio famoso di questo genere di «urti» è la **fionda gravitazionale**:

Un satellite artificiale in rotta di avvicinamento verso un pianeta di grande massa, a causa dell'interazione gravitazionale con esso, viene fiondato via a **velocità superiore** a quella che aveva in avvicinamento al pianeta. Il caso del Pioneer 10



Dunque il pianeta “**afferra**” la sonda e la rilancia fornendogli energia: per analogia proprio col fenomeno della fionda, questo meccanismo viene detto *fionda gravitazionale*

Nell’accelerare la sonda il pianeta fornisce parte della sua energia, rallentando il proprio moto. Tuttavia, a causa dell’enorme disparità tra la massa della sonda e quella del pianeta, quest’ultimo rallenta in maniera impercettibile e possiamo dire che continua a muoversi come se niente fosse successo.

Gli urti di norma sono classificati a seconda che si conservi o non si conservi **l'energia cinetica.**

Quando **l'energia cinetica si conserva**, l'urto è definito **urto elastico**

Se l'energia cinetica **non** si conserva, l'urto è definito **urto anelastico**

Qualitativamente:

Urto elastico: oltre alla Quantità di moto, si conserva l'energia cinetica

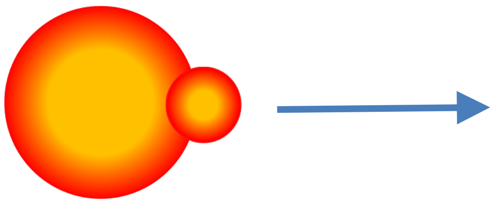
$$\Delta K = 0 \quad \rightarrow \quad \tfrac{1}{2}\, m_1\, \mathrm{v}_1^{\,2} \;=\; \tfrac{1}{2}\, m_2\, \mathrm{v}_2^{\,2}$$

Urto anelastico: La Quantità di moto si conserva, ma l'energia cinetica **NO**

$\Delta K < 0 \rightarrow$ per esempio per dissipazione in energia termica

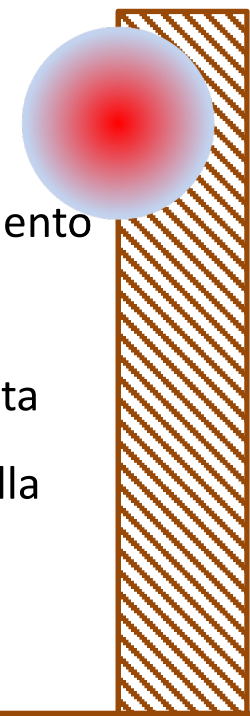
Un altro caso:

Un urto anelastico in cui i due corpi restano **attaccati** dopo l'urto è definito **urto completamente anelastico**



Il termine completamente anelastico **non** vuol dire che **tutta l'energia cinetica** viene dissipata, (**violerebbe la conservazione della Quantità di Moto**!) ma ne viene dissipata piuttosto la **massima consentita** dalla **conservazione della quantità di moto**

Quindi, occorre considerare con particolare attenzione quei casi in cui **sembra** che ogni velocità si sia completamente annullata (violando **apparentemente** la conservazione della quantità di moto). Per esempio, come commentereste l'esempio di seguito ?



Qui sembrerebbe che **tutta** l'energia cinetica si sia dissipata nel riscaldamento della biglia, dato che tutte le velocità si sarebbero annullate e che di conseguenza la legge di conservazione della quantità di moto **non** sia stata rispettata. In realtà **non è vero**: la biglia ha trasmesso quantità di moto alla **massa del muro** (ancorato a terra), solo che dato il **rapporto fra le masse** questa velocità è piccolissima.