

Lezione XI

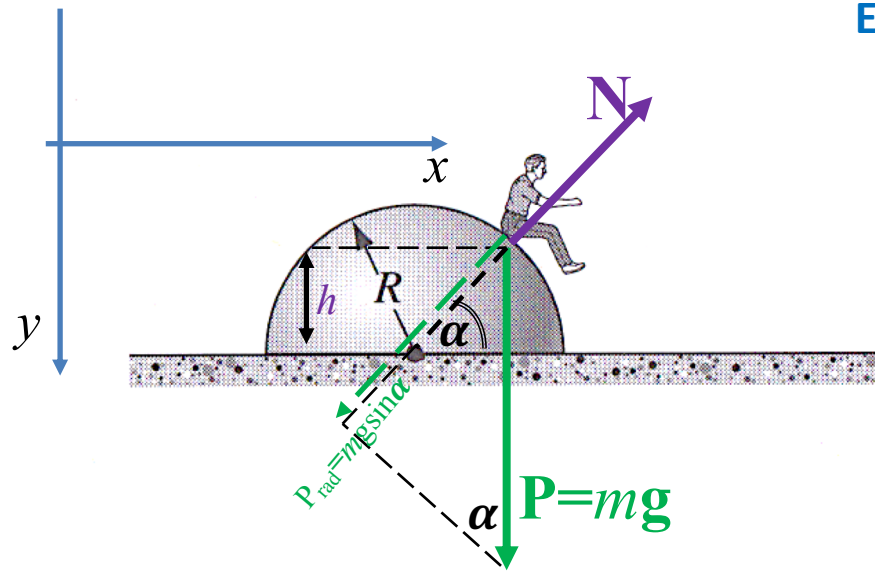
(esercizi,
Moto del centro di massa)



FRUIZIONE E UTILIZZO DEI MATERIALI DIDATTICI

- ➔ **E' vietata** la **copia**, la **rielaborazione**, la **riproduzione** dei contenuti e immagini presenti nelle lezioni in qualsiasi forma
- ➔ **E' inoltre vietata** la **diffusione**, la **redistribuzione** e la **pubblicazione** dei contenuti e immagini, incluse le registrazioni delle videolezioni con qualsiasi modalità e mezzo non autorizzati espressamente dall'autore o da Unica

Esempio 6



Un ragazzino è seduto sulla cima del blocco di ghiaccio semisferico rappresentato in figura. Riceve una leggerissima spinta e comincia a scivolare in giù. Dimostrate che, se il ghiaccio è privo di attrito, egli si staccherà dal ghiaccio in un punto all'altezza $2R/3$ dal suolo.

Consideriamo il moto del ragazzino fino al momento del suo distacco dalla calotta di ghiaccio. Si tratta di un moto circolare accelerato. Le forze agenti sul ragazzino sono la forza peso e la reazione vincolare N della calotta, sempre in direzione radiale e diretta verso l'esterno.

Indichiamo con m la massa del ragazzino e con α l'angolo che il vettore posizione R forma col suolo. La proiezione della seconda legge della dinamica in direzione radiale dà

$$mg \sin \alpha - N = m \frac{v^2}{R}.$$

Nel momento del distacco (caratterizzato da $N = 0$), questa equazione fornisce la relazione

$$g \sin \alpha = \frac{v^2}{R},$$

in cui sia α che v sono incognite. Una seconda equazione è data dalla conservazione dell'energia meccanica. Avendo fissato come quota di riferimento il suolo, l'energia totale iniziale è la sola energia potenziale del punto di partenza (vertice della calotta) $E_i = mgR$, e l'energia totale di un punto a quota $h = R \sin \alpha$ è

$$mgR \sin \alpha + \frac{1}{2}mv^2 = mgR.$$

Risolviendo il sistema di queste due equazioni, ricaviamo il punto di distacco

$$gR(1 - \sin \alpha) = \frac{1}{2}gR \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad \sin \alpha = \frac{2}{3}.$$

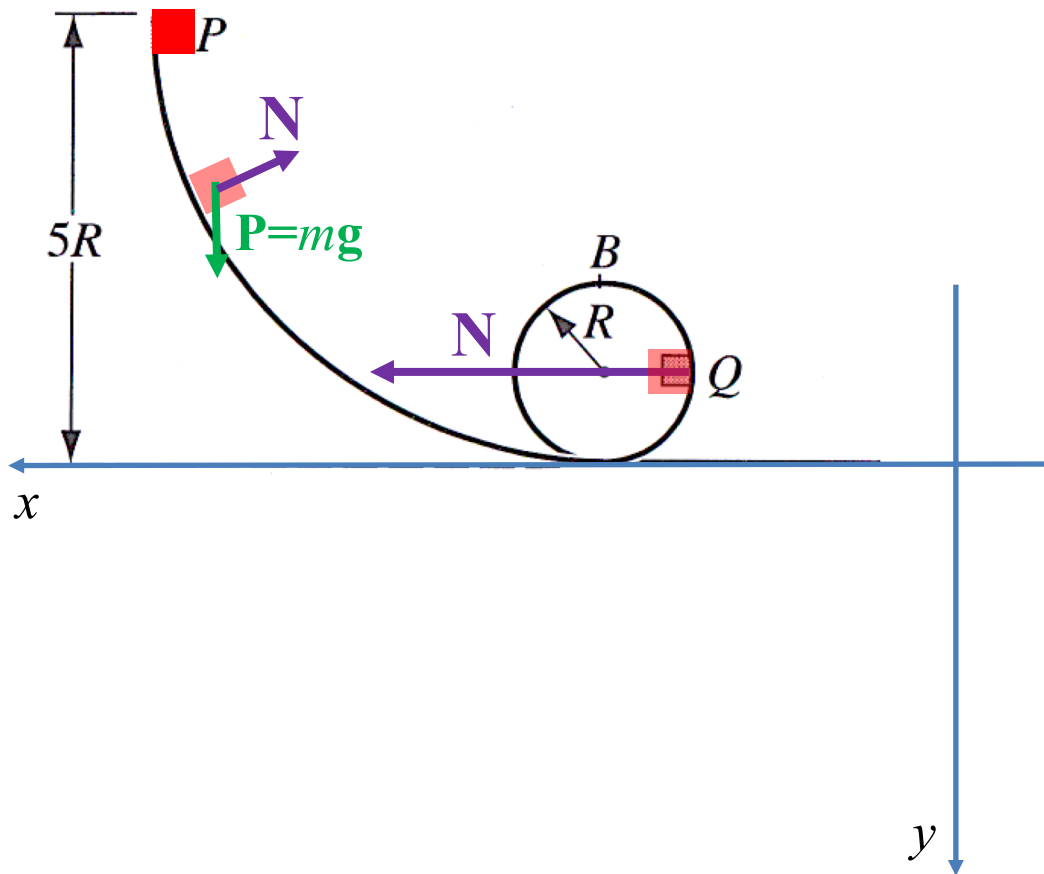
Il ragazzino si stacca dalla calotta di ghiaccio ad un'altezza dal suolo pari a

$$h = R \sin \alpha = \frac{2}{3}R.$$

Si noti che il risultato è, nei limiti della ipotesi di non attrito in cui ci siamo messi, indipendente dalla massa del ragazzino.



