

Lezione X

(Conservazione dell'Energia, Esempi)



FRUIZIONE E UTILIZZO DEI MATERIALI DIDATTICI

- ➔ **E' vietata** la **copia**, la **rielaborazione**, la **riproduzione** dei contenuti e immagini presenti nelle lezioni in qualsiasi forma
- ➔ **E' inoltre vietata** la **diffusione**, la **redistribuzione** e la **pubblicazione** dei contenuti e immagini, incluse le registrazioni delle videolezioni con qualsiasi modalità e mezzo non autorizzati espressamente dall'autore o da Unica

Sistemi conservativi a 2 e 3 dimensioni

Tutto quanto abbiamo discusso fino adesso per il caso unidimensionale, in cui la forza era orientata lungo la direzione del moto, si può **facilmente generalizzare al caso di un moto in più dimensioni.**

L'ipotesi che stiamo considerando è **comunque** quella in cui **il lavoro fatto da una data forza \mathbf{F} dipende soltanto dai punti estremi del moto del percorso.**

In questo caso la forza in questione è una forza **conservativa.**

In questo caso, l'energia potenziale U sarà una funzione delle coordinate x, y, z dello spazio in cui avviene il moto, e cioè

$$U = U(x, y, z)$$

E di nuovo troveremo che **l'energia meccanica E è conservata:**

$$K + U = E = \text{costante}$$

Cioè

$$\frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} m v_y^2 + \frac{1}{2} m v_z^2 + U(x, y, z) = E$$

Forze non conservative

Ricapitoliamo:

Partendo dal teorema lavoro-energia:

$$L = \Delta K$$

abbiamo trovato che quando la risultante \mathbf{F} delle forze è conservativa, il lavoro fatto può essere espresso come diminuzione dell'energia potenziale:

$$-\Delta U = \Delta K$$

Questo ci ha condotto all'idea della conservazione dell'energia cinetica + energia potenziale, cioè:

$$\Delta K + \Delta U = 0$$

$$\Delta(K + U) = 0$$

$$K + U = \text{costante}$$

Abbiamo chiamato questa costante E , **energia meccanica totale del sistema**

Supponiamo adesso che fra le forze agenti sulla massa in questione ve ne siano alcune **non** conservative. Il lavoro fatto dalla risultante delle forze sarà uguale alla somma del lavoro fatto dalle forze conservative e da quelle non conservative:

In base al teorema lavoro-energia, potremo quindi scrivere sempre:

$$L_{\text{conserv}} + L_{\text{non-conserv}} = \Delta K$$

D'altra parte, il lavoro fatto dalle forze conservative può essere scritto come diminuzione dell'energia potenziale:

$$L_{\text{conserv}} = -\Delta U$$

Da cui:

$$L_{\text{non-conserv}} = \Delta K + \Delta U$$

E cioè:

$$L_{\text{non-conserv}} = \Delta(K + U) = \Delta E$$

$$L_{\text{non-conserv}} = \Delta(K + U) = \Delta E$$

Quindi: in presenza di forze non conservative, l'energia meccanica totale E di un sistema non è costante, ma cambia di un ammontare pari al lavoro effettuato dalle forze non conservative.

Nel caso della forza dissipativa come la forza d'attrito, cosa ne è stato dell'energia meccanica totale ? In questo caso, l'energia meccanica si è trasformata in **calore**, e risulta che l'**energia termica** sviluppata è esattamente **eguale** alla energia meccanica dissipata

La conservazione dell'energia

Abbiamo visto che nel caso di forze non conservative risulta che il teorema lavoro energia può essere scritto come segue:

$$L_{\text{non-conserv}} = \Delta K + \Delta U$$

In generale la formulazione più corretta sarà:

$$L_{\text{non-conserv}} = \Delta K + \sum \Delta U$$

dove il simbolo di sommatoria si riferisce ai contributi di energia potenziale di tutte le forze **conservative** presenti.

Allo stesso tempo, possono essere presenti diverse forze **non** conservative, di cui la forza di attrito che abbiamo visto che sviluppa energia termica è solo un esempio.

Una importante affermazione, che fino adesso non è stata mai contraddetta dai risultati sperimentali, è la seguente:

L'energia totale di un sistema, come risulta dalla somma dell'energia cinetica, dell'energia potenziale, dell'energia termica e di altre forme di energia, non cambia

Alcune considerazioni:

Abbiamo iniziato l'approccio alla conservazione dell'energia parlando della conservazione dell'energia meccanica $K+U$.

Poi abbiamo scoperto che l'energia meccanica si conserva solo nel caso di forze conservative.

Per esempio nel caso di forze d'attrito, l'energia meccanica **non** si conserva ma viene dissipata in **energia termica**

Adesso abbiamo affermato che **l'energia totale** di un sistema, come risulta dalla somma dell'energia cinetica, dell'energia potenziale, dell'energia termica e di **altre forme** di energia, non cambia

