Lezione XII

(Quantità di Moto, esercizi)

FRUIZIONE E UTILIZZO DEI MATERIALI DIDATTICI

- E’ vietata la **copia**, la **rielaborazione**, la **riproduzione** dei contenuti e immagini presenti nelle lezioni in qualsiasi forma

- E’ inoltre vietata la **diffusione**, la **redistribuzione** e la **pubblicazione** dei contenuti e immagini, incluse le registrazioni delle videolezioni con qualsiasi modalità e mezzo non autorizzati espressamente
dall'autore o da Unica

Quantità di moto di una particella

La **quantità di moto di una particella** di massa m e velocità $\mathbf{v}$ è un vettore denominato $\mathbf{p}$ definito dalla relazione:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

Può essere utile ricordare che Newton nei suoi famosi *Principia*, enunciò **la II Legge** proprio in base alla quantità di moto, affermando cioè che: *la rapidità di variazione nel tempo della quantità di moto di un corpo è proporzionale alla risultante delle forze agenti su di esso ed è diretta parallelamente a tale forza*. Che implica la seguente formulazione matematica:

$$\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt \qquad \textbf{II legge della Dinamica}$$

Poiché $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, se la massa è **costante**, questa formula si riduce a

$$\mathbf{F} = m\, d\mathbf{v}/dt \quad \rightarrow \quad \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Che è la formulazione della II Legge di Newton che già conosciamo.

Ma scritta come $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ la II Legge ha indubbiamente delle **conseguenze**:

$$\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt = d(m\mathbf{v})/dt$$

In generale, in accordo con le regole del calcolo differenziale scriveremo:

$$d(m\mathbf{v})/dt = \mathbf{v}\, dm/dt + m\, d\mathbf{v}/dt$$

E cioè:

$$\mathbf{F} = \mathbf{v}\, dm/dt + m\mathbf{a}$$

Il che **soltanto** se m=**costante** si riduce alla formulazione $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$

Nota:

Finché applichiamo la II Legge ad un sistema con un **numero fisso di particelle** (tipicamente un corpo rigido), poiché in fisica classica la massa di una particella (punto materiale) è **costante**, la formulazione in questione $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ si riduce alla formulazione più semplice $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$

Tuttavia, se consideriamo un sistema in cui per qualche ragione la massa viene espulsa (per esempio un razzo con il suo carico di carburante: il razzo brucia il suo carburante e lo espelle sotto forma di gas), in questo caso è più appropriato adottare la formulazione più generale della II Legge di Newton

Quindi anche in fisica classica, in molti casi appare più corretto applicare la **II Legge** nella sua formulazione più generale:

$$\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$$

Quantità di moto di un sistema di particelle

Supponiamo di avere un sistema di **N** particelle di massa $m_1\ m_2\ \ldots\ldots m_N$

cosicché la massa totale del sistema risulti:

$$M = m_1 + m_2 \ldots\ldots + m_N$$

Le particelle possono interagire fra di loro e su ognuna di esse possono agire forze esterne.

Ciascuna particella avrà una sua velocità $\mathbf{v}_i$ e quindi una sua quantità di moto $\mathbf{p}_i. = m_i\mathbf{v}_i$

Il sistema nel suo insieme ha quindi una **quantità di moto totale** $\mathbf{P}$ data da:

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \ldots\ldots + \mathbf{p}_N$$

Derivando questa equazione rispetto al tempo si ha:

$$d\,\mathbf{P}/dt = d\,\mathbf{p}_1/dt + d\,\mathbf{p}_2/dt \ldots\ldots + d\,\mathbf{p}_N/dt$$

Data la:

$$d\,\mathbf{P}/dt = d\,\mathbf{p}_1/dt\ + d\,\mathbf{p}_2/dt\ \ldots\ldots + d\,\mathbf{p}_N/dt$$

