

Lezione IX

**(Forze conservative e
Non conservative,
Energia Potenziale)**



FRUIZIONE E UTILIZZO DEI MATERIALI DIDATTICI

- ➔ **E' vietata** la **copia**, la **rielaborazione**, la **riproduzione** dei contenuti e immagini presenti nelle lezioni in qualsiasi forma
- ➔ **E' inoltre vietata** la **diffusione**, la **redistribuzione** e la **pubblicazione** dei contenuti e immagini, incluse le registrazioni delle videolezioni con qualsiasi modalità e mezzo non autorizzati espressamente dall'autore o da Unica

Sul significato di lavoro negativo

Supponiamo che l'energia cinetica K di una particella diminuisca. Allora

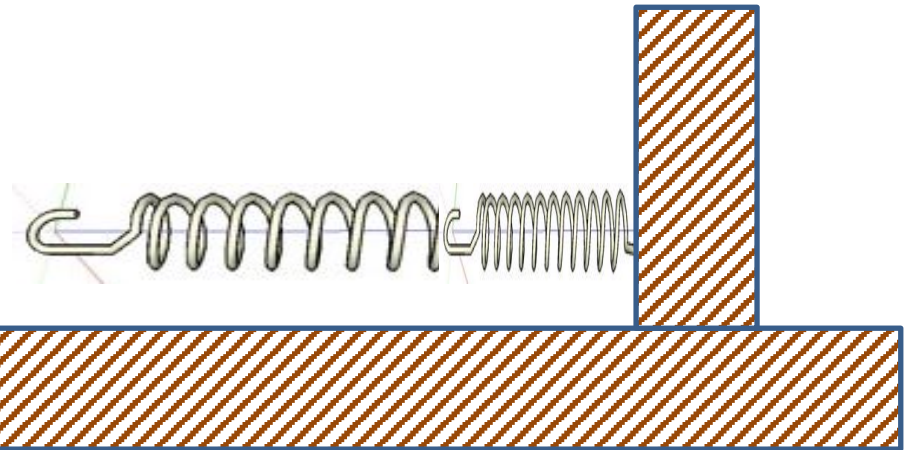
il lavoro L fatto su di essa dalla risultante F delle forze applicate risulta negativo

$$L = K - K_0 < 0 \quad \text{se } K < K_0$$

- Questa equazione può essere interpretata affermando che **l'energia cinetica di una particella diminuisce di una quantità eguale al lavoro da essa prodotto per contrastare una forza** (così come aumenta di una quantità uguale al lavoro ricevuto da una forza)
- In sostanza: una particella in moto possiede una certa quantità di energia, sotto forma di energia cinetica (energia di movimento). Non appena **produce lavoro**, perde **energia cinetica** (cioè velocità).
- Quindi: **l'energia cinetica di un corpo in movimento è pari al lavoro che produce nel fermarsi.**

Ecco il significato del teorema lavoro-energia!! Il lavoro produce energia, l'energia restituisce lavoro in pari misura. In senso figurativo potremmo affermare che entrambe sono due grandezze fisiche in cui in sostanza **l'energia appare come «accumulata»**

Supponiamo per esempio che un blocco di massa m si muova su un tavolo senza attrito ad velocità costante V . Lungo il suo percorso incontra una molla ancorata ad una parete che lo porta a riposo, cioè lo ferma. In base al teorema lavoro-energia, possiamo per esempio determinare di quanto si comprime la molla se la sua costante elastica è nota.



Il blocco in movimento possiede una energia cinetica K data dalla relazione:

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

Questa **energia cinetica eguaglia il lavoro che il blocco esegue sulla molla nell'arrestarsi**, e che è dato dalla:

$$L = \int_0^x F(x) dx \quad \text{dove: } F(x) = kx \rightarrow L = \frac{1}{2} kx^2$$

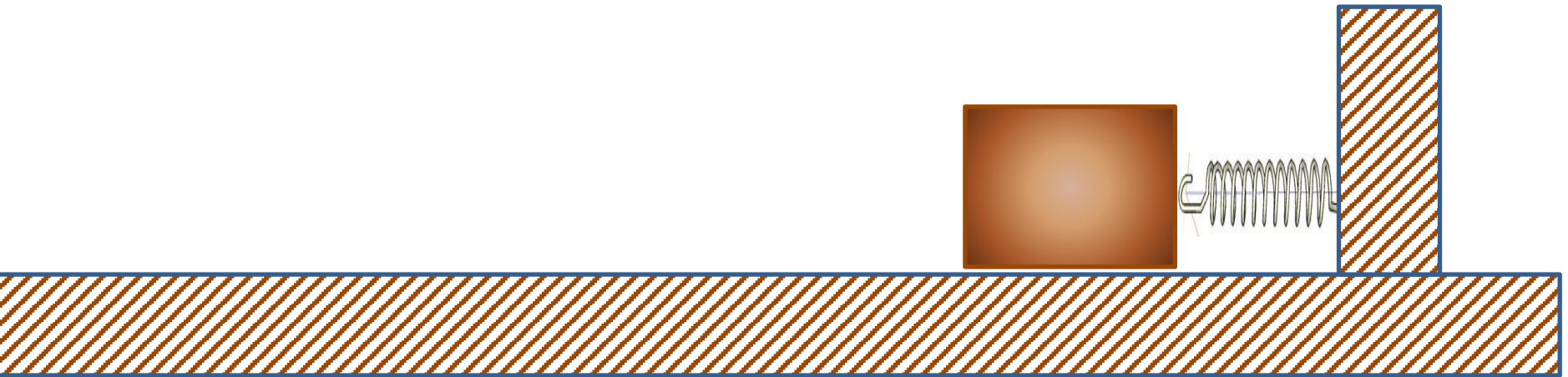
Eguagliando lavoro ed energia, si ha pertanto:

$$\frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} m v^2$$

Da cui possiamo ricavare la compressione della molla x :

$$x = (m v^2 / k)^{1/2} = (m/k)^{1/2} v$$

E interessante verificare che se lasciamo la molla **libera** di espandersi, la massa m riacquista **interamente** l'energia cinetica ceduta alla molla sotto forma di lavoro



Proprio quello che avevamo appena affermato sul significato del teorema lavoro-energia, ossia

Il lavoro produce energia, l'energia restituisce lavoro in pari misura.

