

Lezione VIII

(Lavoro forza non costante,
Energia cinetica)

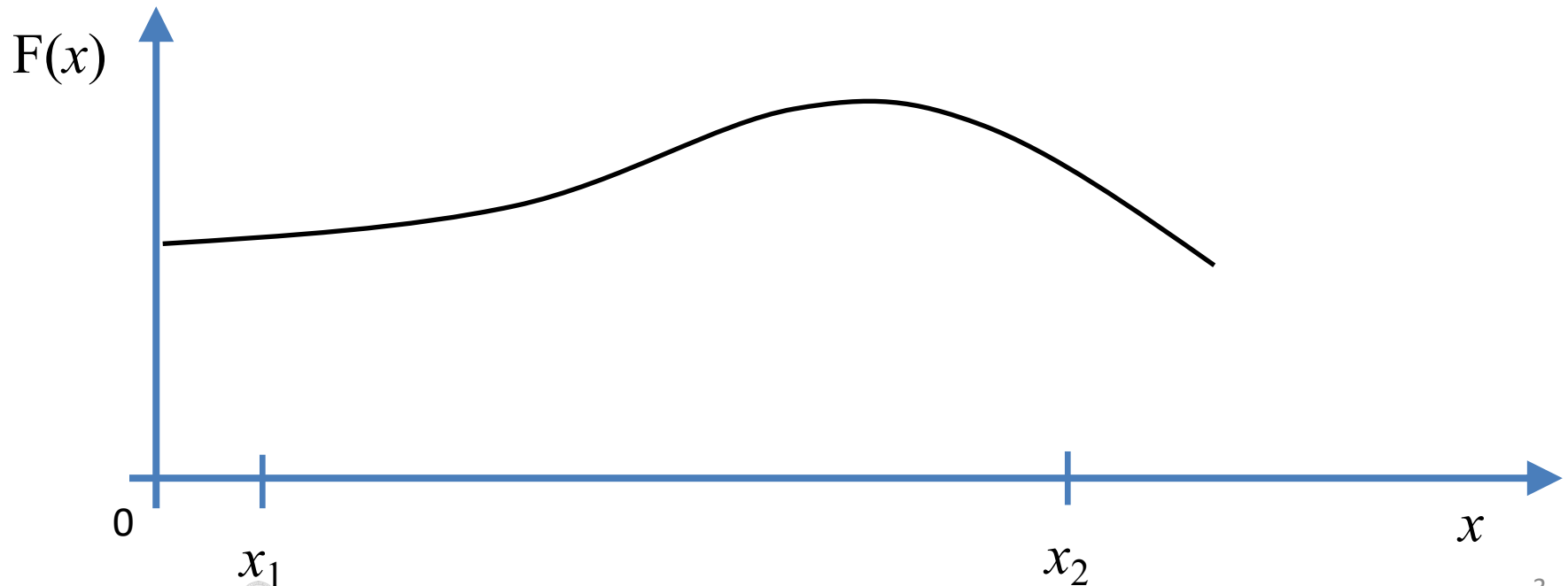


FRUIZIONE E UTILIZZO DEI MATERIALI DIDATTICI

- ➔ **E' vietata** la **copia**, la **rielaborazione**, la **riproduzione** dei contenuti e immagini presenti nelle lezioni in qualsiasi forma
- ➔ **E' inoltre vietata** la **diffusione**, la **redistribuzione** e la **pubblicazione** dei contenuti e immagini, incluse le registrazioni delle videolezioni con qualsiasi modalità e mezzo non autorizzati espressamente dall'autore o da Unica