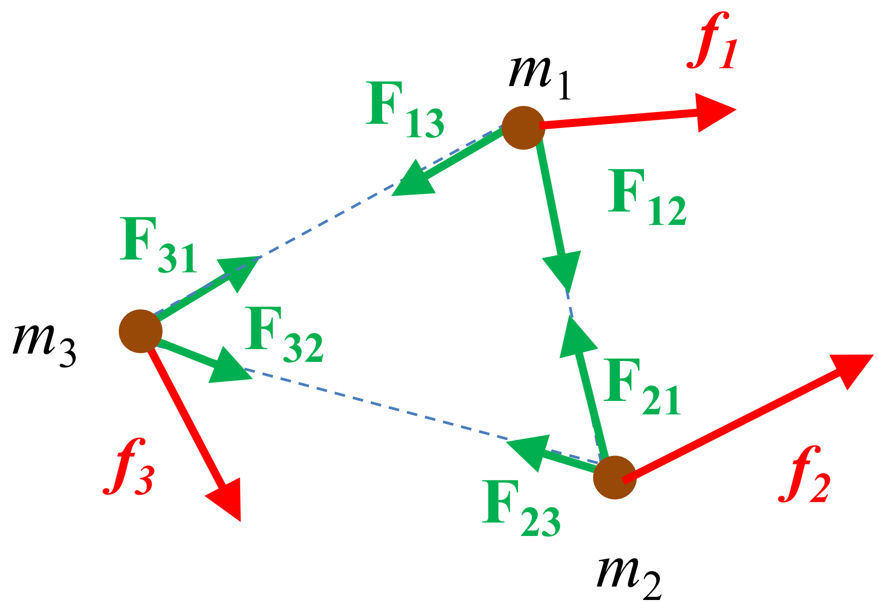
abbiamo visto che $d\,\mathbf{p}_1/dt$ è la forza $\mathbf{F}_1$ che si esercita sulla particella 1, così via.

Di conseguenza, la precedente equazione può essere scritta come:

$$d\,\mathbf{P}/dt = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \mathbf{F}_N$$

Il secondo membro di questa equazione è la **somma vettoriale** di **tutte le forze** agenti sulle particelle. Queste forze saranno in generale sia forze **esterne** cioè forze esercitate da agenti esterni al sistema, sia forze **interne** cioè le forze che le particelle esercitano una sull'altra (e che si annullano a coppie).

Possiamo immaginare questo insieme di forze come una cosa del genere:



Dove:

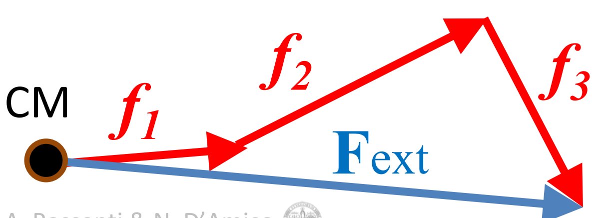
Forze interne (eguali e contrarie a coppie)

Forze esterne

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + f_1$$
$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} + f_2$$
$$\mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32} + f_3$$

In base alla **III Legge di Newton** sappiamo che le forze interne daranno un contributo **nullo** alla risultante del forze, in quanto eguali a contrarie (a coppie), quindi la risultante delle forze nel caso illustrato sarà semplicemente :

$$\mathbf{F}_{ext} = f_1 + f_2 + f_3$$



Questa è la risultante delle forze che, applicata al centro di massa del sistema, tiene conto del moto del sistema nel suo insieme

Pertanto, l'equazione scritta in precedenza:

$$d\,\mathbf{P}/dt = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{F}_N$$

diventa:

$$d\mathbf{P}/dt = \mathbf{F}_{ext} \qquad (*)$$

Il tasso di variazione della quantità di moto totale di un sistema di particelle è dato dalla risultante di tutte le forze esterne applicate al sistema

D'altra parte, avevamo già visto, allorquando introducevamo il centro di massa, che vale

$$\mathbf{F}_{ext} = M\,\mathbf{a}_{CM} \quad \text{ossia} \quad \mathbf{F}_{ext} = d(M\mathbf{v}_{CM})\,/\,dt \qquad (**)$$

Da cui, combinando la (*) con la (**):

$$d\mathbf{P}/dt = d(M\mathbf{v}_{CM})\,/\,dt$$

ne emerge che:

$$\mathbf{P} = M\mathbf{v}_{CM}$$

La quantità di moto totale di un sistema di particelle è uguale al prodotto della massa complessiva del sistema per la velocità del centro di massa

Conservazione della quantità di moto

Supponiamo che la risultante $\mathbf{F}_{ext}$ delle forze esterne agenti sul sistema sia **nulla**

In questo caso, in base a quanto abbiamo scritto in precedenza: $d\mathbf{P}/dt = \mathbf{F}_{ext}$

risulterà: $d\mathbf{P}/dt = 0$ ovvero $\mathbf{P} =$ **costante**

Cioè: **Quando la risultante delle forze agenti su un sistema è nulla, il vettore quantità di moto del sistema rimane costante.**

Questo è il **Principio di conservazione della quantità di moto** che possiamo anche enunciare affermando che

La quantità di moto di un sistema isolato si conserva

Quindi la **quantità di moto** di un sistema può essere **variata** solo da **forze esterne** agenti sul sistema.