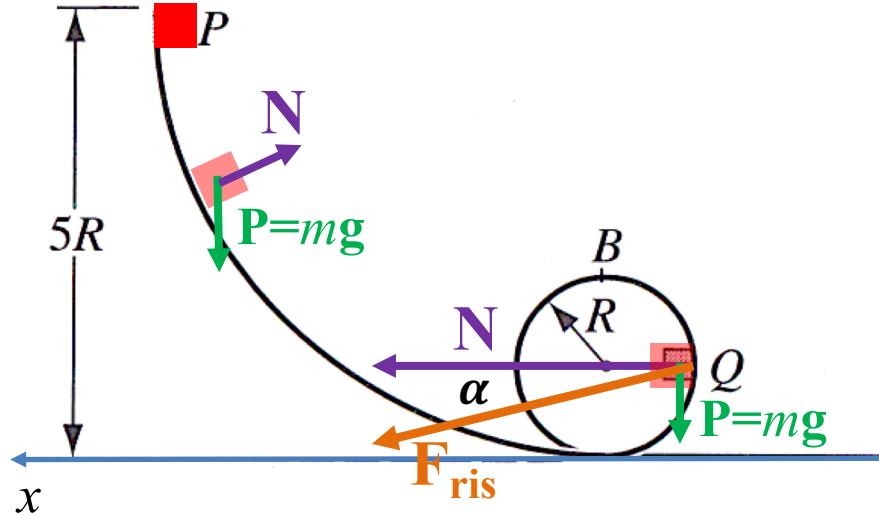
Esempio 7



Un blocchetto di massa m può scorrere lungo la pista liscia a spirale rappresentata in figura. (a) Se è lasciato cadere, da fermo, dal punto P , quale sarà la forza netta che agisce su di esso nel punto Q ? (b) Da quale altezza sopra il punto più basso della spirale si dovrebbe lasciar cadere il blocchetto per far sì che stia per perdere contatto con la pista nel punto più alto del «ricciolo»?



Esempio 7



Un blocchetto di massa m può scorrere lungo la pista liscia a spirale rappresentata in figura. (a) Se è lasciato cadere, da fermo, dal punto P , quale sarà la forza netta che agisce su di esso nel punto Q ? (b) Da quale altezza sopra il punto più basso della spirale si dovrebbe lasciar cadere il blocchetto per far sì che stia per perdere contatto con la pista nel punto più alto del «ricciolo»?

(a) Per calcolare la forza netta nel punto Q dobbiamo innanzitutto analizzare le forze agenti sul blocchetto; avremo la forza di interazione gravitazionale rivolta verticalmente verso il basso, poi avremo la reazione vincolare della guida sul blocchetto rivolta sempre in direzione normale alla pista e che punta verso il centro della stessa; la composizione vettoriale di queste due forze ci darà la forza netta. Notiamo che nel punto Q la reazione vincolare ha direzione orizzontale ed è l'unica responsabile della forza centripeta agente sul blocchetto (ricordiamo che, affinché un corpo segua una traiettoria circolare, ci deve essere una forza centripeta agente su di esso). Ricordando l'espressione dell'accelerazione centripeta e applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica tra i punti P e Q , ricaviamo

$$E_P = E_Q \Rightarrow mg \cdot 5R = mgR + \frac{1}{2}mv_Q^2 \Rightarrow v_Q = \sqrt{8gR}$$

$$F_n = ma_n = m \frac{v_Q^2}{R} = 8mg.$$

La forza netta agente sul corpo in Q vale

$$\mathbf{F}_{ris} = 8mg\mathbf{i} + mg\mathbf{j}$$

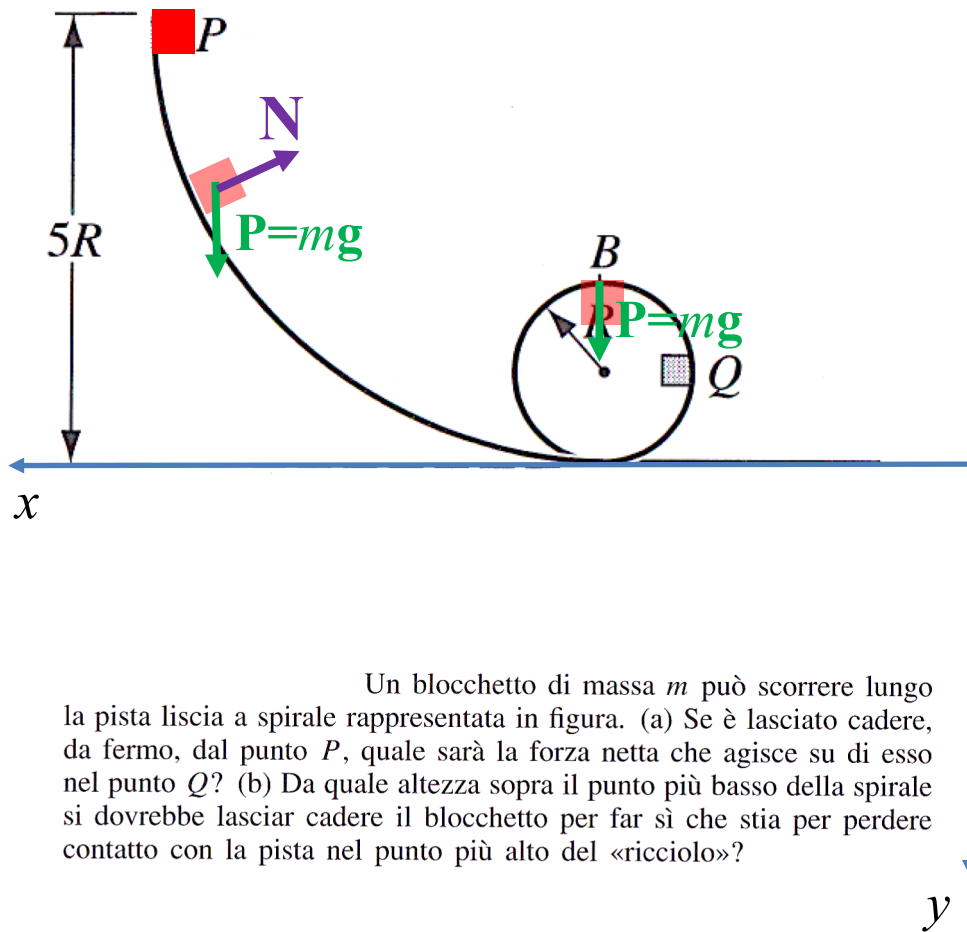
$$|\mathbf{F}_{ris}| = \sqrt{65m^2g^2} = \sqrt{65}mg = 8,06mg \text{ N}$$