Lavoro fatto da una forza variabile

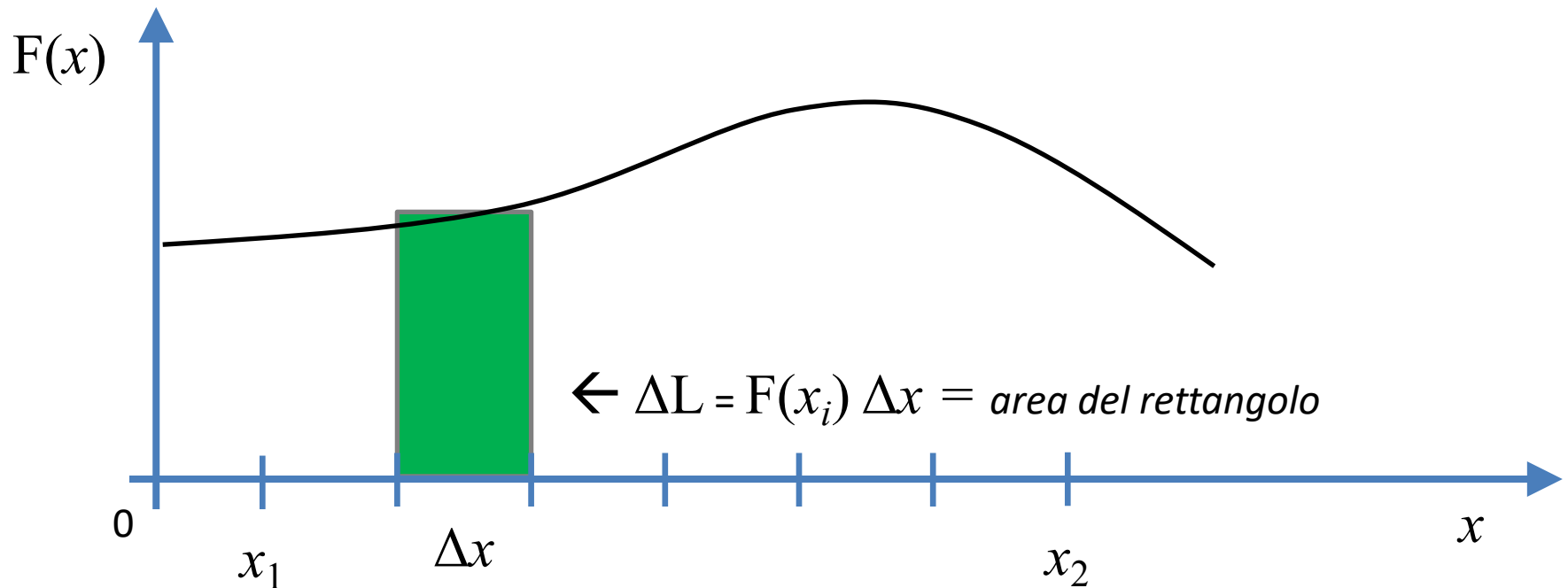
Consideriamo il caso di una forza che **varia soltanto in modulo**, che agisce lungo la **direzione x** , e supponiamo di **conoscere** come varia il modulo F in **funzione di x** . Ci poniamo il quesito di calcolare il lavoro fatto da questa forza variabile quando il punto materiale si sposta da x_1 a x_2 . Supponiamo per esempio di sapere che la funzione $F(x)$ sia come in figura:



Dividiamo lo spostamento totale $x_1 \rightarrow x_2$ in tanti piccoli intervalli consecutivi Δx .

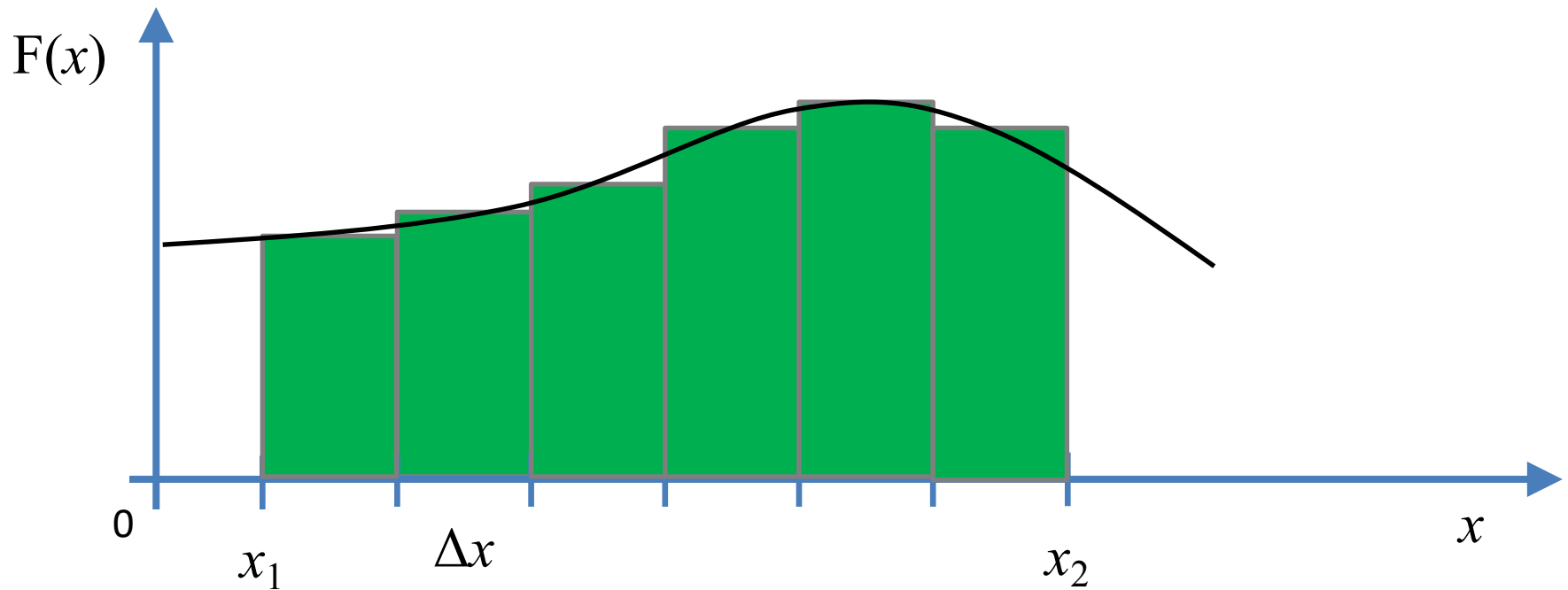
Il lavoro fatto dalla forza F nello spostare il punto materiale da x_i a $x_i + \Delta x$, assumendo che la forza sia costante nell'intervallo in questione, sarà dato da