Le **forze interne**, essendo **uguali e contrarie** a coppie, producono variazioni «locali» della quantità di moto che si **annullano** a vicenda.

Per un sistema di particelle

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \ldots\ldots + \mathbf{p}_N = \mathbf{P}$$

quindi quando $\mathbf{P} =$ costante (cioè il sistema di particelle è isolato) si ha:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \ldots\ldots + \mathbf{p}_N = \text{costante}$$

Questo implica che le quantità di moto **delle singole particelle** possono **cambiare**, ma la quantità di moto **dell'intero sistema rimane costante.**

L'equazione che rappresenta il principio della conservazione della quantità di moto che abbiamo appena scritto:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \ldots\ldots + \mathbf{p}_N = \text{costante}$$

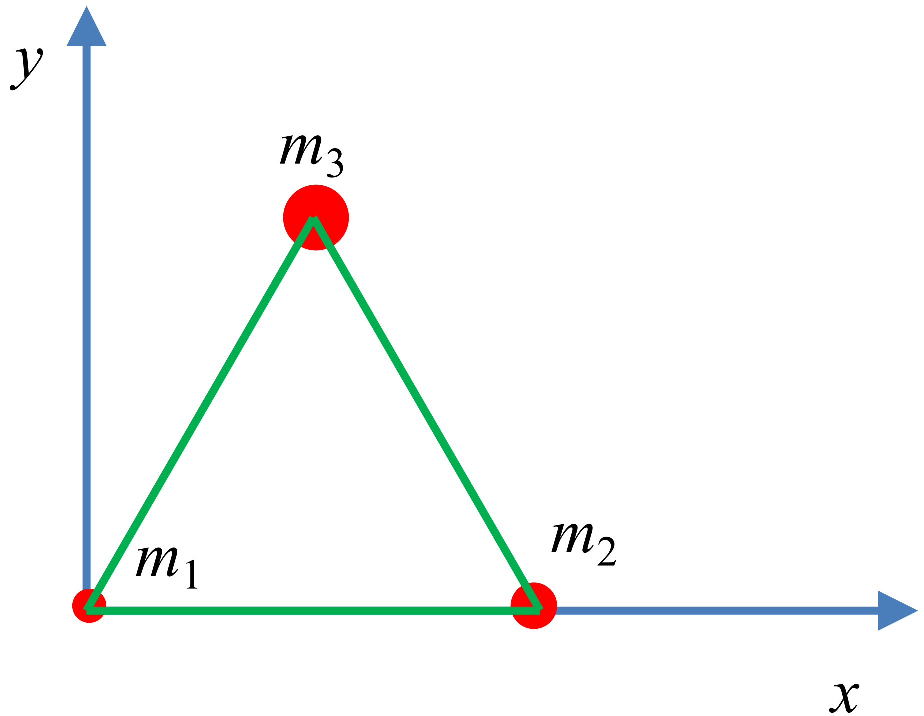
è una equazione **vettoriale**, che pertanto ci fornisce **tre equazioni scalari**, una per ogni coordinata.

Quindi: La conservazione della quantità di moto ci fornisce **tre** condizioni per il moto di un sistema. La **conservazione dell'energia**, che è uno **scalare**, ci fornisce invece **una** sola condizione.

Esempio - 1

Individuare il centro di massa di un sistema di tre particelle di massa m_1 = 1,0 kg,

m_2 = 2,0 kg, e m_3 = 3,0 kg, poste ai vertici di un triangolo **equilatero** con lato = 1,0 m