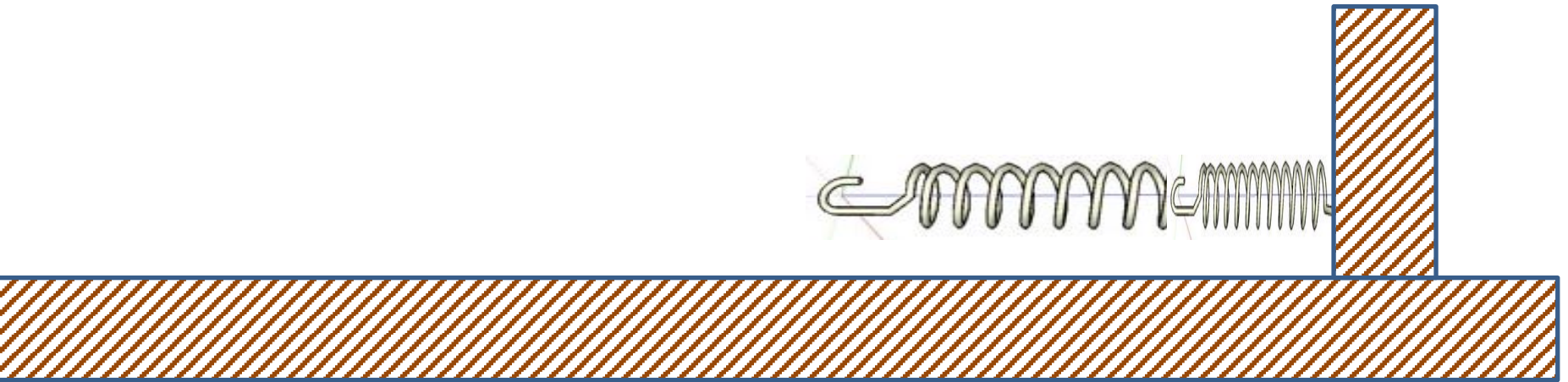
In senso figurativo potremmo affermare che entrambe sono due grandezze fisiche in cui in sostanza **l'energia appare come «accumulata»**

Vedremo che per avvicinarci ad enunciare il grande principio della Conservazione dell'Energia, dovremo distinguere alcuni tipi di forze. E quindi in alcuni casi **potrà essere utile calcolare separatamente il lavoro fatto su una particella da ogni forza applicata**, piuttosto che individuare direttamente il lavoro fatto dalla risultante delle forze.

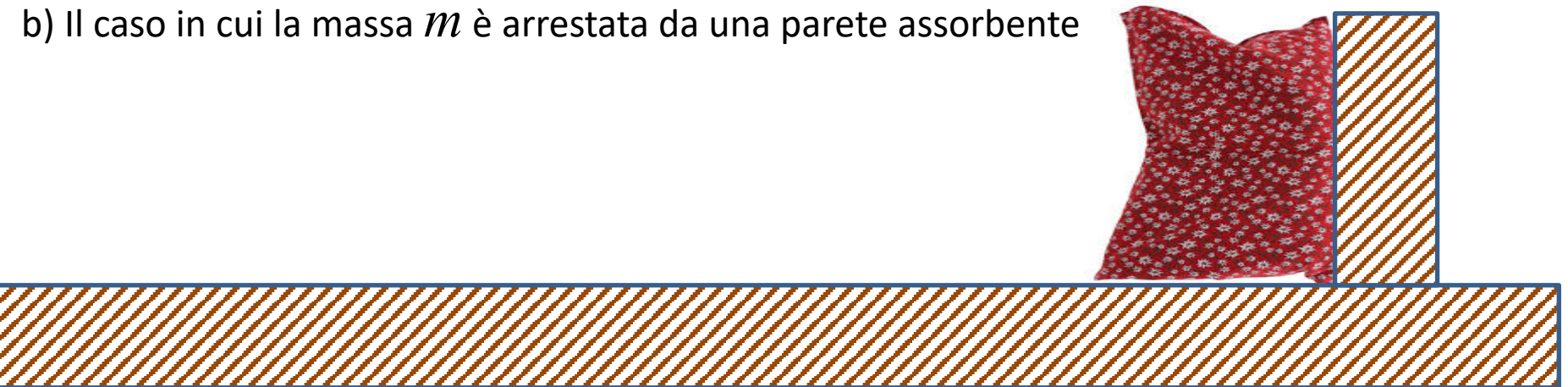
Per capire il fatto che esistono differenti tipi di forze, e che non tutte «rispondono» allo stesso modo al teorema lavoro-energia, consideriamo i seguenti esempi:

- a) L'esempio della molla considerato prima, in cui una massa m è arrestata da una molla
- b) Il caso in cui la massa m è arrestata da una parete assorbente