$$\Delta L = F(x_i) \Delta x$$



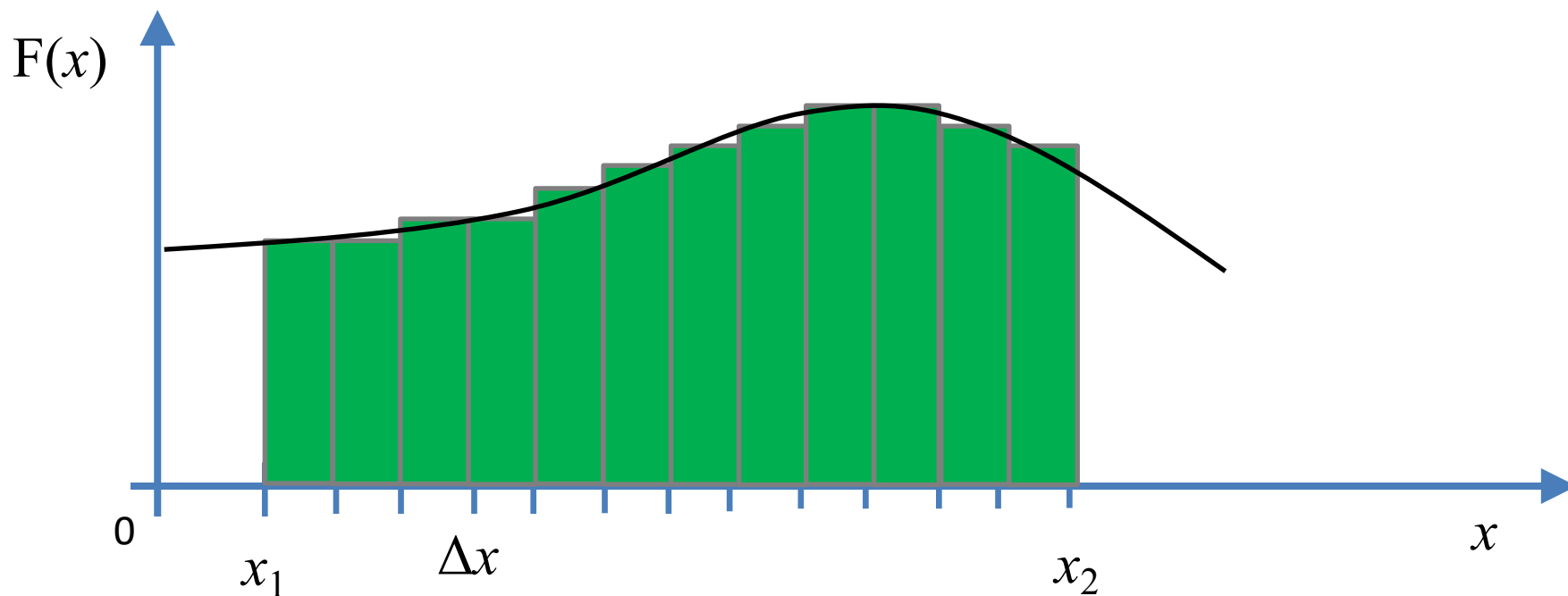
Il lavoro **totale** fatto forza F nello spostare il punto materiale da x_1 a x_2 ,
sarà dato **approssimativamente** dalla somma di un numero di termini come di seguito:

$$L_{12} \approx \sum F(x_i) \Delta x$$



Per migliorare la nostra approssimazione, possiamo suddividere in intervalli Δx sempre più **piccoli**.