$$\alpha = \arctan \frac{mg}{8mg} = \arctan \left(\frac{1}{8} \right) = 7,12^\circ.$$

Come sistema di riferimento abbiamo scelto un sistema con gli assi x e y paralleli e concordi con le due forze in gioco nel punto Q , quindi con l'asse x che punta verso sinistra e l'asse y che punta verso il basso. A questo sistema va riferito l'angolo α trovato: la forza netta devia dall'orizzontale di un angolo α e punta leggermente verso il basso.



Esempio 7



(b) Quando passa per il punto B (punto superiore del ricciolo) con velocità v_B , il blocchetto necessita di un'accelerazione centripeta fornita dalla forza peso del blocchetto e dalla reazione vincolare della guida. Nella condizione limite di distacco, il blocchetto non preme più contro la guida e quindi la reazione vincolare è nulla: è la sola forza peso a determinare l'accelerazione centripeta

$$m \frac{v_B^2}{R} = mg \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{Rg}.$$

Per trovare la quota h_A da cui il blocchetto deve partire per avere in B questa velocità, applichiamo la conservazione dell'energia meccanica

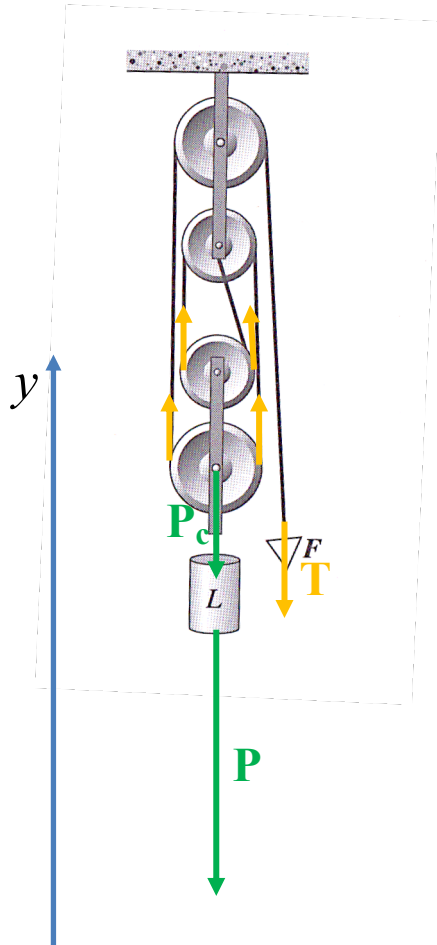
$$mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + mg2R,$$

e quindi

$$h_A = \frac{5}{2}R.$$

Il blocchetto, per passare per B nella condizione limite di distacco, deve partire da un'altezza pari a mezzo raggio del ricciolo al di sopra del ricciolo stesso.

Esempio 8

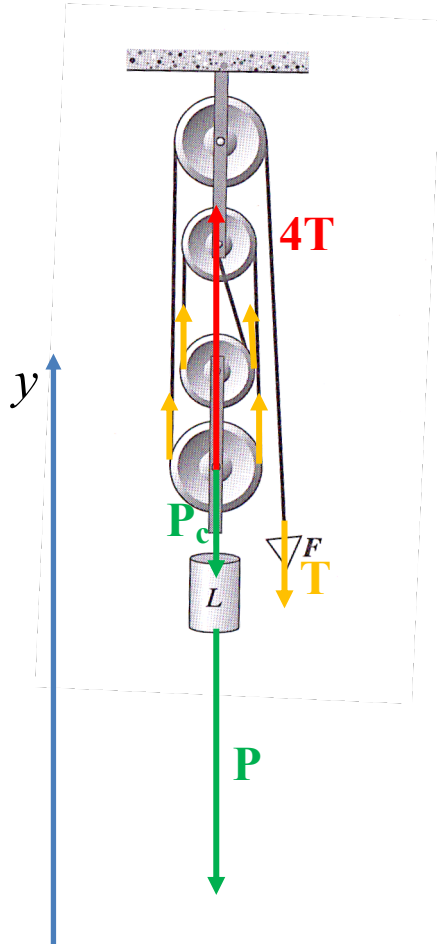


In figura vediamo una combinazione di pulegge progettata per sollevare carichi pesanti. Si trascurino gli attriti e si supponga che il peso totale delle pulegge sia di $90,0\text{ N}$. Si vuole sollevare un peso di 3800 N per un dislivello di $4,00\text{ m}$. (a) Qual è la forza minima capace di sollevare il carico? (b) Quanto lavoro occorre svolgere contro la forza di gravità? (c) Per che lunghezza deve agire la forza applicata durante il sollevamento? (d) Che lavoro deve svolgere questa forza?



Esempio 8

$$P + P_c = 4T$$



In figura vediamo una combinazione di pulegge progettata per sollevare carichi pesanti. Si trascurino gli attriti e si supponga che il peso totale delle pulegge sia di 90,0 N. Si vuole sollevare un peso di 3800 N per un dislivello di 4,00 m. (a) Qual è la forza minima capace di sollevare il carico? (b) Quanto lavoro occorre svolgere contro la forza di gravità? (c) Per che lunghezza deve agire la forza applicata durante il sollevamento? (d) Che lavoro deve svolgere questa forza?