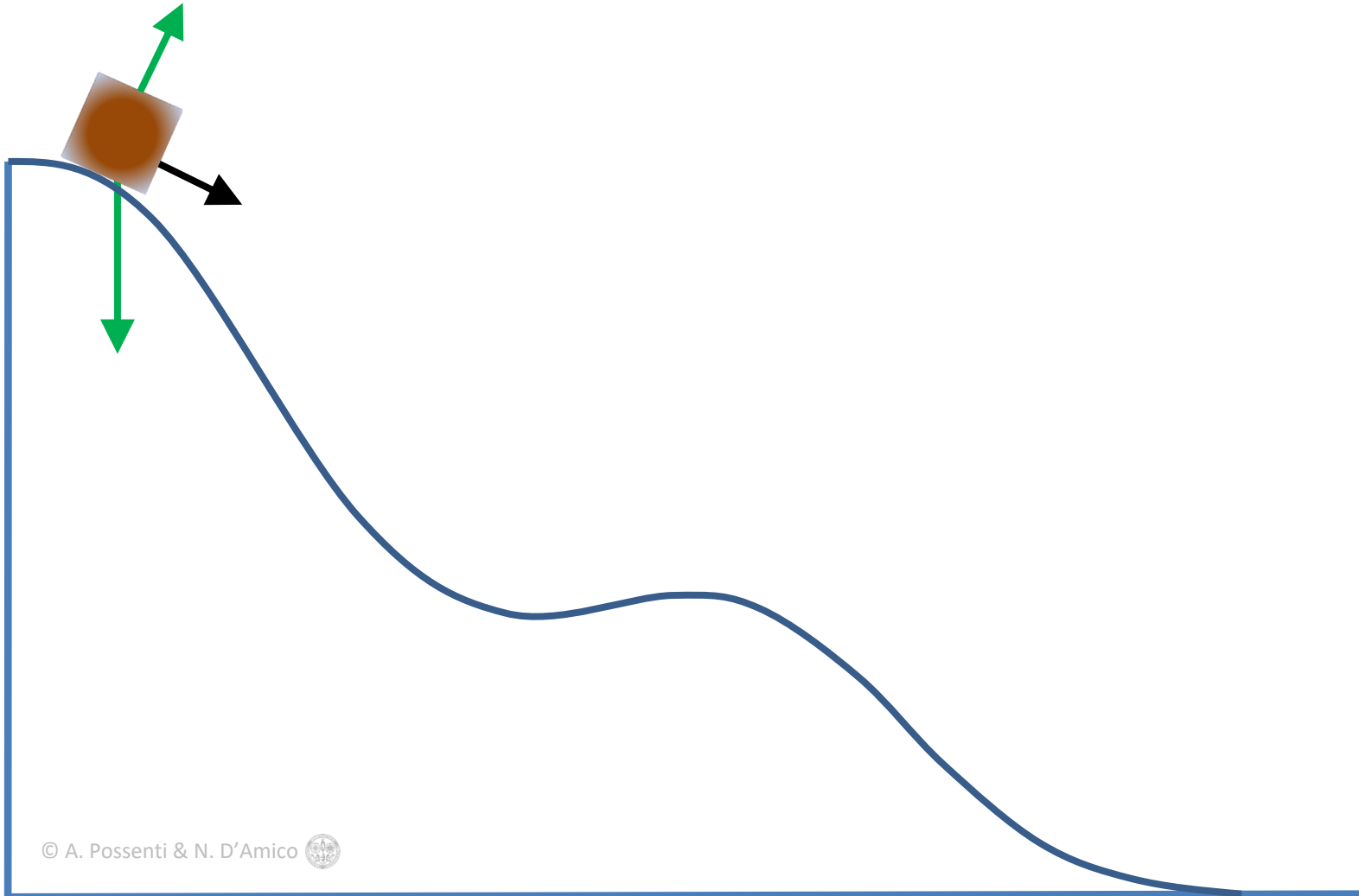
Sembra quasi che si voglia rincorrere assolutamente un teorema (la conservazione dell'energia, appunto) invocando eventuali **altre** forme di energia, laddove apparentemente l'energia non si sarebbe conservata.