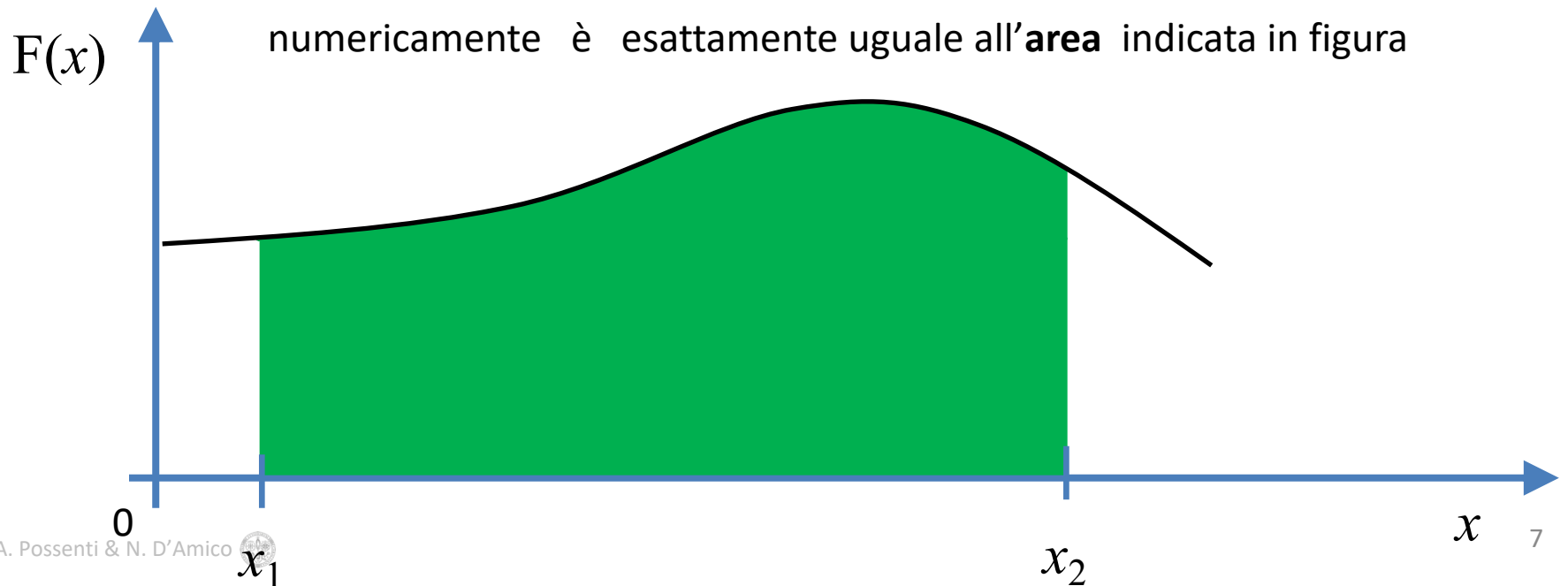
$$L_{12} \approx \sum F(x_i)\Delta x$$



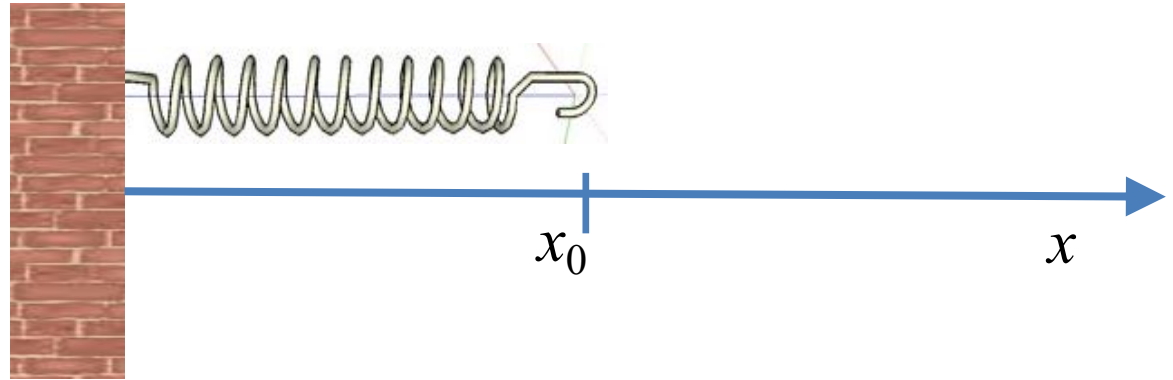
Otterremo un risultato **esatto** per il lavoro fatto dalla forza $F(x)$ nello spostare il punto da x_1 a x_2 , attraverso un processo al limite:

$$L_{12} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum F(x_i) \Delta x = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$$