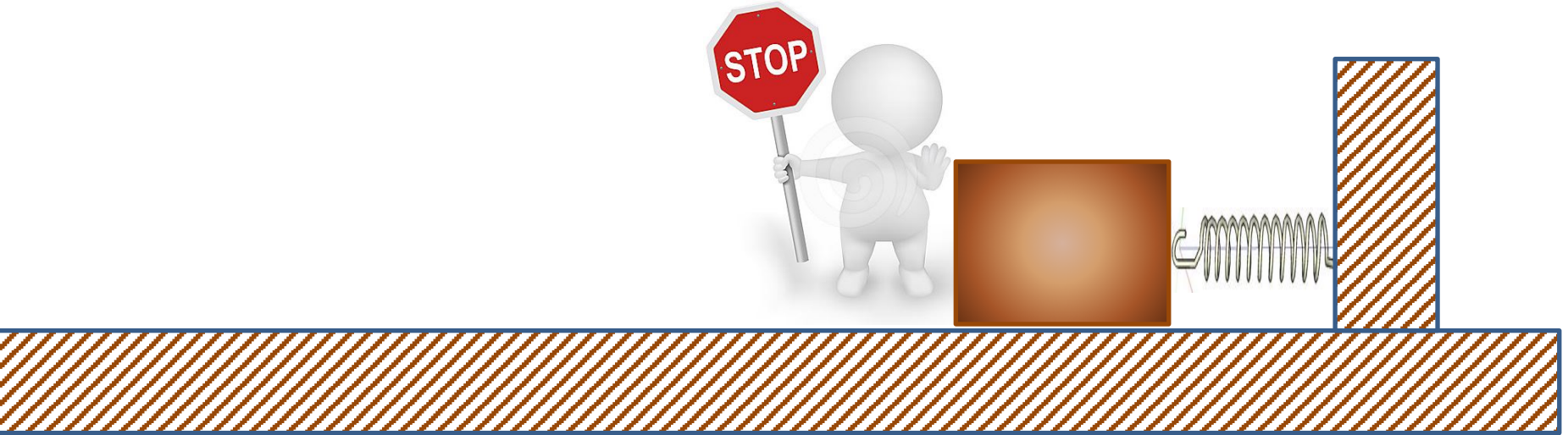
a) L'esempio della molla considerato prima, in cui una massa m è arrestata da una molla



b) Il caso in cui la massa m è arrestata da una parete assorbente



Supponiamo di bloccare entrambe le masse non appena si sono fermate:



Adesso lasciamo nuovamente libere le masse e **vediamo che succede:**



Cosa è successo ?

- a) Nel primo caso:** la molla ha interamente **restituito** alla massa m la sua energia cinetica

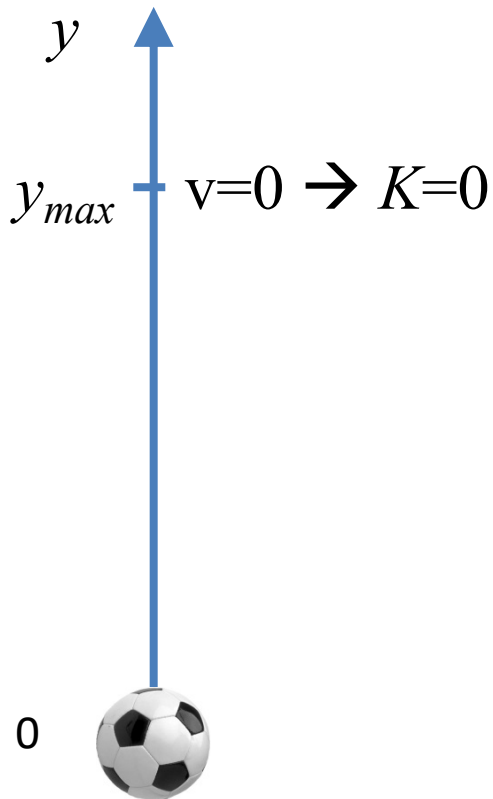
- b) Nel secondo caso:** il cuscino **non ha restituito** per niente alla massa m la sua energia cinetica

**Vedremo nel seguito che esistono forze *conservative*
e forze *non conservative*, e vedremo cosa vuol dire
alla luce di questo esperimento**

Forze conservative e forze non conservative

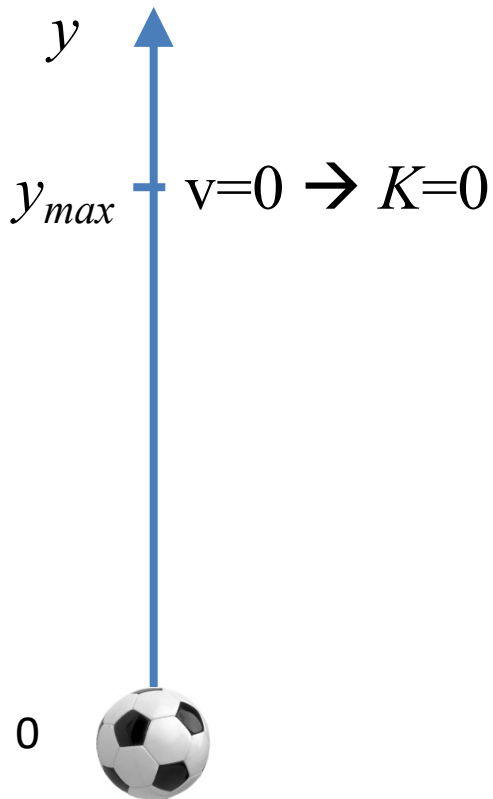
Consideriamo un pallone che viene lanciato verso l'alto con una velocità iniziale V_0 , il che corrisponde ad una energia cinetica iniziale $K_0 = \frac{1}{2} mV_0^2$

Cosa possiamo notare ?



$$v=v_0 \rightarrow K_0 = \frac{1}{2} mV_0^2$$

Forze conservative e forze non conservative



Consideriamo un pallone che viene lanciato verso l'alto con una velocità iniziale V_0 , il che corrisponde ad una energia cinetica iniziale $K_0 = \frac{1}{2} mV_0^2$

Cosa possiamo notare ?

A causa della forza di gravità $F = -mg$ la sua velocità decresce, fino ad annullarsi una volta raggiunto il punto più alto y_{max} . Di conseguenza in questo punto $K = 0$

Poi la il pallone inverte il suo moto e la sua velocità, e di conseguenza la sua energia cinetica aumenta, fino ad arrivare allo stesso valore iniziale, quando arriva a terra