Di fatto non è la teoria, ma

è l'esperienza che ci conferma la veridicità del teorema

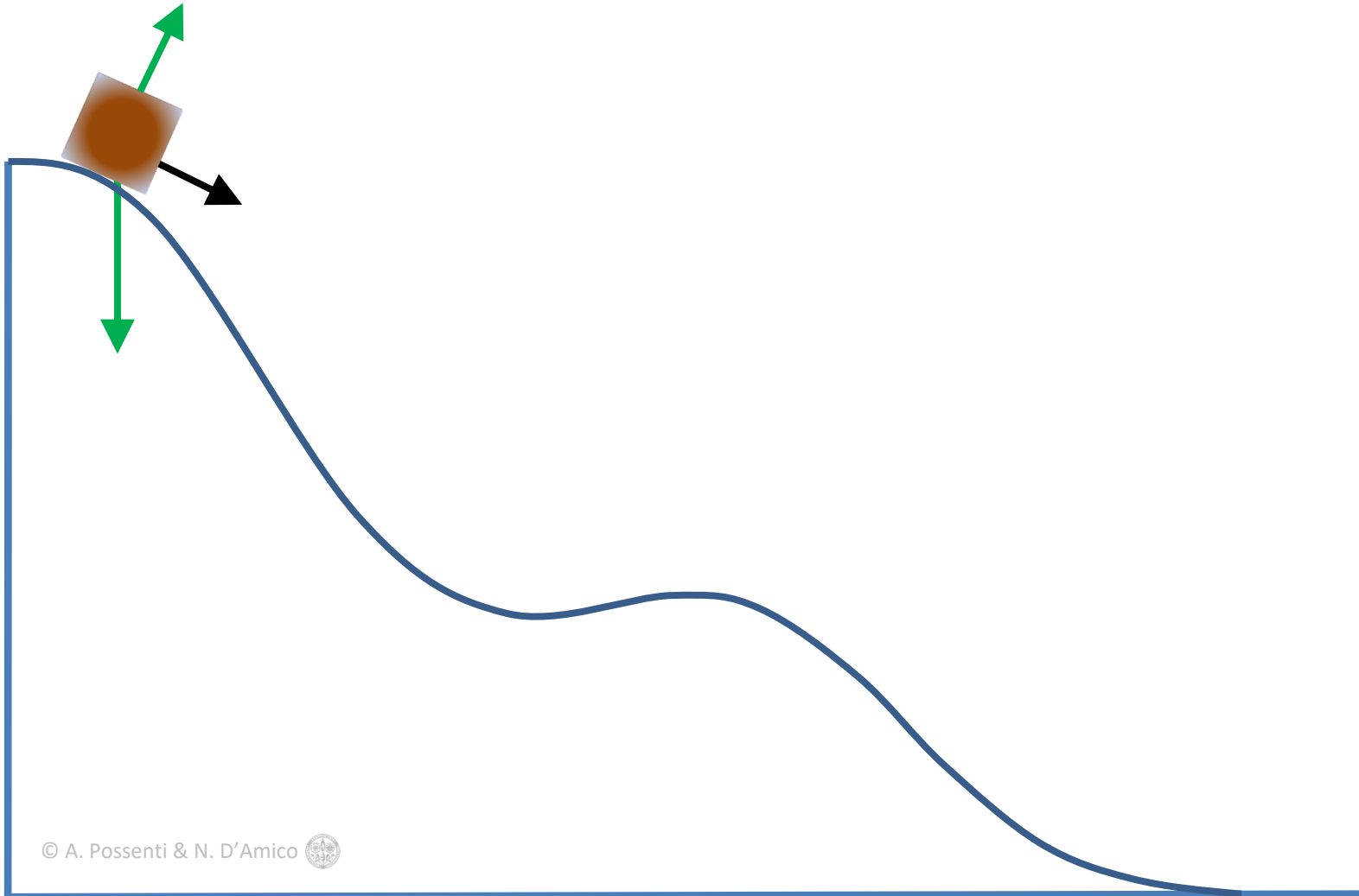
Esempio 1

Un blocco di massa m scivola lungo una superficie curva priva di attrito come in figura.



Esempio 1

Un blocco di massa m scivola lungo una superficie curva priva di attrito come in figura. In ogni istante, la forza normale N risulta perpendicolare alla superficie e quindi alla direzione del moto e pertanto NON esegue lavoro.



Esempio 1

Un blocco di massa m scivola lungo una superficie curva priva di attrito come in figura. In ogni istante, la forza normale N risulta perpendicolare alla superficie e quindi alla direzione del moto e pertanto NON esegue lavoro.

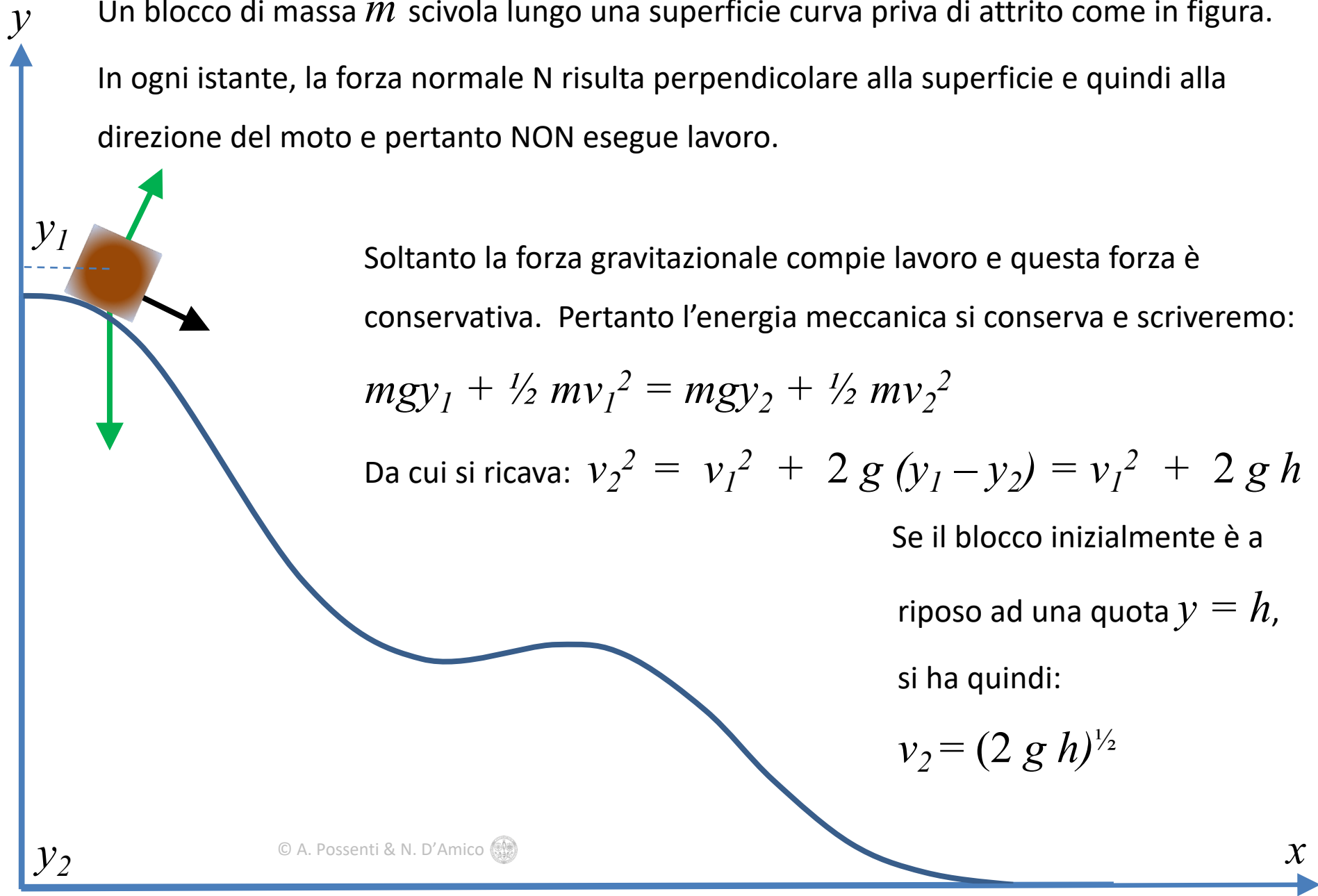
Soltanto la forza gravitazionale compie lavoro e questa forza è conservativa. Pertanto l'energia meccanica si conserva e scriveremo:

$$mgy_1 + \frac{1}{2} mv_1^2 = mgy_2 + \frac{1}{2} mv_2^2$$

Da cui si ricava: $v_2^2 = v_1^2 + 2g(y_1 - y_2) = v_1^2 + 2gh$

Se il blocco inizialmente è a riposo ad una quota $y = h$, si ha quindi:

$$v_2 = (2gh)^{1/2}$$



Esempio 2

Supponiamo di disporre di una molla con costante elastica $k = 800 \text{ N/m}$, posizionata come in figura.



Supponiamo di comprimere la molla di $0,050 \text{ m}$ rispetto alla posizione di equilibrio e di porre davanti la molla un biglia di $0,020 \text{ kg}$.

Facendo l'ipotesi che la superficie orizzontale sia priva di attrito, con quale velocità la palla si distaccherà dalla molla ?

Trattandosi di una forza conservativa (la forza esercitata dalla molla), l'energia meccanica si conserva.

L'energia meccanica iniziale è l'energia potenziale della molla: $\frac{1}{2} k x^2$

L'energia meccanica finale è l'energia cinetica della biglia: $\frac{1}{2} m v^2$

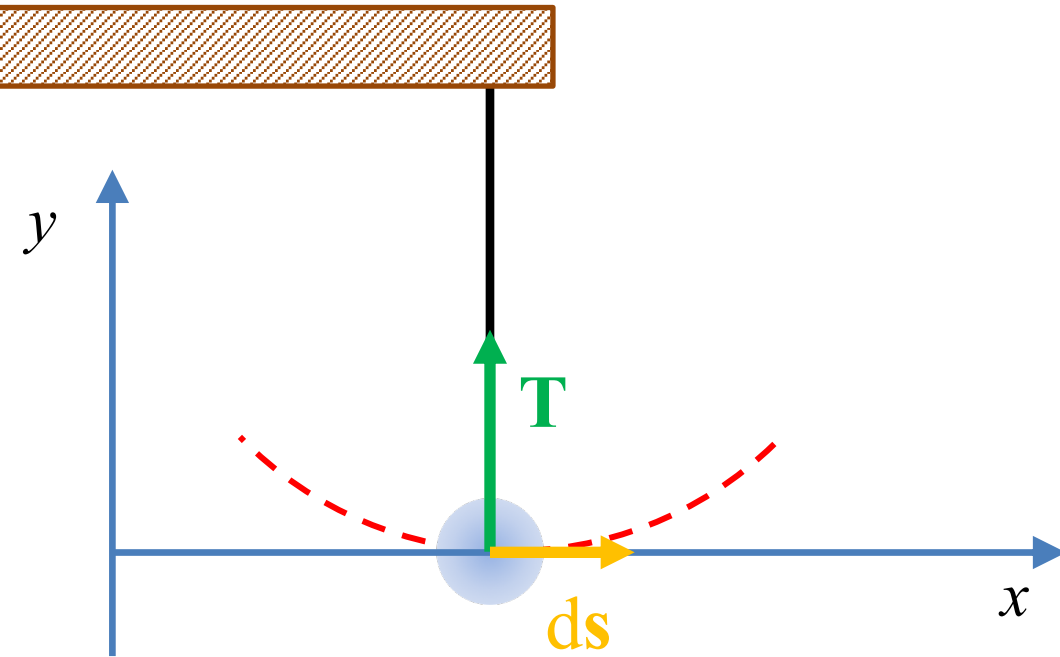
Pertanto scriveremo : $\frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m v^2$

Da cui risulta: $v = x (k/m)^{1/2} = 0,050 \text{ m} \times ((800 \text{ N/m})/0,020 \text{ kg})^{1/2}$