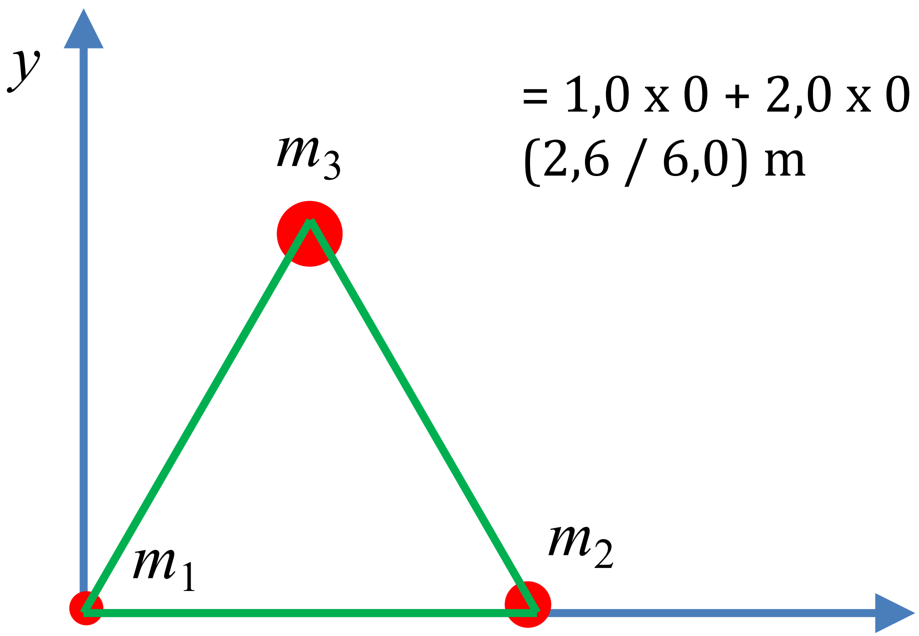


Avendo posizionato il triangolo sul piano x-y come in figura, risulta:

$x_1 = 0 \qquad y_1 = 0$

$x_2 = 1{,}0 \qquad y_2 = 0$

$x_3 = ½ \qquad y_3 = ½\sqrt{3}$



$x_{CM} = \left(\sum m_i\, x_i\right) / \left(\sum m_i\right) =$

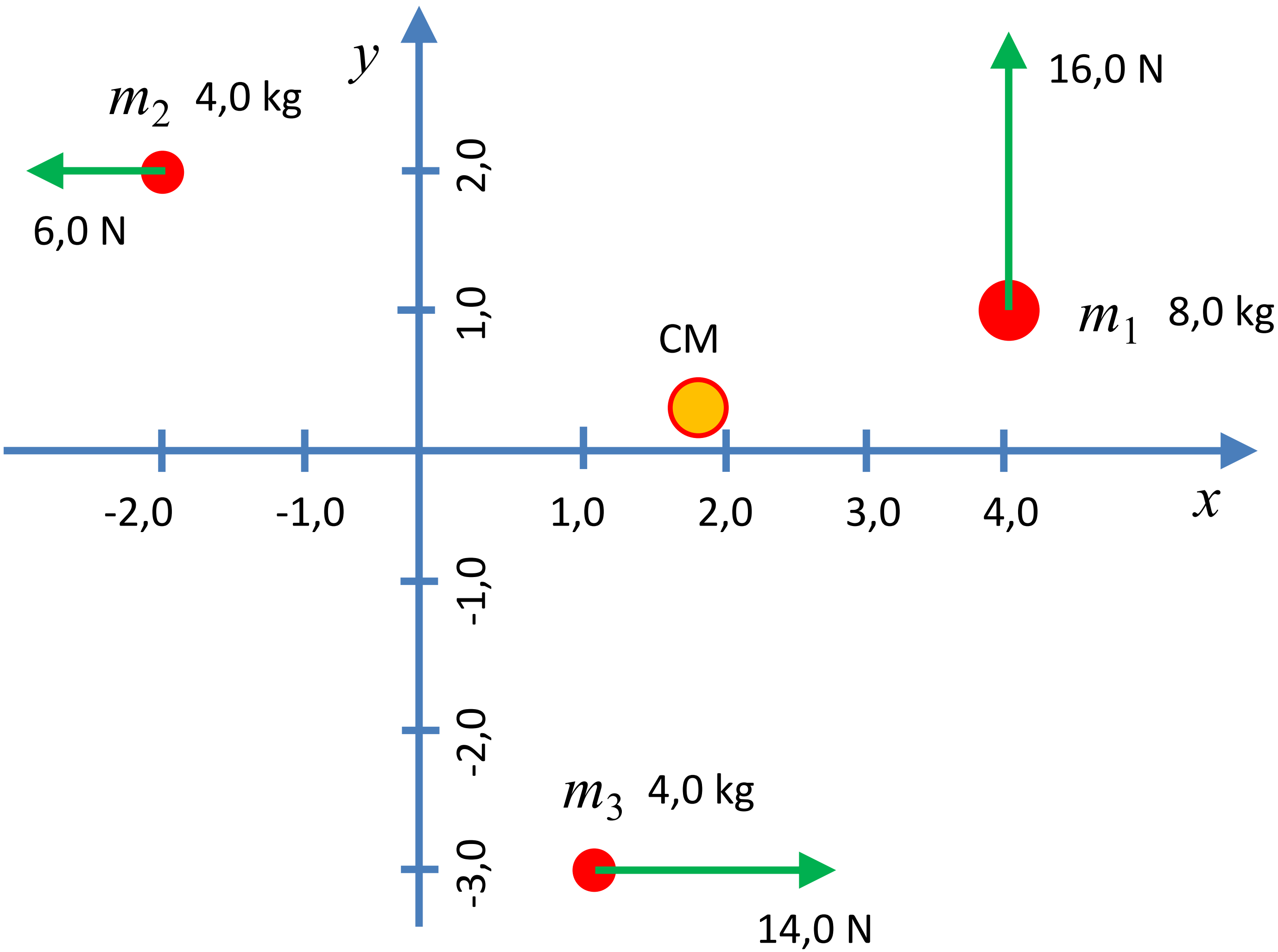
= 1,0 **x** 0 + 2,0 **x** 1 + 3,0 **x** ½ / (1,0+2,0+3,0) =
= (3,5 / 6,0) m