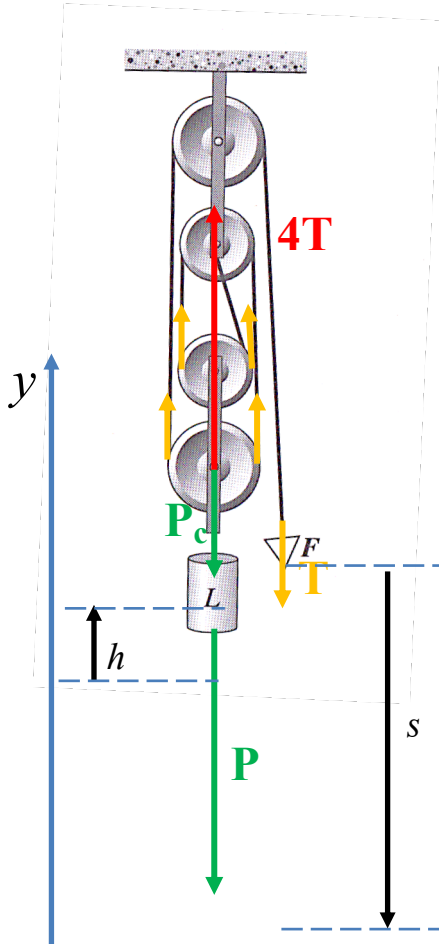
(a) Se T è la tensione della fune, al blocco delle carrucole mobili è applicata in totale una forza pari a $4T$, che deve bilanciare il peso del corpo (P) e delle carrucole mobili (P_c). Quindi la forza necessaria per sollevare il peso deve essere superiore a

$$F = T = \frac{1}{4}(90,0 \text{ N} + 3800 \text{ N}) = 995,0 \text{ N}.$$



Esempio 8

$$P + P_c = 4T$$



In figura vediamo una combinazione di pulegge progettata per sollevare carichi pesanti. Si trascurino gli attriti e si supponga che il peso totale delle pulegge sia di 90,0 N. Si vuole sollevare un peso di 3800 N per un dislivello di 4,00 m. (a) Qual è la forza minima capace di sollevare il carico? (b) Quanto lavoro occorre svolgere contro la forza di gravità? (c) Per che lunghezza deve agire la forza applicata durante il sollevamento? (d) Che lavoro deve svolgere questa forza?

(a) Se T è la tensione della fune, al blocco delle carrucole mobili è applicata in totale una forza pari a $4T$, che deve bilanciare il peso del corpo (P) e delle carrucole mobili (P_c). Quindi la forza necessaria per sollevare il peso deve essere superiore a

$$F = T = \frac{1}{4}(90,0 \text{ N} + 3800 \text{ N}) = 995,0 \text{ N}.$$

(b) Quando il corpo viene sollevato, viene fatto un lavoro uguale e contrario a quello compiuto dalla forza di gravità:

$$L = -L_g = -(P + P_c)s \cos 180^\circ = (3890 \text{ N})(4,00 \text{ m}) = 1,56 \cdot 10^4 \text{ J}.$$

(c) Se le carrucole mobili si sollevano di h , ogni tratto di corda tra i due gruppi di carrucole si accorcia di h e quindi l'estremo della corda si sposta in totale di $s = 4h = 16,00 \text{ m}$.

(d) Il lavoro fatto dalla forza costante F è:

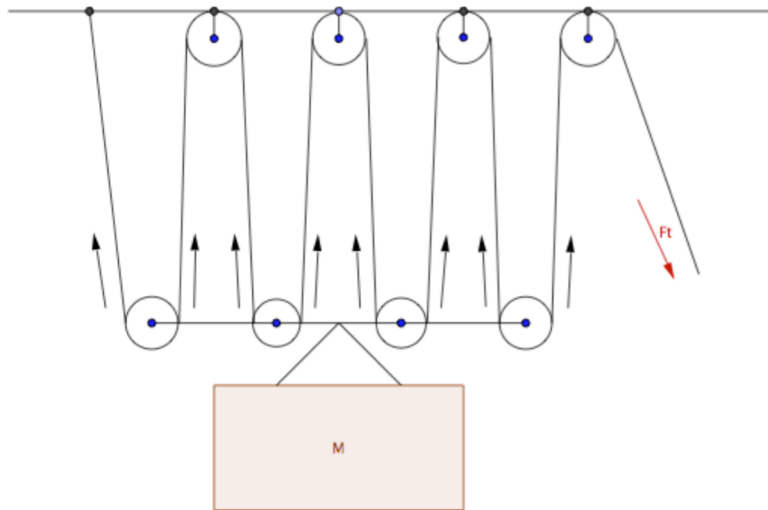
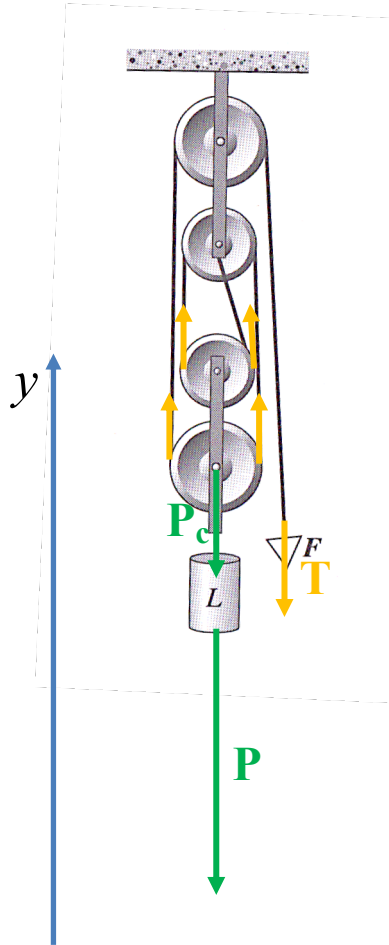
$$L = Fs = (995,0 \text{ N})(16,00 \text{ m}) = 1,56 \cdot 10^4 \text{ J},$$

pari al lavoro compiuto contro la forza di gravità.