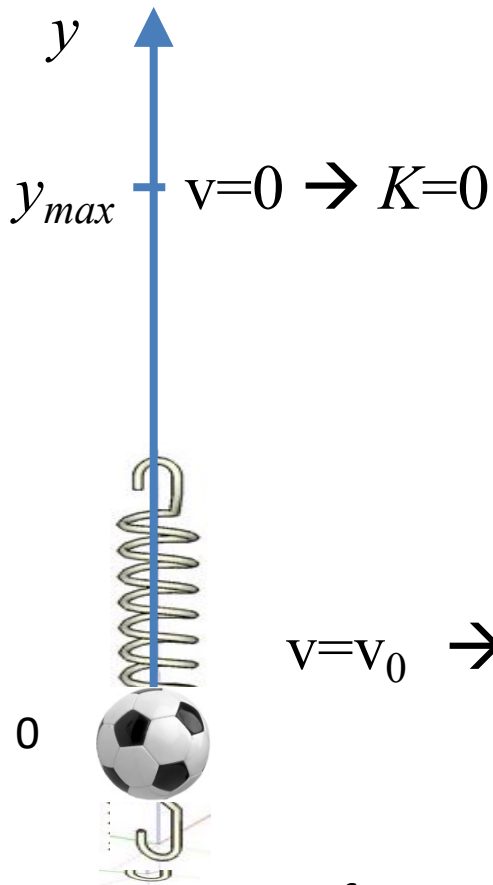
$$v=v_0 \rightarrow K_0 = \frac{1}{2} mV_0^2$$

Avevamo visto che un corpo dotato di energia cinetica è in grado di effettuare lavoro (a scapito della sua energia cinetica):



Non c'è dubbio che nel caso della palla lanciata verticalmente, dopo un viaggio di andata e ritorno, la capacità della palla a fare lavoro è ritornata la stessa; tale capacità è stata dunque **conservata**.

Se per esempio posizionassimo a terra una molla che la palla intercetta prima di toccare il suolo.....:

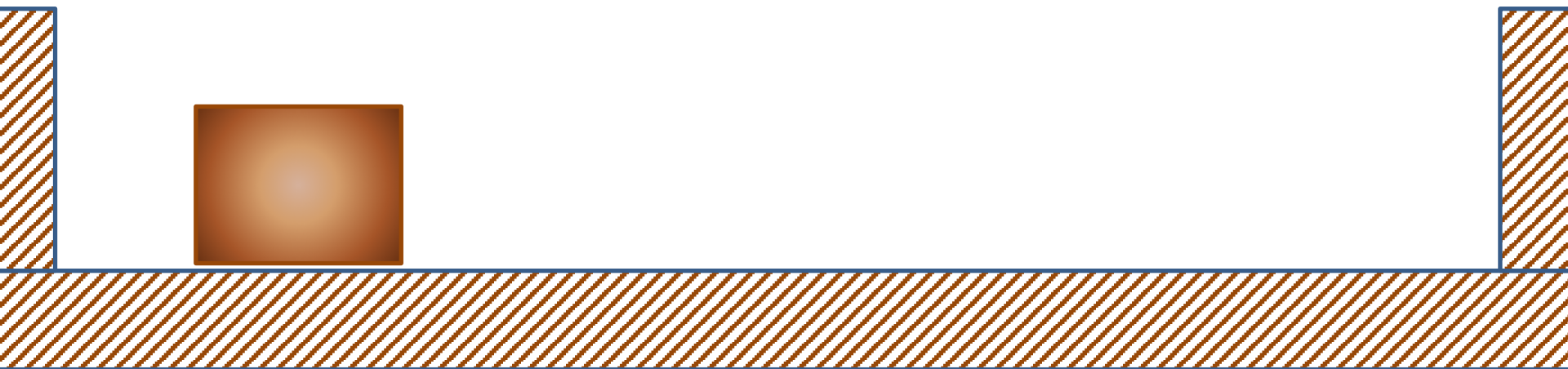


E questo ovviamente vale anche per il corpo che viaggiava
In orizzontale: se nel suo viaggio di ritorno, verso sinistra,
incontra un'altra molla, è **di nuovo** in grado di comprimerla
a scapito della sua energia cinetica.

$$v=v_0 \rightarrow K_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$$

Le forze per cui si osserva questo fenomeno **si chiamano forze conservative:**
lo è la forza esercitata da una molla, come lo è la forza gravitazionale

In un esperimento di questo tipo, l'energia cinetica viene ceduta e riacquisita periodicamente



Le **forze conservative**, come la forza di una molla o come la forza gravitazionale, sono in grado di **restituire** ad una massa m la sua **energia cinetica**.

Le **forze non conservative** come le forze di attrito, o di deformazione non elastica **NO!!!**



Il blocco **NON** riacquista la sua energia cinetica !!!

Quindi: se in parallelo ad una forza conservativa (per esempio la forza gravitazionale) **è presente anche una forza non conservativa**, per esempio l'attrito dell'aria, **non tutta l'energia cinetica della massa m sarà restituita** .

Se per esempio il pallone nel suo viaggio di andata e ritorno in verticale è soggetto all'**attrito** dell'aria, il pallone tornerà al punto di partenza con **meno energia cinetica** di quanto ne possedeva alla partenza.

Possiamo definire le forze conservative in base al lavoro L da esse eseguito su un ciclo

Se **non vi è variazione di energia cinetica** di una massa m alla fine di un certo percorso, il **lavoro** fatto su di esso lungo lo stesso percorso è **nullo**. Ciò deriva dal teorema lavoro-energia

$$L = \Delta K = 0$$

Nel caso del pallone lanciato in verticale, il **lavoro negativo** fatto sulla massa m dalla forza di gravità durante la **fase di salita** (in cui la massa m **perde energia cinetica**), è **uguale ma di segno opposto** al lavoro **positivo** eseguito sulla massa m nella fase di discesa, in cui la massa **riacquista** la sua energia cinetica.