$$v = 10 \text{ m/s}$$

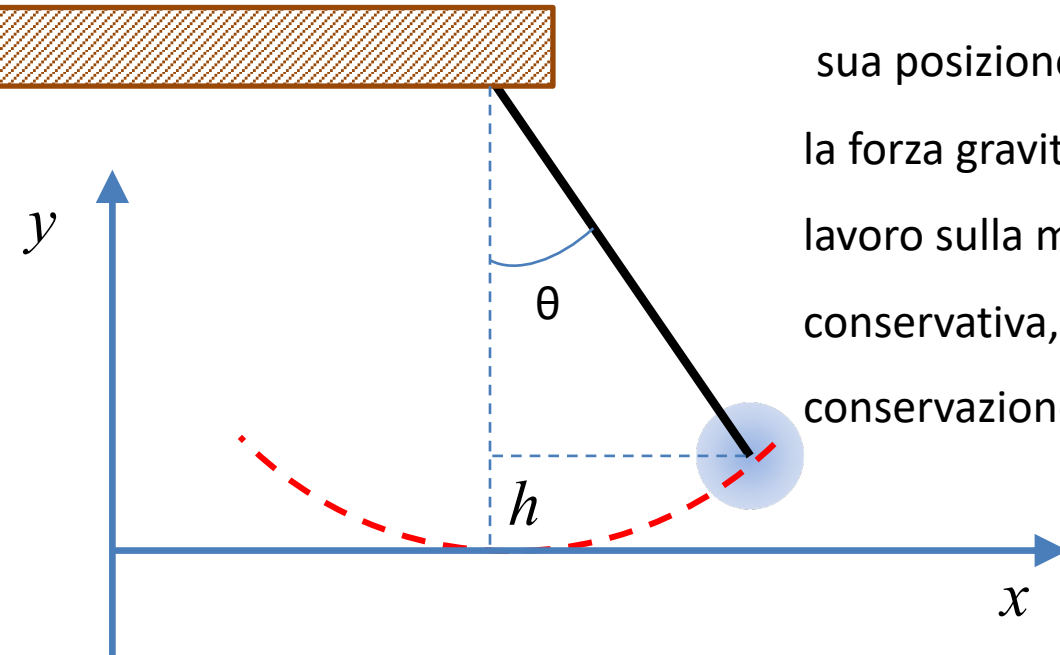
Esempio 3

Consideriamo un pendolo semplice. Il moto si svolge nel piano x - y , si tratta cioè di un moto bidimensionale. La tensione del filo \mathbf{T} è sempre perpendicolare alla traiettoria $d\mathbf{S}$ della massa m , per cui tale forza non compie lavoro.



Esempio 3

Consideriamo un pendolo semplice. Il moto si svolge nel piano x - y , si tratta cioè di un moto bidimensionale. La tensione del filo \mathbf{T} è sempre perpendicolare alla traiettoria $d\mathbf{S}$ della massa m , per cui tale forza non compie lavoro.



Se il pendolo viene spostato di un angolo θ dalla sua posizione di equilibrio e poi lasciato libero, soltanto la forza gravitazionale compie lavoro sulla massa m . Poiché si tratta di una forza conservativa, possiamo applicare la legge di conservazione dell'energia in due dimensioni

e quindi scrivere:

$$\frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} m v_y^2 + U(x,y) = E$$

$$\frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} m v_y^2 + U(x,y) = E$$

Possiamo porre: $v_x^2 + v_y^2 = v^2$ dove v è la velocità lungo l'arco

Inoltre $U = m g y$ dove l'origine dell'asse y coincide col punto più basso

Quindi:
$$\frac{1}{2} m v^2 + m g y = E$$

Quando posizioniamo la massa ad un angolo θ ed un'altezza h , la sua energia cinetica è

nulla, quindi:
$$E = m g h$$

In ogni punto sarà quindi: $\frac{1}{2} m v^2 + m g y = m g h \rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = m g (h - y)$

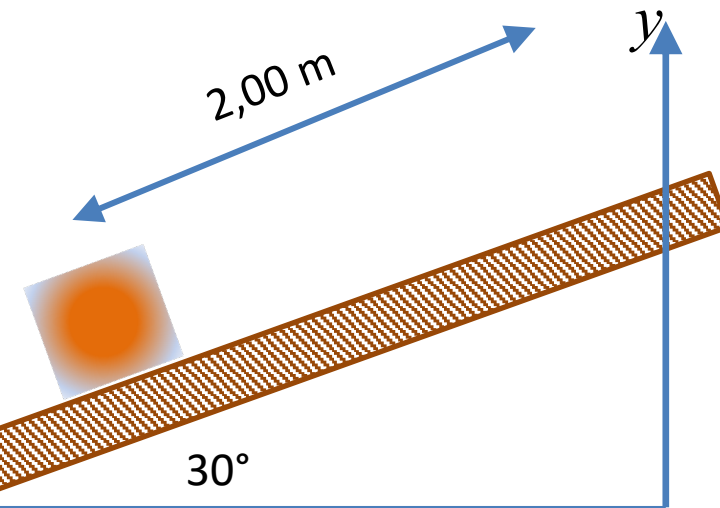
Quindi la velocità massima si ha per $y = 0$ ed è $v = (2 g h)^{1/2}$

La velocità minima risulta in $y = h$ dove $v = 0$

Esempio 4

Un blocco di 10,0 kg viene lanciato in salita lungo un piano inclinato di $30,0^\circ$ con una velocità iniziale di 5,00 m/s. Il blocco percorre 2,00 m, si ferma e poi ritorna alla base.

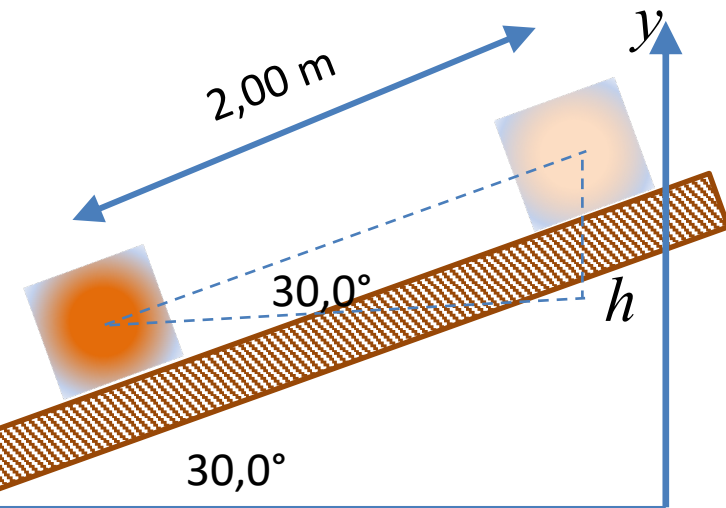
Quesito: Calcolare la velocità con cui il blocco ritorna alla base, e la forza d'attrito f_{att} .