Esempio 8

Commento: questa logica fisica presiede alla costruzione dei sistemi di paranchi, verricelli etc che sono alla base dei metodi di sollevamento di masse pesanti: ad esempio uno schema come quello qui sotto permette di sollevare una data massa con $1/8$ della della forza necessaria a sollevarla direttamente



Centro di massa

Introdurremo questo nuovo argomento definendo il **centro di massa** di un corpo.

Fino adesso abbiamo studiato il moto dei corpi adottando in molti casi la definizione di punto materiale, o particella, cioè un corpo di massa m ma dimensioni infinitesime.

In effetti nel caso del **moto traslatorio** di un corpo di dimensioni finite, ciascun punto del corpo in questione effettua, istante per istante, lo stesso spostamento di ogni altro punto. Quindi il moto di una singola particella rappresenta bene il moto dell'intero corpo.

E in effetti, anche se il corpo è soggetto a delle vibrazioni o ruota su se stesso, possiamo comunque rappresentare il suo **moto traslatorio** col moto di un suo particolare punto detto centro di massa del corpo in questione.

Similmente, se abbiamo un **sistema di particelle**, possiamo descrivere il **moto traslatorio dell'intero sistema** col moto del **centro di massa** del sistema.

Cominciamo quindi col definire il centro di massa. Cominciamo col caso semplice di un sistema costituito da **due sole particelle** di massa m_1 e m_2 distanti rispettivamente x_1 e x_2 da una certa origine 0 in un sistema unidimensionale descritto dall'asse x .

Battezziamo la coordinata del centro di massa

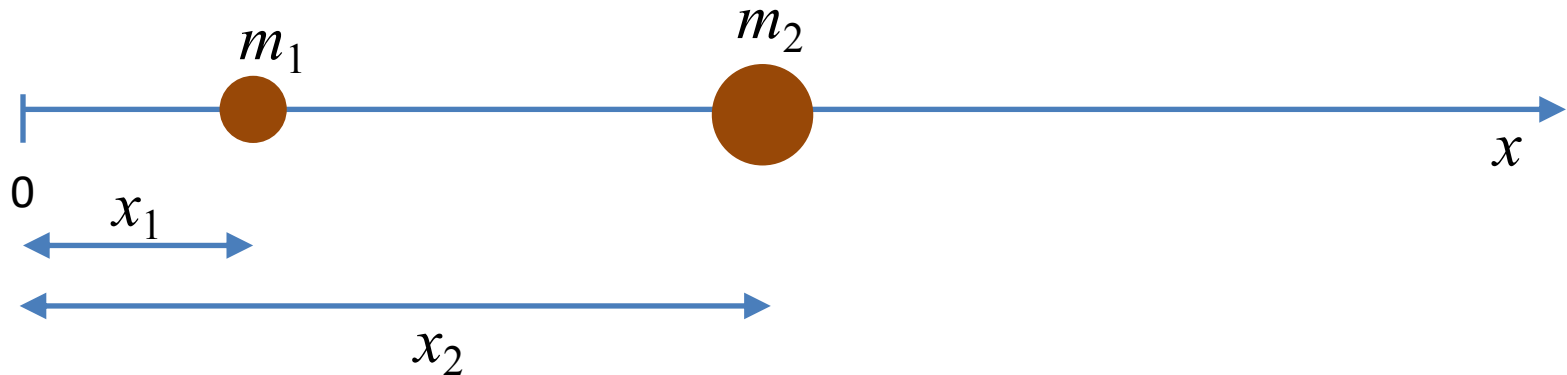
Il centro di massa (C.M.) è il punto localizzato ad una distanza x_{CM} dall'origine 0,

dove x_{CM} vale:

$$x_{\text{CM}} = (m_1 x_1 + m_2 x_2) / (m_1 + m_2)$$

Questo punto ha la proprietà che il prodotto della massa totale del sistema per la distanza di questo punto dall'origine è uguale alla somma dei prodotti della massa di ciascuna particella per la sua distanza dall'origine.

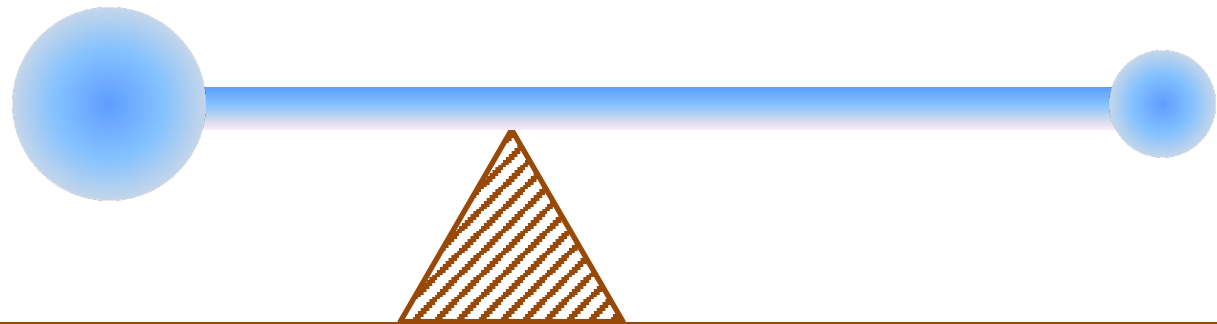
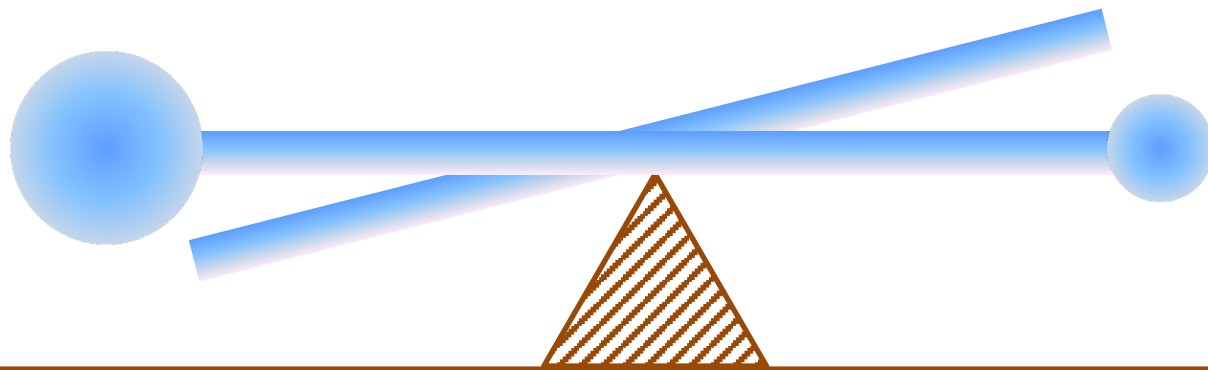
$$(m_1 + m_2) x_{\text{CM}} = m_1 x_1 + m_2 x_2$$



In sostanza, x_{CM} può essere considerato come **la media pesata** di x_1 e x_2

In **questa media pesata** delle *distanze*, il **fattore peso** per ogni particella è la **frazione della massa totale del sistema posseduta da quella particella**.