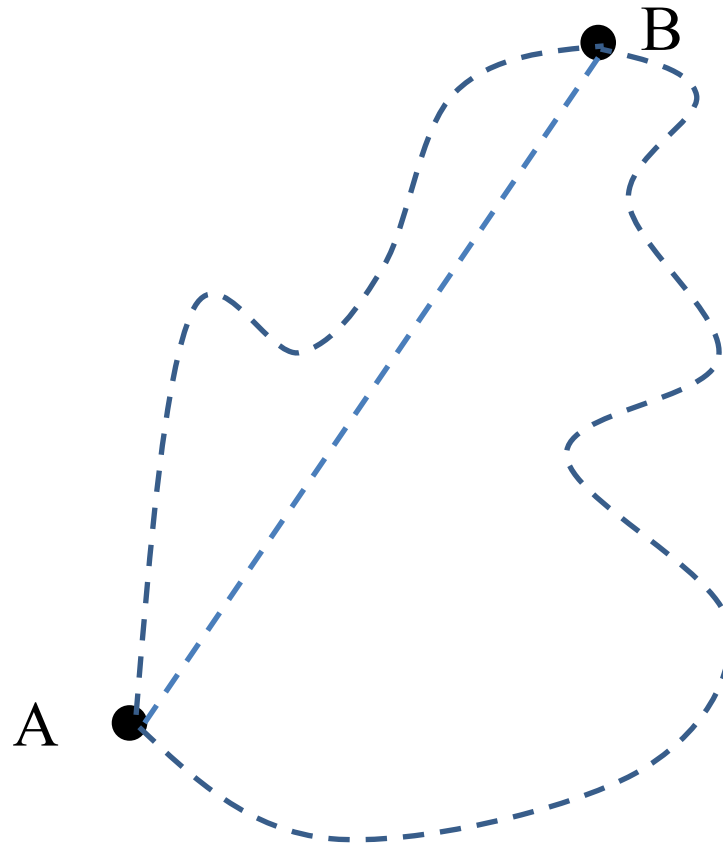
Quindi: il lavoro fatto dalla forza di gravità in un ciclo completo è nullo.

Più in generale:

**una forza si dice conservativa se il lavoro fatto su una massa m
in un ciclo completo (cioè un ciclo chiuso) è nullo**

Nel caso delle forze d'attrito, queste si **oppongono** al moto della massa m **sia in salita che in discesa**, rendendo **negativo il lavoro totale** fatto in un **ciclo completo**, con una **perdita netta di energia cinetica** da parte della massa m . Queste infatti sono forze **non** conservative

Una conseguenza interessante è che dati due punti **A** e **B**, il lavoro fatto da una data forza conservativa F nel muovere una massa m da **A** a **B** è indipendente dal percorso effettuato.



Questo è proprio una conseguenza del fatto che il lavoro eseguito da una forza conservativa su una massa m in un ciclo completo (cioè un ciclo chiuso) è nullo. Consideriamo per esempio il lavoro fatto dalla forza di gravità per spostare una massa m da **B** ad **A** lungo il percorso **B-C-A**

Il lavoro risulta essere:

$$L_{BCA} = mgh \text{ poiché } L_{BCA} = L_{BC} + L_{CA} = (F_{\text{grav}})(-h) + 0 = (-mg)(-h) = mgh$$

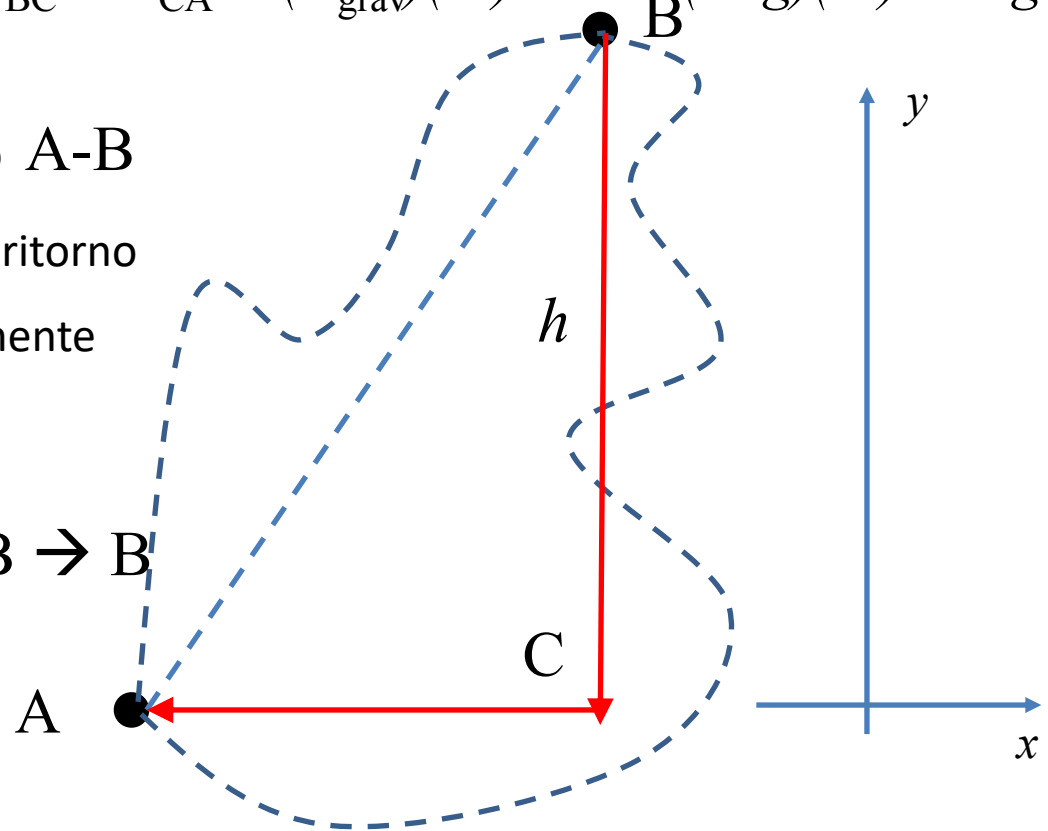
Il lavoro fatto per chiudere il tratto **A-B**

lungo uno qualsiasi dei percorsi di ritorno indicati, dovrà essere necessariamente