Esempio 4

Un blocco di 10,0 kg viene lanciato in salita lungo un piano inclinato di $30,0^\circ$ con una velocità iniziale di 5,00 m/s. Il blocco percorre 2,00 m, si ferma e poi ritorna alla base.

Quesito: Calcolare la velocità con cui il blocco ritorna alla base, e la forza d'attrito f_{att} .



Quando siamo alla sommità del moto, l'energia cinetica è zero, mentre l'energia potenziale è data dal lavoro esercitato contro la forza di gravità, a scapito appunto dell'energia cinetica.

$$\begin{aligned} U &= m g h = \\ &= (10,0 \text{ kg}) (9,80 \text{ m/s}^2) (2,00\text{m}) (\text{sen } 30,0^\circ) = 98,0 \text{ Joule} \end{aligned}$$

Alla base, dove il moto è iniziato possiamo mettere $U = 0$ mentre l'energia cinetica era

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} (10,0 \text{ kg}) (5,00 \text{ m/s})^2 = 125 \text{ Joule}$$

Risulta una differenza netta di energia di

$$98,0 \text{ Joule} - 125 \text{ Joule} = -f_{att} \times 2,00 \text{ m}$$

da cui risulta: $f_{att} = 27 \text{ Joule} / 2,00 \text{ m} = 13,5 \text{ N} \pm 0.5 \text{ N}$

Consideriamo adesso la discesa. Alla sommità avevamo:

$$U = 98,0 \text{ Joule}$$

La perdita di energia cinetica dovuta all'attrito durante la discesa sarà sempre 27 Joule, per cui l'energia cinetica all'arrivo sarà $98,0 - 27 = 71 \text{ Joule}$

Da cui $\frac{1}{2} m v^2 = 71 \text{ Joule} \rightarrow v = (71 \text{ Joule} \times 2 / 10,0 \text{ kg})^{1/2} = 3,8 \text{ m/s}$

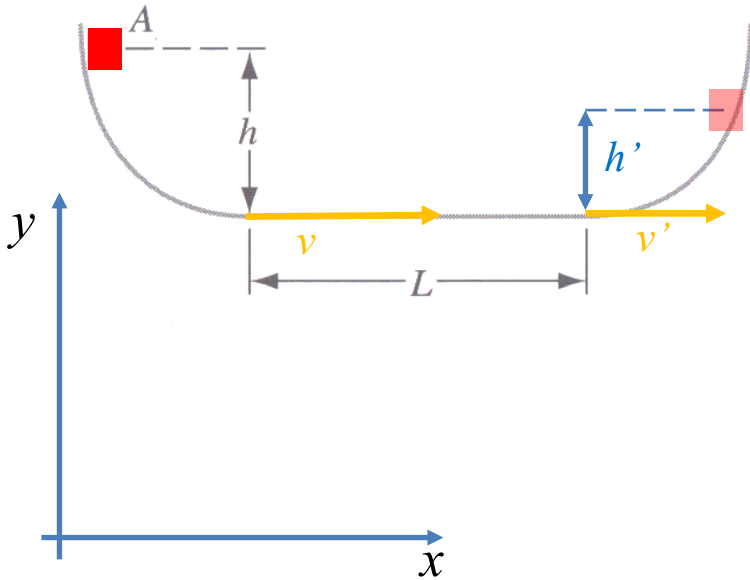
Riassumendo:

- La massa parte con una velocità in salita di 5,00 m/s
- Ritorna al punto di partenza con una velocità di 3,8 m/s
- Questo è dovuto alla perdita netta di energia, che si è trasformata in calore a causa dell'attrito sia in andata che in ritorno.

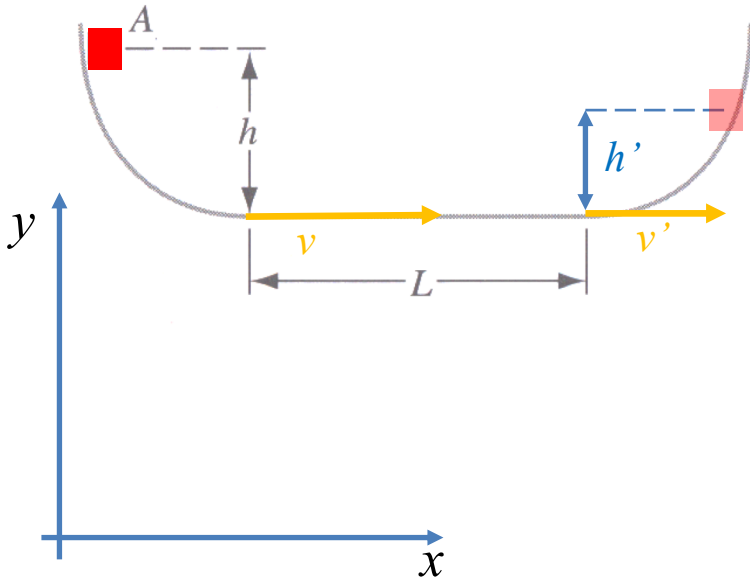
Pertanto se quando la massa torna al punto di partenza trova una molla che semplicemente le inverte il moto, risalirebbe ma percorrendo una distanza minore, e arriverebbe al punto di partenza con una velocità sempre più bassa, fino a fermarsi.