In sostanza, per riferirci all'esperienza quotidiana, il C.M. di un sistema altro non è che il suo baricentro: sappiamo dell'esperienza quotidiana che se vogliamo **tenere in equilibrio** un corpo in cui la distribuzione delle masse **non è uniforme** non dobbiamo posizionarlo nella sua «metà» ma nel suo **baricentro**.



Analogamente, se abbiamo un **sistema di N particelle** disposte lungo una retta (per esempio l'asse delle x) il centro di massa del sistema, riferito ad una certa origine, è localizzato nel punto di coordinata:

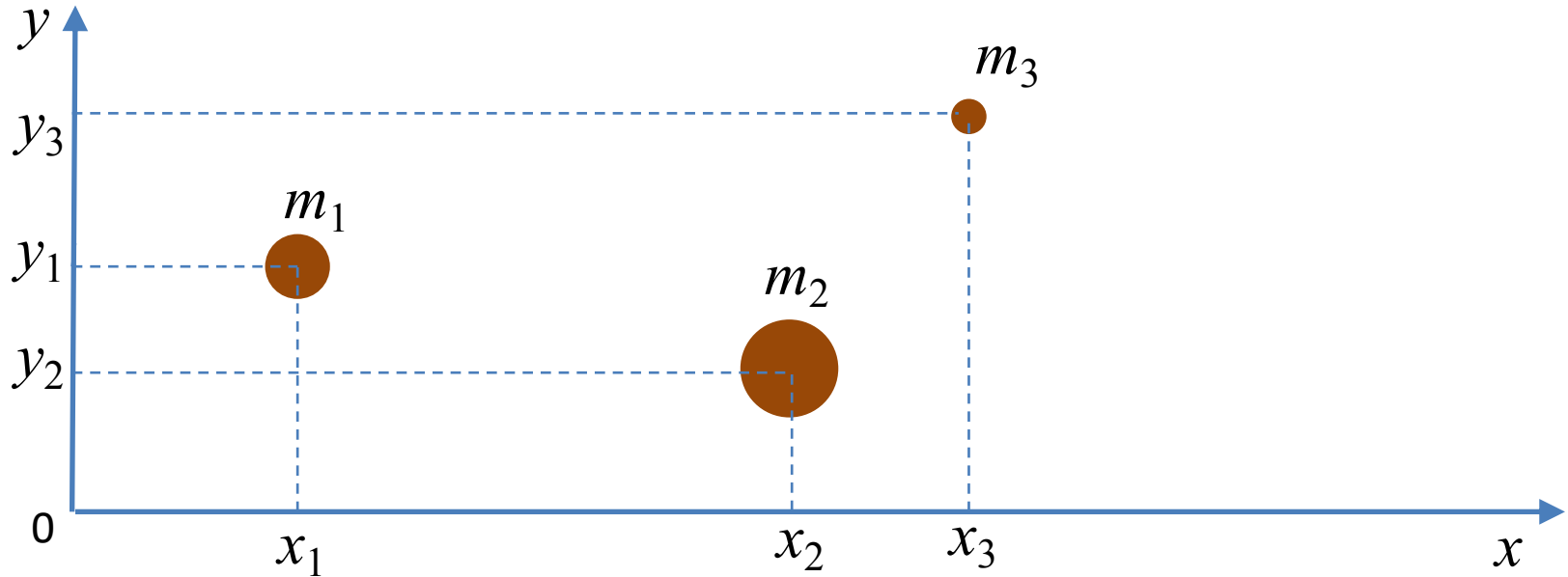
$$x_{\text{CM}} = (\sum m_i x_i) / \sum m_i$$

Dove x_1 x_2 x_N rappresenta la coordinata di ognuna delle N particelle

Poiché $\sum m_i$ è la massa totale del sistema M potremo scrivere:

$$M x_{\text{CM}} = \sum m_i x_i$$

Supponiamo adesso di avere 3 particelle, non disposte lungo una retta, ma contenute in un piano x - y come per esempio in figura.