$y_{CM} = \left(\sum m_i\, y_i\right) / \left(\sum m_i\right) =$

= 1,0 x 0 + 2,0 x 0 + 3,0 x ½ √3/ (1.0+2.0+3.0) =
(2,6 / 6,0) m

Esempio - 2

Sulle tre particelle localizzate come in figura agiscono le tre forze indicate



Quesito: Trovare l'accelerazione del centro di massa del sistema

$x_{CM} = (\sum m_i x_i) / (\sum m_i) = (8{,}0 \mathbf{x}\, 4{,}0 + 4{,}0 \mathbf{x}\, (-2{,}0) + 4{,}0 \mathbf{x}\, 1{,}0) / 16{,}0 = 28{,}0/16{,}0$

$x_{CM} = 7/4$ m

$y_{CM} = (\sum m_i y_i) / (\sum m_i) = (8{,}0 \mathbf{x}\, 1{,}0 + 4{,}0 \mathbf{x}\, 2{,}0 + 4{,}0 \mathbf{x}\, (-3{,}0)) / 16{,}0 = 4{,}0 / 16{,}0$

$y_{CM} = 1/4$ m

Determiniamo adesso la risultante delle forze agenti sul sistema:

$$F_x = \quad 0 \quad - 6{,}0\ \mathrm{N} \ + 14{,}0\ \mathrm{N} \ = 8{,}0\ \mathrm{N}$$

$$F_y = 16{,}0\ \mathrm{N} \ + 0 \qquad + 0 \qquad\qquad = 16{,}0\ \mathrm{N}$$

La risultante delle forze ha pertanto modulo:

$$F = (F_x{}^2 + F_y{}^2)^{½} = (8{,}0^2 + 16{,}0^2)^{½} = (64 + 256)^{½} =$$

$$= (320)^{½} = 18\ \mathrm{N}$$

E forma con l'asse x un angolo θ dato da

$$\theta = \arctan\,(16{,}0\ \mathrm{N}/\ 8{,}0\ \mathrm{N}) = \arctan\,(2{,}0) = 63°$$