$$L = -mgh$$

Questo in quanto su ciclo **chiuso** $B \rightarrow B$

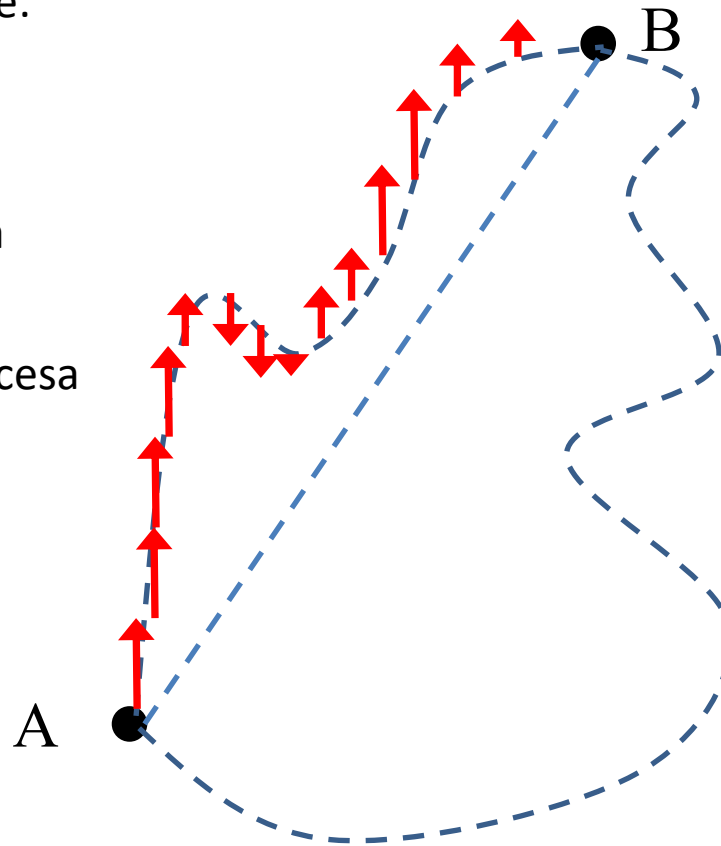
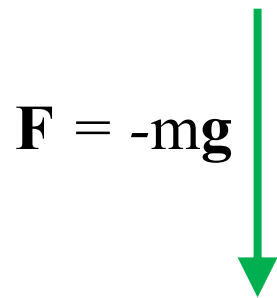
deve risultare $L = 0$



In sostanza, ciò che risulta rilevante ai fini del computo del lavoro L effettuato da una forza conservativa \mathbf{F} nel muovere una massa da A a B è la **sola componente** del segmento $A-B$ lungo la direzione della forza \mathbf{F} . In particolare, nel caso in cui la forza sia quella di gravità, le componenti rilevanti sono quelle dei segmenti verticali infinitesimi Δh lungo la direzione della forza, la cui **sommatoria** è sempre:

$$\sum \Delta h = h \quad \text{per il percorso in salita}$$

$$\sum \Delta h = -h \quad \text{per il percorso in discesa}$$



In sostanza, quando la massa m si muove dalla **quota A** alla **quota B**, il lavoro fatto dalla forza in questione è **negativo** (si deve fare lavoro **contro** la forza di gravita: il pallone lo fa a **scapito della sua energia cinetica**)



_____ B

_____ A

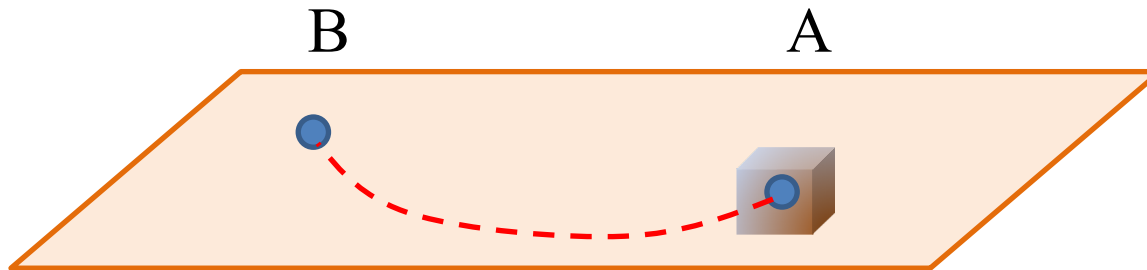
Quando invece la massa m si muove dalla **quota B** alla **quota A**, il lavoro fatto dalla forza in questione è **positivo** (il pallone **riacquista la sua energia cinetica**)



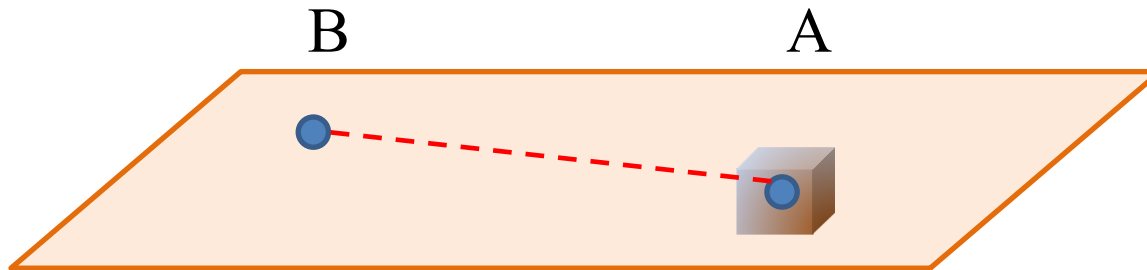
_____ B

_____ A

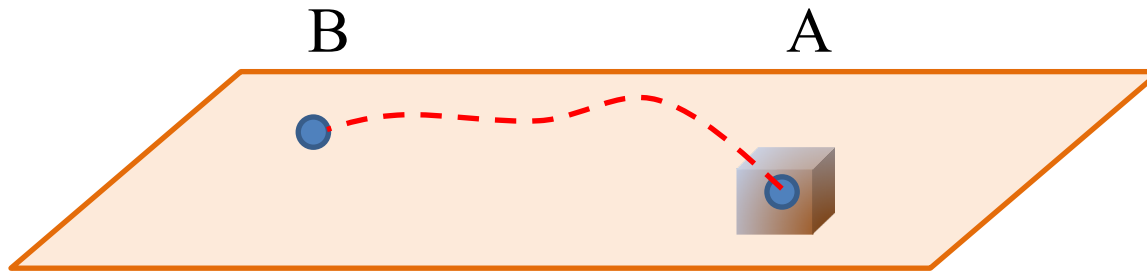
Al contrario, nel caso di forze **NON** conservative, per esempio le **forze d'attrito**, il lavoro fatto dalla forza in questione **dipende** dal percorso seguito per spostarsi fra il punto iniziale e il punto finale e in generale il lavoro lungo un ciclo chiuso **NON** è nullo. Supponiamo per esempio un corpo che si muove su un tavolo, dotato di attrito, da un punto **A** ad un punto **B** seguendo di volta in volta percorsi differenti:



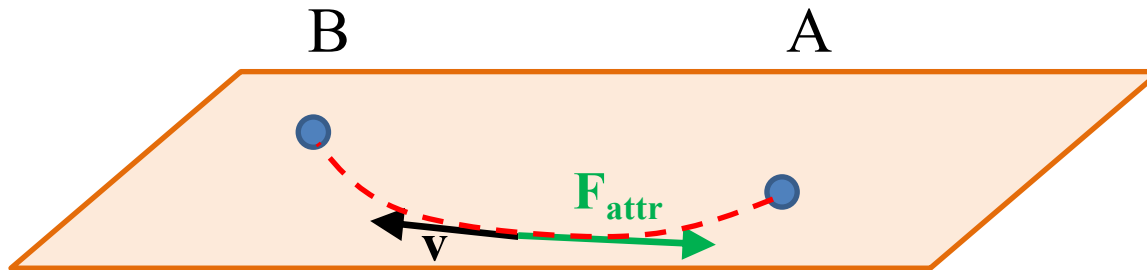
Al contrario, nel caso di forze **NON** conservative, per esempio le **forze d'attrito**, il lavoro fatto dalla forza in questione **dipende** dal percorso seguito per spostarsi fra il punto iniziale e il punto finale e in generale il lavoro lungo un ciclo chiuso **NON** è nullo. Supponiamo per esempio un corpo che si muove su un tavolo, dotato di attrito, da un punto **A** ad un punto **B** seguendo di volta in volta percorsi differenti:



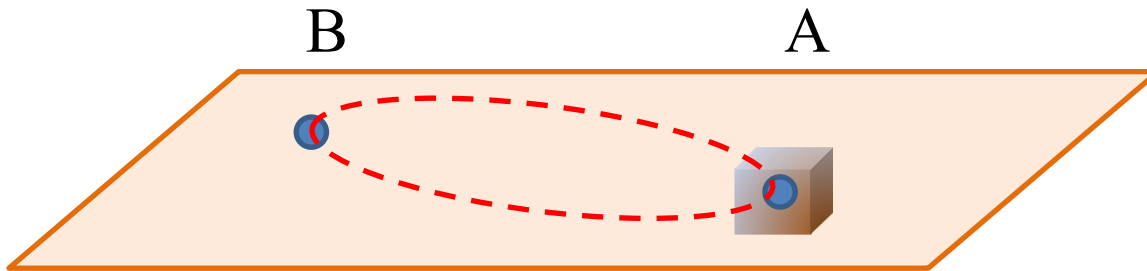
Al contrario, nel caso di forze **NON** conservative, per esempio le **forze d'attrito**, il lavoro fatto dalla forza in questione **dipende** dal percorso seguito per spostarsi fra il punto iniziale e il punto finale e in generale il lavoro lungo un ciclo chiuso **NON** è nullo. Supponiamo per esempio un corpo che si muove su un tavolo, dotato di attrito, da un punto **A** ad un punto **B** seguendo di volta in volta percorsi differenti:



In **qualsiasi direzione** si stia muovendo ad ogni istante il corpo in questione, la forza di attrito **si oppone** sempre al suo moto, quindi effettua sempre un lavoro negativo a scapito dell'energia cinetica del corpo.



E quindi anche **lungo un ciclo chiuso**, il lavoro **NON risulta nullo**, ma **negativo**, con una **perdita netta** di energia cinetica



Possiamo adottare indifferentemente le due definizioni seguenti di forze conservative, che sono una la conseguenza dell'altra.

1a) Una forza si dice conservativa se il lavoro da essa eseguito nello spostare un corpo da un punto ad un altro dipende solo dalla posizione dei due punti e non dal percorso seguito.

2a) Una forza si dice conservativa se il lavoro da essa eseguito nello spostare un corpo lungo un percorso chiuso risulta nullo.

Energia potenziale

Abbiamo visto che il lavoro fatto da una forza conservativa su di una particella **dipende soltanto** dal punto di partenza e da punto di arrivo.

Ne consegue che una tale forza può **dipendere solo dalla posizione** della particella, e non per esempio dal tempo, o dalla velocità della particella.

Per esempio se la forza **dipendesse dal tempo**, adottando fra i due punti **A** e **B** un percorso che ci fa impiegare più tempo, il lavoro risulterebbe **differente** rispetto a quello risultante per un percorso che ci fa impiegare meno tempo. Il che abbiamo visto che non è il caso.

Consideriamo il caso di un percorso rettilineo di una massa m . Il lavoro fatto dalla risultante F delle forze applicate alla massa in questione è uguale alla variazione di energia cinetica della massa m

$$L = \int_{x_0}^x F(x) dx = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

Nel caso di un moto unidimensionale, tutte le forze che dipendono solo dalla posizione sono conservative. Se F dipende solo da x , l'energia cinetica del corpo dipende anche essa solo da x . Può essere diversa in posizioni differenti dell'asse x ma è sempre la stessa in un dato punto. L'esempio della palla lanciata verticalmente in alto o di una massa che incide su una molla illustrano questo caso.

In queste condizioni stabiliremo che ogni variazione dell'energia di movimento, l'energia cinetica, lungo il percorso, è associata ad una variazione di segno opposto dell'energia di posizione, l'energia potenziale.