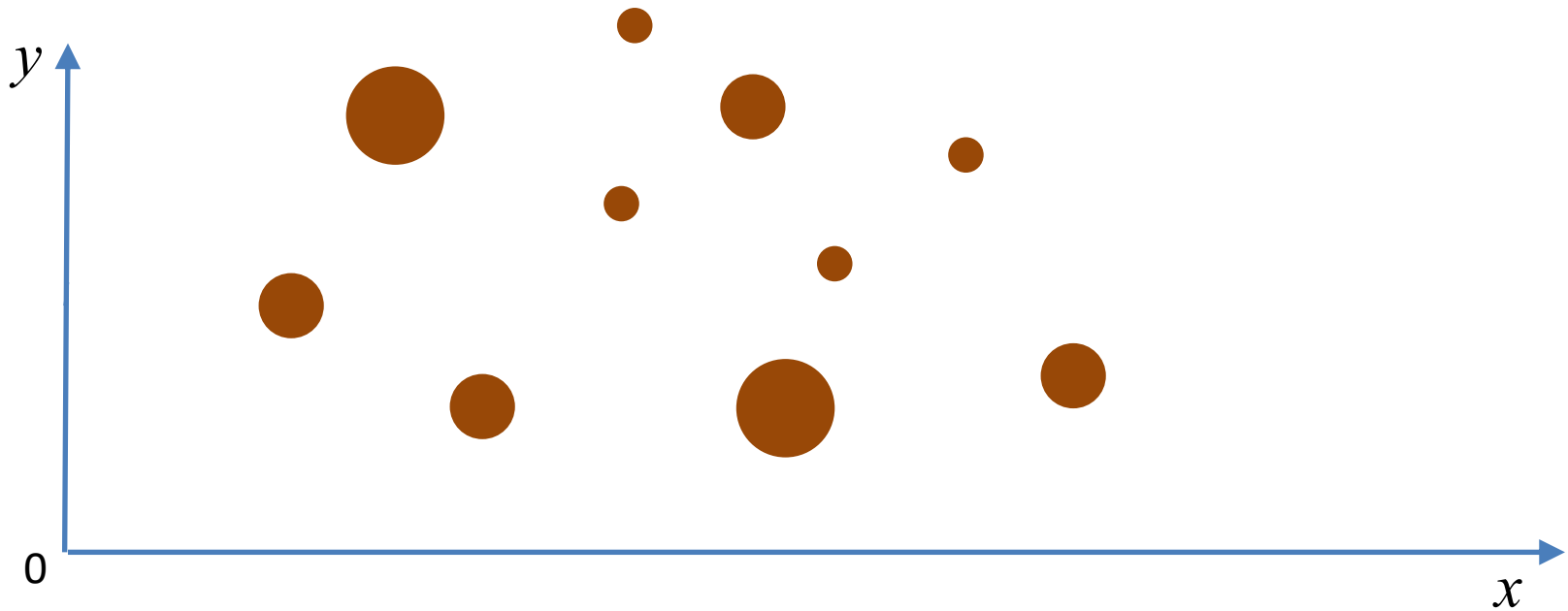


Il **centro di massa** di questo sistema di 3 particelle è individuato dal punto le cui coordinate, misurate rispetto all'origine 0 , sono date da:

$$x_{\text{CM}} = (m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3) / (m_1 + m_2 + m_3)$$

$$y_{\text{CM}} = (m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3) / (m_1 + m_2 + m_3)$$

Analogamente, per un gran numero di particelle contenuto nel piano x - y :

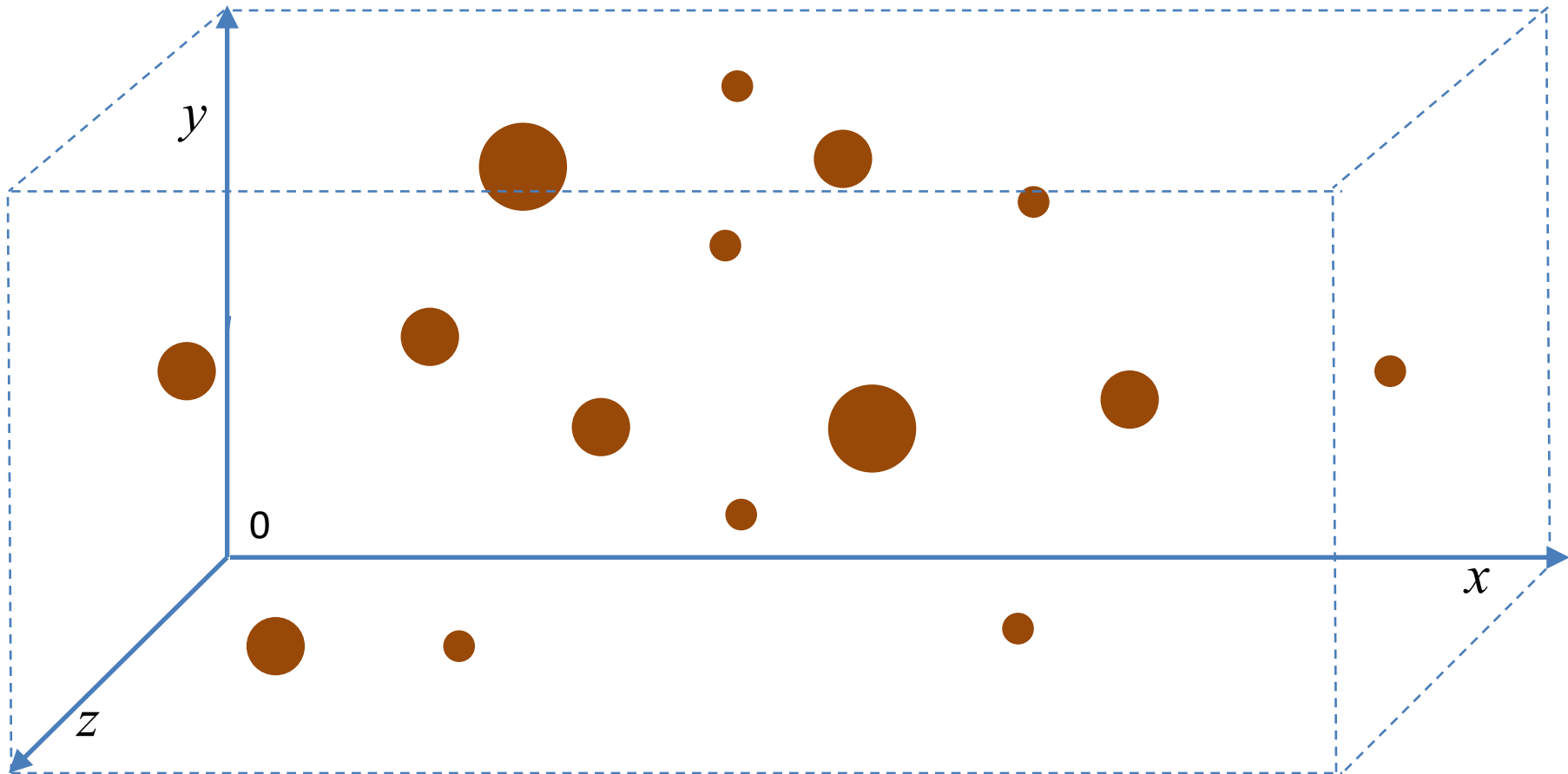


Il centro di massa è individuato dal punto che ha per coordinate:

$$x_{\text{CM}} = \left(\sum m_i x_i \right) / \sum m_i$$

$$y_{\text{CM}} = \left(\sum m_i y_i \right) / \sum m_i$$

E per un gran numero di particelle distribuite in un volume x - y - z :



Il centro di massa è individuato dal punto che ha per coordinate:

$$x_{\text{CM}} = \left(\sum m_i x_i \right) / \sum m_i$$

$$y_{\text{CM}} = \left(\sum m_i y_i \right) / \sum m_i$$

$$z_{\text{CM}} = \left(\sum m_i z_i \right) / \sum m_i$$

Ci si può facilmente rendere conto che la posizione del centro di massa rispetto alle posizioni delle particelle, è **indipendente** dal sistema di coordinate usato:

**Il centro di massa di un sistema di particelle dipende solo
dalle masse delle particelle
e dalla posizione relativa di esse**

Un corpo di dimensioni finite, quello che normalmente in Fisica è denominato «corpo rigido» può essere pensato come un sistema di particelle «molto fitto». Anche per un corpo rigido pertanto possiamo definire il centro di massa. Il numero di particelle (per esempio di atomi!!!) di norma è così elevato, e la distanza fra particelle così piccola, che risulta più conveniente trattare il corpo come una **distribuzione continua di massa**.