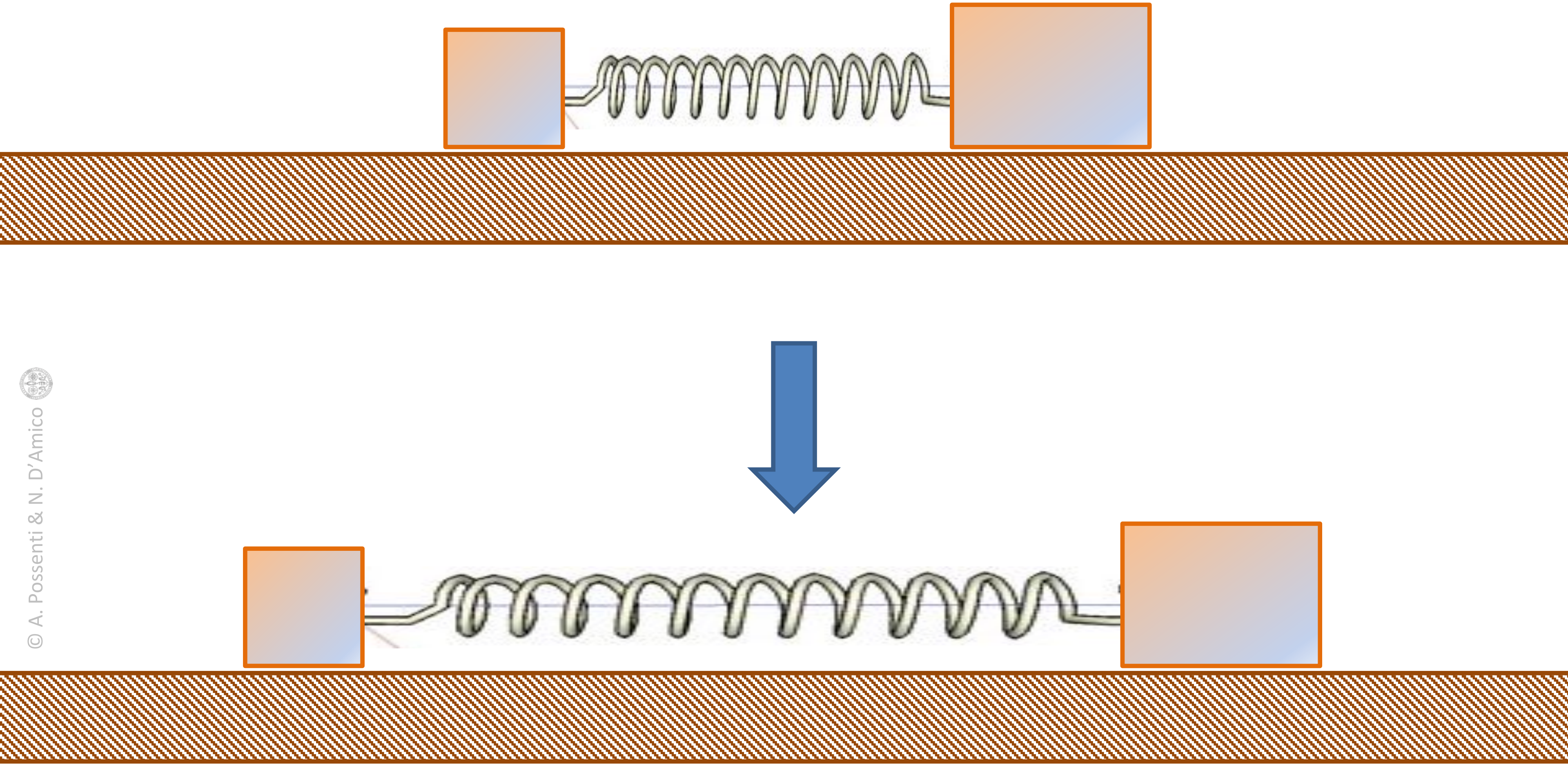
L’accelerazione del centro di massa sarà quindi

$$a = F \,/\, M_{tot} = 18\ \mathrm{N} \,/\, 16{,}0\ \mathrm{kg} = 1{,}1\ \mathrm{m/s^2}$$

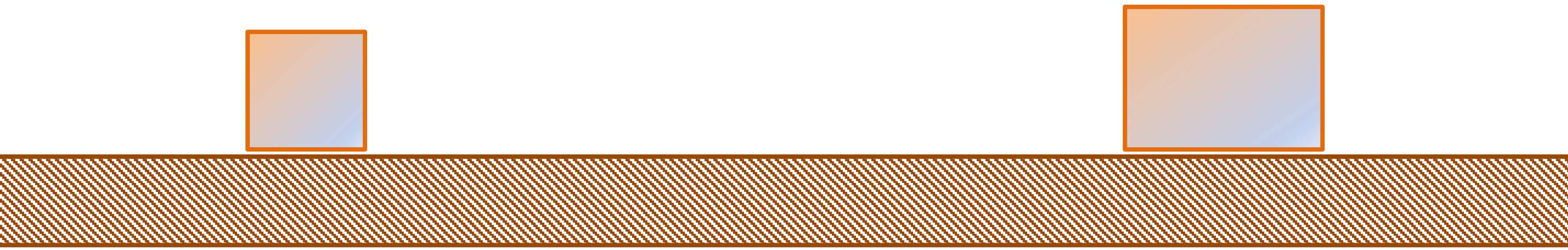
e formerà con l’asse x lo stesso angolo di 63 gradi

Esempio - 3

Consideriamo due blocchi A e B, di massa m_{A} e m_{B}, uniti da una molla a riposo, su un piano orizzontale privo di attrito. Allontaniamo i blocchi, tendendo la molla e quindi lasciamoli liberi. Descrivere il moto che ne segue.