Esempio 5

Un corpo puntiforme di massa $m = 234$ g scivola sulla pista visibile in sezione nella figura, con le estremità innalzate rispetto alla parte centrale, che è in piano e ha lunghezza $L = 2,16$ m. Le due parti curve sono prive di attrito, mentre nella parte in piano il corpo perde per attrito 688 mJ di energia meccanica. Il corpo è lasciato libero in A, all'altezza $h = 1,05$ m rispetto al tratto piano. Dove va a fermarsi?



Esempio 5



Un corpo puntiforme di massa $m = 234 \text{ g}$ scivola sulla pista visibile in sezione nella figura, con le estremità innalzate rispetto alla parte centrale, che è in piano e ha lunghezza $L = 2,16 \text{ m}$. Le due parti curve sono prive di attrito, mentre nella parte in piano il corpo perde per attrito 688 mJ di energia meccanica. Il corpo è lasciato libero in A, all'altezza $h = 1,05 \text{ m}$ rispetto al tratto piano. Dove va a fermarsi?

(a) Il punto materiale arriva alla base con energia meccanica uguale all'energia cinetica, a sua volta uguale all'energia potenziale di partenza

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = mgh.$$

Nell'attraversamento della parte in piano l'energia meccanica si riduce di ΔE , per cui all'inizio della parte curva l'energia meccanica totale (coincidente con la sola energia cinetica) del punto materiale sarà

$$E' = E - \Delta E = \frac{1}{2}mv'^2.$$

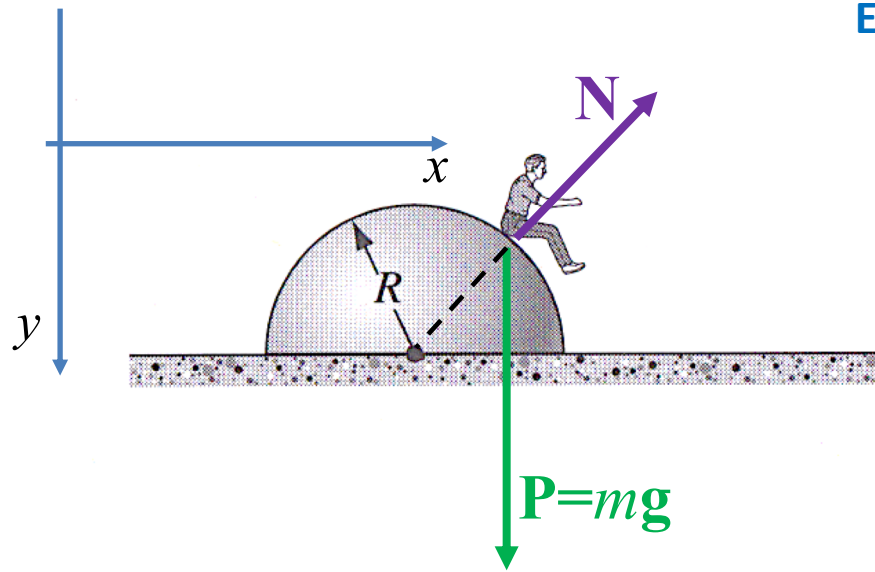
L'altezza h' a cui si fermerà momentaneamente il punto materiale si ottiene eguagliando l'energia totale all'energia potenziale $E' = mgh'$, da cui

$$\begin{aligned} h' &= h - \frac{\Delta E}{mg} = (1,05 \text{ m}) - \frac{(0,688 \text{ J})}{(0,234 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2)} = \\ &= (1,05 \text{ m}) - (0,30 \text{ m}) = 0,75 \text{ m} \end{aligned}$$

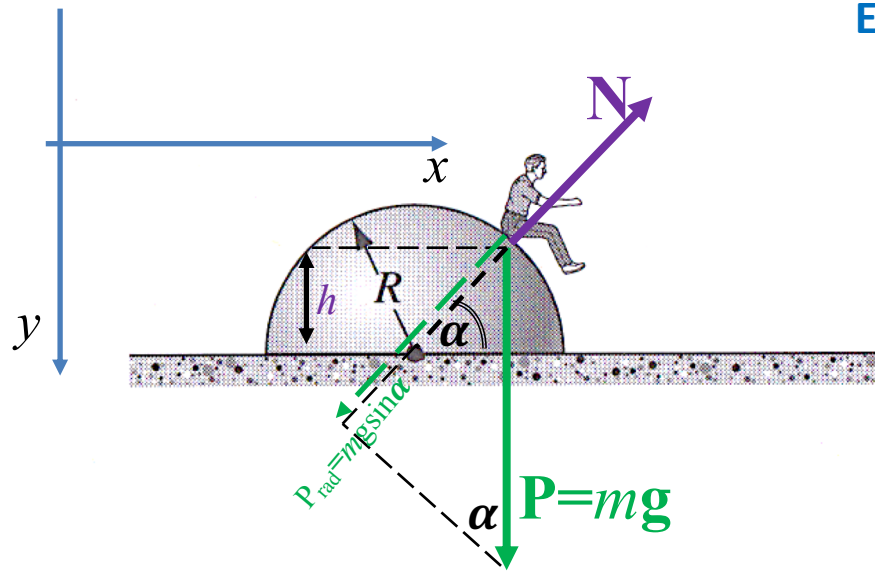


Esempio 6

Un ragazzino è seduto sulla cima del blocco di ghiaccio semisferico rappresentato in figura. Riceve una leggerissima spinta e comincia a scivolare in giù. Dimostrate che, se il ghiaccio è privo di attrito, egli si staccherà dal ghiaccio in un punto all'altezza $2R/3$ dal suolo.