Rappresentando con U l'energia potenziale, questo enunciato risulta espresso dalla formula

$$\Delta K = -\Delta U$$

In base al teorema lavoro-energia che abbiamo appena riscritto, la variazione di energia cinetica vale:

$$\Delta K = \int_{x_0}^x F(x) dx$$

da cui ne segue che:

$$\Delta U = - \int_{x_0}^x F(x) dx$$

Questa quantità ΔU è funzione soltanto della posizione

Notiamo che in generale :

$$\Delta U = - \int_{x_0}^x F(x) dx = \int_x^{x_0} F(x) dx \quad (\text{abbiamo invertito gli estremi di integrazione})$$

Quindi possiamo scrivere:

$$\Delta U = U(x) - U(x_0) = \int_x^{x_0} F(x) dx$$

Cioè: la **variazione** dell'energia potenziale che si osserva posizionandosi in un punto x , rispetto al valore in un punto di riferimento x_0 è il **lavoro fatto dalla forza** quando la particella si muove **dal punto x al punto x_0**

Confrontando la formula appena enunciata:

$$U(x) - U(x_0) = \int_x^{x_0} F(x) dx$$

con la formula del teorema lavoro-energia:

$$\int_{x_0}^x F dx = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2$$

ci rendiamo conto che possiamo riscrivere quest'ultima come segue, semplicemente invertendo di segno ambo i membri dell'equazione

$$- \int_{x_0}^x F dx = \frac{1}{2} mv_0^2 - \frac{1}{2} mv^2$$

Dove il primo membro è uguale a $U(x) - U(x_0)$ (cambiando il segno e invertendo i limiti)

Risulta quindi:

$$U(x) - U(x_0) = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} m v^2$$

cioè:

$$U(x) + \frac{1}{2} m v^2 = U(x_0) + \frac{1}{2} m v_0^2$$

Si noti che in questa equazione compaiono soltanto **posizione** e **velocità**.
Il membro di destra di questa equazione dipende **soltanto** dalla posizione e dalla velocità **iniziali** v_0 e x_0 e la quantità $U + K$ a sinistra si mantiene pertanto **costante** ed **uguale** al valore iniziale in **qualsiasi** punto x durante il moto unidimensionale.
Definiremo **l'energia meccanica** totale la quantità

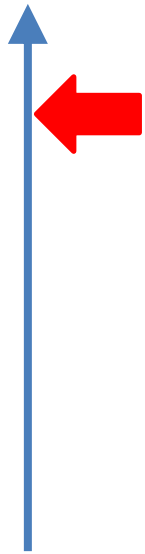
$$E = U + K$$

**L'Energia Meccanica si conserva durante il moto
quando la forza in gioco è conservativa**

In sostanza, abbiamo ricavato la **Legge di Conservazione dell'Energia Meccanica** (cinetica + potenziale):

$$E = U + K$$

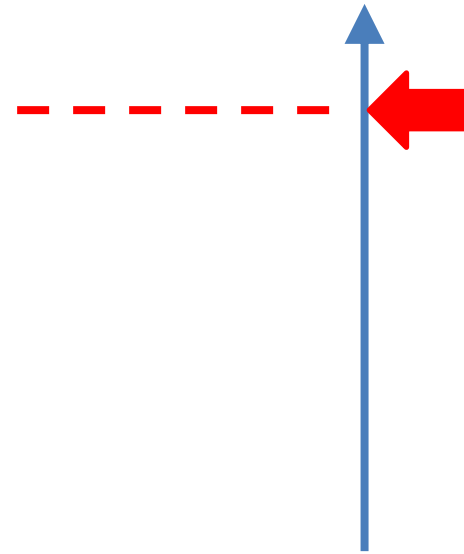
Energia potenziale U



Energia cinetica K



Energia **Meccanica** E



In molti casi, quando le forze in gioco sono conservative, e quando gli effetti di altre forze non conservative sono trascurabili, l'applicazione diretta di questa Legge ci consente di risolvere rapidamente un problema senza necessariamente trattare quantitativamente le forze in questione e senza quindi dovere applicare le Leggi di Newton.

Riscriviamo una delle formule precedenti:

$$\Delta U = - \int_{x_0}^x F(x) dx$$

La relazione fra forza ed energia potenziale può essere anche scritta come segue:

$$F(x) = - dU(x) / dx$$

Infatti sostituendo questa formulazione nella formula precedente si ottiene una identità:

$$\Delta U = \int_{x_0}^x dU$$

Quindi **l'energia potenziale U è una funzione della posizione la cui derivata (cambiata di segno) dà la forza. Cioè a sua volta la forza (cambiata di segno) rappresenta la rapidità «spaziale» con cui cambia l'energia potenziale. Cioè il tasso di variazione di energia potenziale lungo x è rappresentato dalla forza.**

I due esempi classici di sistemi conservativi unidimensionali

Primo caso: forza di gravità

Nel caso della forza di gravità, il moto unidimensionale è verticale. Assumendo l'asse positivo delle y diretto verso l'alto, la forza di gravità risulta diretta secondo il verso negativo delle y . Si ha quindi: $F = -mg = \text{costante}$ (che rappresenta un caso particolare di una forza dipendente dalla posizione).

Per l'energia potenziale potremo scrivere pertanto:

$$U(y) - U(0) = \int_y^0 F dy = \int_y^0 (-mg) dy = mgy$$

Adottando una energia potenziale nulla per $y = 0$, si ha semplicemente:

$$U(y) = mgy$$

Il fatto che l'energia potenziale di una massa m ad una certa altezza dal suolo cresca con l'altezza è certamente coerente con la nostra esperienza quotidiana:

Maggiore è l'altezza h dalla quale lasciamo cadere una massa m , maggiore è la velocità (e quindi l'energia cinetica) con cui arriva al suolo.

Secondo caso: forza di una molla

Consideriamo la forza esercitata da una molla elastica su di una massa m che si muove su di una superficie orizzontale (priva di attrito), e consideriamo il punto $x_0 = 0$ come posizione di equilibrio della molla. La forza F esercitata sulla massa m quando la deformazione è x vale

$$F = -k x \quad \text{dove } k \text{ è la costante elastica della molla}$$

L'energia potenziale è data dalla formula:

$$U(x) - U(0) = \int_x^0 (-kx) dx$$

Se scegliamo $U(0) = 0$, l'energia potenziale, come pure la forza, è nulla nella posizione di riposo della molla e risulta:

$$U(x) = \int_x^0 (-kx) dx = \frac{1}{2} kx^2 \quad (\text{metodo grafico delle aree})$$