OK, qualitativamente sappiamo già che tipo di moto ci aspettiamo:



Ma quali considerazioni fisiche possiamo fare ?

a) Il sistema è isolato

b) Non agiscono forze **esterne** su di esso

c) Le uniche forze presenti sono quelle **interne** generate dalla molla che si **annullano a vicenda**

Applichiamo la legge di conservazione della quantità di moto:

la quantità di moto di un sistema isolato si conserva

Quando abbondoniamo i due blocchi, risulta $\mathbf{P} = 0$

Quindi deve essere $\mathbf{P}=0$ in **ogni** istante successivo

Questo certamente è possibile anche se i due blocchi si muovono: la quantità di moto è una grandezza vettoriale. Quindi **se in un dato istante uno dei due blocchi avrà una quantità di moto positiva, l'altro l'avrà negativa**.

$$\mathbf{P} = 0 = m_A\mathbf{v}_A + m_B\mathbf{v}_B \rightarrow m_B\mathbf{v}_B = -\, m_A\mathbf{v}_A \;\rightarrow\; \mathbf{v}_A = -(m_B / m_A)\,\mathbf{v}_B$$

Quindi: le velocità sono sempre di **segno opposto** e con il **rapporto** fra i moduli **inverso al rapporto fra le masse**

L'energia cinetica di A vale:

$K_\mathrm{A} = ½\, m_\mathrm{A} \mathrm{v_A}^2$ che possiamo scrivere come: $(m_\mathrm{A} \mathrm{v_A})^2 / 2m_\mathrm{A}$

Analogamente:

$K_\mathrm{B} = ½\, m_\mathrm{B} \mathrm{v_B}^2$ che possiamo scrivere come: $(m_\mathrm{B} \mathrm{v_B})^2 / 2m_\mathrm{B}$

Da cui, poiché : $(m_\mathrm{A} \mathrm{v_A})^2 = (m_\mathrm{B} \mathrm{v_B})^2$ risulta:

$$K_\mathrm{A} / K_\mathrm{B} = m_\mathrm{B} / m_\mathrm{A}$$

Cioè le energie cinetiche sono inversamente proporzionali alle rispettive masse

Poiché l'energia meccanica si conserva, i blocchi continueranno a oscillare scambiando continuamente energia cinetica e energia potenziale.

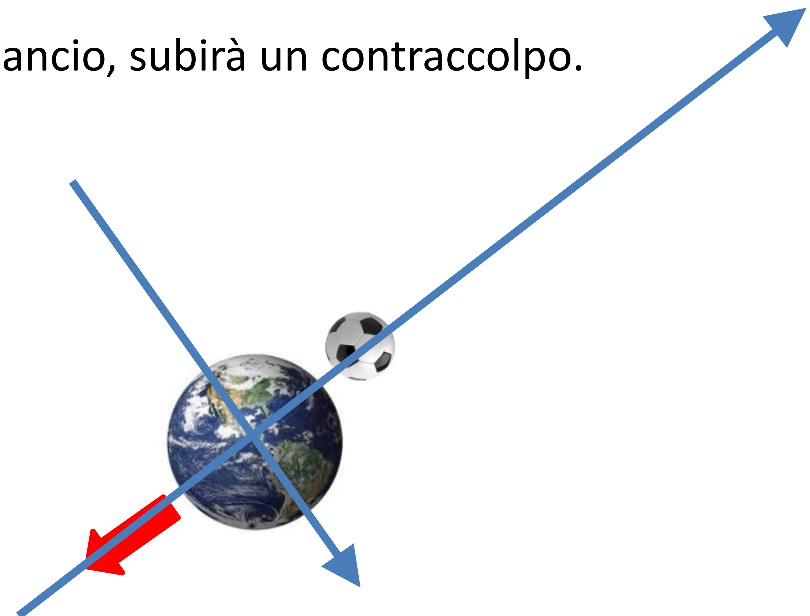
Esempio - 4

Consideriamo il caso di una palla lanciata in aria e poi afferrata al rientro a Terra.

A scopo esemplificativo, assumeremo che l'agente che lancia la palla, essendo ancorato a Terra faccia parte della Terra. Considereremo anche trascurabile l'attrito dell'aria.