Esempio 6



Un ragazzino è seduto sulla cima del blocco di ghiaccio semisferico rappresentato in figura. Riceve una leggerissima spinta e comincia a scivolare in giù. Dimostrate che, se il ghiaccio è privo di attrito, egli si staccherà dal ghiaccio in un punto all'altezza $2R/3$ dal suolo.

Consideriamo il moto del ragazzino fino al momento del suo distacco dalla calotta di ghiaccio. Si tratta di un moto circolare accelerato. Le forze agenti sul ragazzino sono la forza peso e la reazione vincolare N della calotta, sempre in direzione radiale e diretta verso l'esterno.

Indichiamo con m la massa del ragazzino e con α l'angolo che il vettore posizione R forma col suolo. La proiezione della seconda legge della dinamica in direzione radiale dà

$$mg \sin \alpha - N = m \frac{v^2}{R}.$$

Nel momento del distacco (caratterizzato da $N = 0$), questa equazione fornisce la relazione

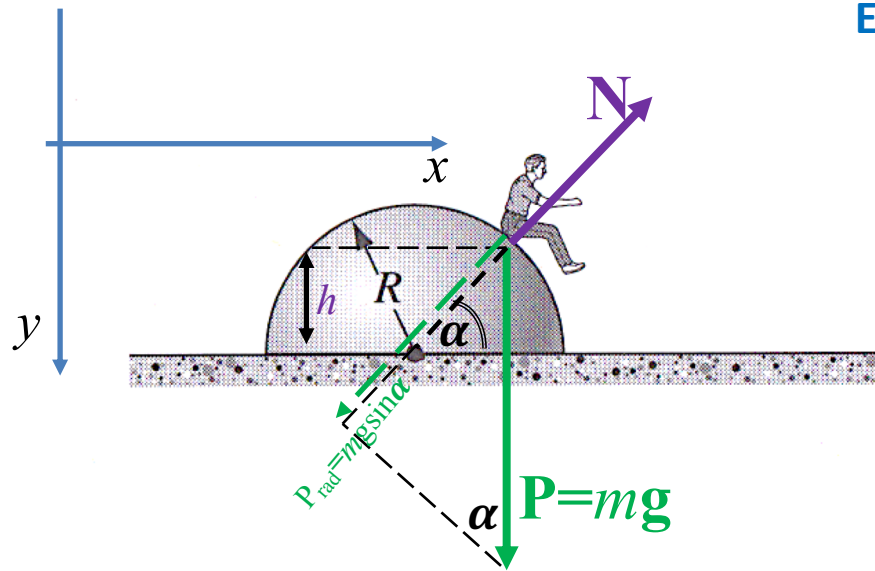
$$g \sin \alpha = \frac{v^2}{R},$$

in cui sia α che v sono incognite. Una seconda equazione è data dalla conservazione dell'energia meccanica. Avendo fissato come quota di riferimento il suolo, l'energia totale iniziale è la sola energia potenziale del punto di partenza (vertice della calotta) $E_i = mgR$, e l'energia totale di un punto a quota $h = R \sin \alpha$ è

$$mgR \sin \alpha + \frac{1}{2}mv^2 = mgR.$$



Esempio 6



Un ragazzino è seduto sulla cima del blocco di ghiaccio semisferico rappresentato in figura. Riceve una leggerissima spinta e comincia a scivolare in giù. Dimostrate che, se il ghiaccio è privo di attrito, egli si staccherà dal ghiaccio in un punto all'altezza $2R/3$ dal suolo.

Consideriamo il moto del ragazzino fino al momento del suo distacco dalla calotta di ghiaccio. Si tratta di un moto circolare accelerato. Le forze agenti sul ragazzino sono la forza peso e la reazione vincolare N della calotta, sempre in direzione radiale e diretta verso l'esterno.

Indichiamo con m la massa del ragazzino e con α l'angolo che il vettore posizione R forma col suolo. La proiezione della seconda legge della dinamica in direzione radiale dà

$$mg \sin \alpha - N = m \frac{v^2}{R}.$$

Nel momento del distacco (caratterizzato da $N = 0$), questa equazione fornisce la relazione

$$g \sin \alpha = \frac{v^2}{R},$$

in cui sia α che v sono incognite. Una seconda equazione è data dalla conservazione dell'energia meccanica. Avendo fissato come quota di riferimento il suolo, l'energia totale iniziale è la sola energia potenziale del punto di partenza (vertice della calotta) $E_i = mgR$, e l'energia totale di un punto a quota $h = R \sin \alpha$ è

$$mgR \sin \alpha + \frac{1}{2}mv^2 = mgR.$$

Risolviendo il sistema di queste due equazioni, ricaviamo il punto di distacco

$$gR(1 - \sin \alpha) = \frac{1}{2}gR \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad \sin \alpha = \frac{2}{3}.$$

Il ragazzino si stacca dalla calotta di ghiaccio ad un'altezza dal suolo pari a

$$h = R \sin \alpha = \frac{2}{3}R.$$

Si noti che il risultato è, nei limiti della ipotesi di non attrito in cui ci siamo messi, indipendente dalla massa del ragazzino.