Per comprendere il processo al limite che applicheremo in questo caso e che ci porterà verso l'utilizzo di un **integrale**, immaginiamo in prima istanza di dividere il corpo in questione in tanti cubetti elementari, ognuno di massa Δm_i , localizzati approssimativamente nei punti di coordinate x_i y_i z_i . Le coordinate del centro di massa saranno date approssimativamente da:

$$x_{\text{CM}} = \left(\sum \Delta m_i x_i \right) / \sum \Delta m_i$$

$$y_{\text{CM}} = \left(\sum \Delta m_i y_i \right) / \sum \Delta m_i$$

$$z_{\text{CM}} = \left(\sum \Delta m_i z_i \right) / \sum \Delta m_i$$

Ora, supponiamo di dividere il corpo in esame in cubetti sempre più piccoli, facendo tendere quindi $\Delta m \rightarrow 0$ e il numero di cubetti $N \rightarrow \infty$ (infinito). Dividiamo in sostanza il corpo in questione in un numero infinito di volumetti di massa infinitesima.

Le coordinate del centro di massa potranno essere definite in modo esatto come segue:

$$x_{\text{CM}} = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \left(\sum \Delta m_i x_i \right) / \sum \Delta m_i = \int x \, dm / \int dm = (1/M) \int x \, dm$$

$$y_{\text{CM}} = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \left(\sum \Delta m_i y_i \right) / \sum \Delta m_i = \int y \, dm / \int dm = (1/M) \int y \, dm$$

$$z_{\text{CM}} = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \left(\sum \Delta m_i z_i \right) / \sum \Delta m_i = \int z \, dm / \int dm = (1/M) \int z \, dm$$

E' facile rendersi conto che le tre coordinate (x_{CM}, y_{CM}, z_{CM}) sono le coordinate di un vettore **posizione** \mathbf{S} definito in uno spazio x - y - z . Questo permette di introdurre la **equazione vettoriale per centro di massa di un corpo**:

$$\mathbf{S}_{CM} = \int \mathbf{s} \, dm \ / \ \int dm$$

Considerazioni di simmetria

Spesso tratteremo **corpi omogenei** (ossia **densità costante in funzione della posizione (x,y,z)**) che possiedono un punto, una linea o un piano di simmetria.

In questo caso il centro di massa cadrà in quel punto, o lungo quella linea, o su quel piano.

Per esempio, una sfera omogenea possiede un punto di simmetria: il suo centro, e infatti è lì che è localizzato il suo centro di massa.

Il moto del centro di massa

A prima vista potrebbe sembrare superfluo affrontare la questione del moto del centro di massa. Per esempio nel caso del moto di un corpo rigido, è abbastanza intuitivo rendersi conto che il moto del centro di massa altro non è che il moto traslatorio dello stesso corpo.

Tuttavia, nel caso in cui il sistema in esame non è un corpo rigido, ma è per esempio un insieme di particelle, la cosa va trattata con maggiore attenzione.

Consideriamo quindi un sistema di particelle, distribuito per semplicità lungo l'asse x :



Risulta che:

$$M x_{CM} = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_N x_N$$

Derivando questa equazione rispetto al tempo si ottiene:

$$M \frac{dx_{CM}}{dt} = m_1 \frac{dx_1}{dt} + m_2 \frac{dx_2}{dt} + \dots + m_N \frac{dx_N}{dt}$$

$$M v_{CMx} = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} + \dots + m_N v_{Nx}$$

in cui individuiamo la velocità del centro di massa e le velocità delle singole particelle lungo l'asse x . Derivando ancora rispetto al tempo, scriveremo che:

$$M a_{CMx} = m_1 a_{1x} + m_2 a_{2x} + \dots + m_N a_{Nx}$$

Risulta in sostanza:

$$M \mathbf{a}_{CMx} = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{Nx}$$

Analoghe equazioni per gli assi y e z potranno essere determinate per il caso di un sistema di particelle distribuite in un volume. Le tre equazioni scalari

$$M \mathbf{a}_{CMx} = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{Nx}$$

$$M \mathbf{a}_{CMy} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{Ny}$$

$$M \mathbf{a}_{CMz} = F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{Nz}$$

Possono essere riunite in un'unica equazione vettoriale:

$$M \mathbf{a}_{CM} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_N$$

Questa formula (che ci riconduce alla II Legge di Newton):

$$\mathbf{M} \mathbf{a}_{CM} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_N$$

stabilisce in sostanza che: **il prodotto della massa complessiva del gruppo di particelle per l'accelerazione del centro di massa è uguale alla somma vettoriale di tutte le forze che agiscono sul sistema di particelle**

**Poiché eventuali forze interne saranno a due a due equali e contrarie
(III Legge di Newton) considereremo solo le forze esterne**

Cioè il moto del centro di massa sarebbe quello che risulterebbe se tutta la massa fosse concentrata in quel punto e se su questo punto agisse una forza pari alla risultante di

tutte le forze esterne agenti sul sistema: $\mathbf{F}_{est} = \mathbf{M} \mathbf{a}_{CM}$

Questa conclusione vale per qualsiasi configurazione del corpo o del sistema di particelle, sia che si tratti di un corpo rigido in cui tutte le particelle occupano posizioni fisse, sia per un agglomerato di particelle in cui le posizioni relative possono cambiare (moto interno).

Quindi, in definitiva, va ricordato che:

LEGGE DEL MOTO TRASLATORIO DEL CENTRO DI MASSA

Qualunque sia il sistema, e comunque possano muoversi le sue parti, il centro di massa di un sistema di massa totale M si muove sempre obbedendo alla relazione:

$$\mathbf{F}_{\text{est}} = M \mathbf{a}_{\text{CM}}$$