Il sistema in esame in sostanza è il sistema Terra-palla. Le forze in gioco fra i due elementi del sistema, e cioè la terra e la palla, sono solo forze interne.

Definiremo un sistema di riferimento in cui la Terra è inizialmente ferma, e rispetto al quale, al momento del lancio, subirà un contraccolpo.



Inizialmente, la quantità di moto del sistema Terra-palla $\mathbf{p}_{\mathrm{T\text{-}P}}$ è nulla, e poiché non vi sono forze esterne che agiscono sul sistema, resterà sempre nulla.

Quindi in qualsiasi istante successivo:

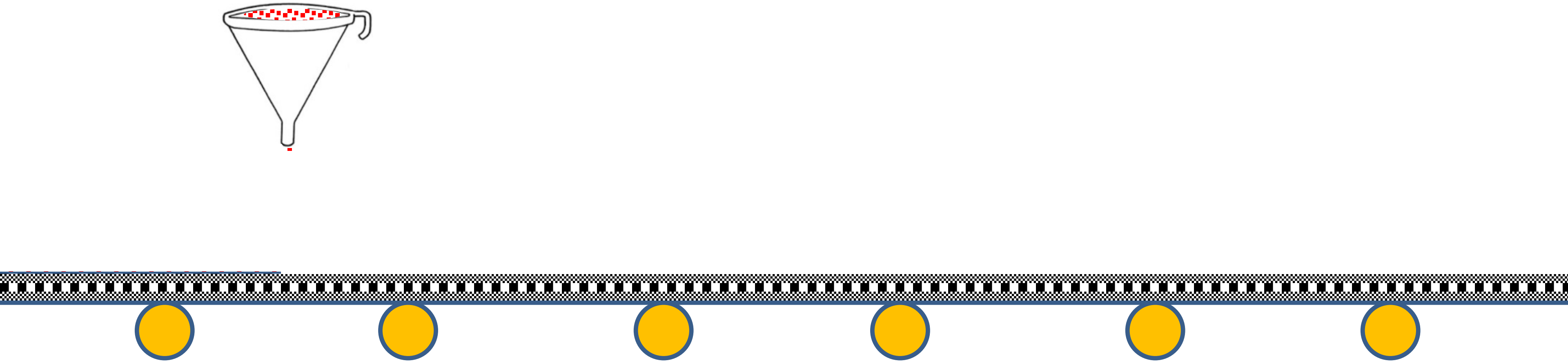
$$\mathbf{p}_{\mathrm{T\text{-}P}} = 0 = \mathbf{p}_{\mathrm{T}} + \mathbf{p}_{\mathrm{P}}$$

$$0 = m_{\mathrm{T}}\,\mathbf{v}_{\mathrm{T}} + m_{\mathrm{P}}\,\mathbf{v}_{\mathrm{P}}$$

$$m_{\mathrm{T}}\,\mathbf{v}_{\mathrm{T}} = -\,m_{\mathrm{P}}\,\mathbf{v}_{\mathrm{P}}$$

Quindi, quando la palla si allontana la Terra retrocede e quando la palla si riavvicina, la Terra va in contro alla palla. Il rapporto dei moduli delle velocità è inverso rispetto al rapporto fra le masse, il che ci dimostra che trascurare l'effetto del moto della Terra è lecito, essendo questo rapporto pari a circa 10^{-24} !

Esempio - 5



Il caso della cinghia convettrice, in cui del materiale viene continuamente versato su una cinghia scorrevole come in figura

TROVARE LA FORZA NECESSARIA PER FARE SCORRERE LA CINGHIA A VELOCITA' COSTANTE

Indichiamo con m la massa del materiale sulla cinghia e M la massa della cinghia.

La quantità di moto del sistema (cinghia + materiale sulla cinghia) sarà:

$$\mathbf{P} = (m + M)\, \mathbf{v}$$

e la forza che cerchiamo è

$$\mathbf{F} = d\mathbf{P}/dt$$

Cioè:

$$\mathbf{F} = d/dt\ [\,(m+M)\, \mathbf{v}\,] = (m+M)\, d\mathbf{v}/dt + \mathbf{v}\, d/dt\, (m+M)$$

$$= (m+M)\, d\mathbf{v}/dt + \mathbf{v}\, dm/dt + \mathbf{v}\, dM/dt$$

Poiché M e $\mathbf{v}$ sono costanti l'equazione si riduce a:

$$\mathbf{F} = \mathbf{v}\, dm/dt$$