Questa relazione definisce l'**integrale** di F rispetto a x da x_1 a x_2 e numericamente è esattamente uguale all'**area** indicata in figura



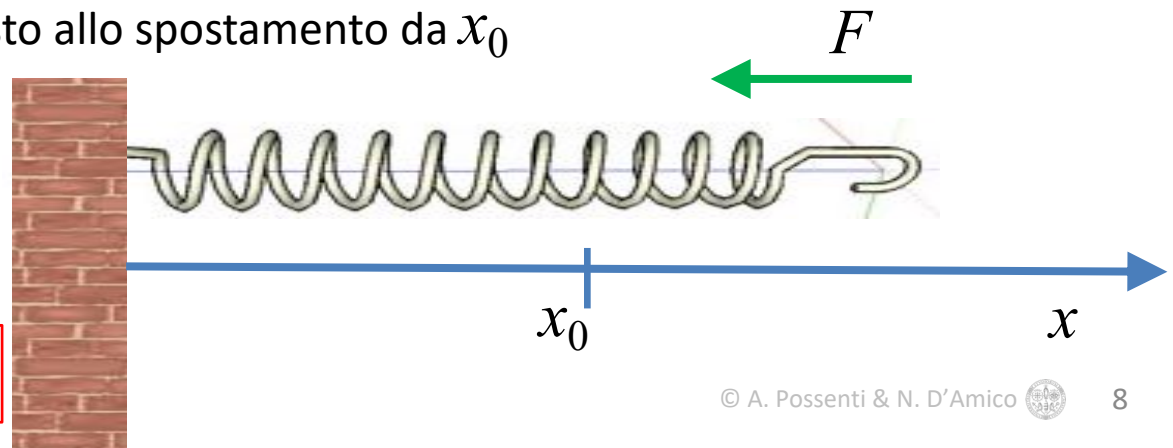
Supponiamo di avere una molla attaccata ad una parete, e supponiamo che nel suo stato di equilibrio l'estremità della molla sia posizionata alla coordinata x_0



La forza esercitata dalla molla quando è stata allungata fino ad un certo valore x dalla sua posizione di equilibrio x_0 , è data dalla cosiddetta **Legge di Hooke**:

$$F = -k(x - x_0)$$

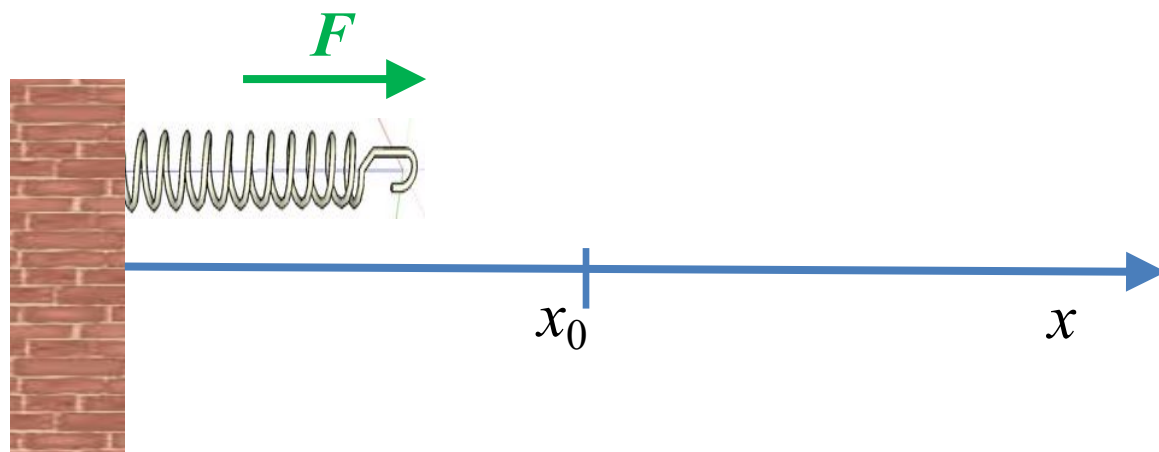
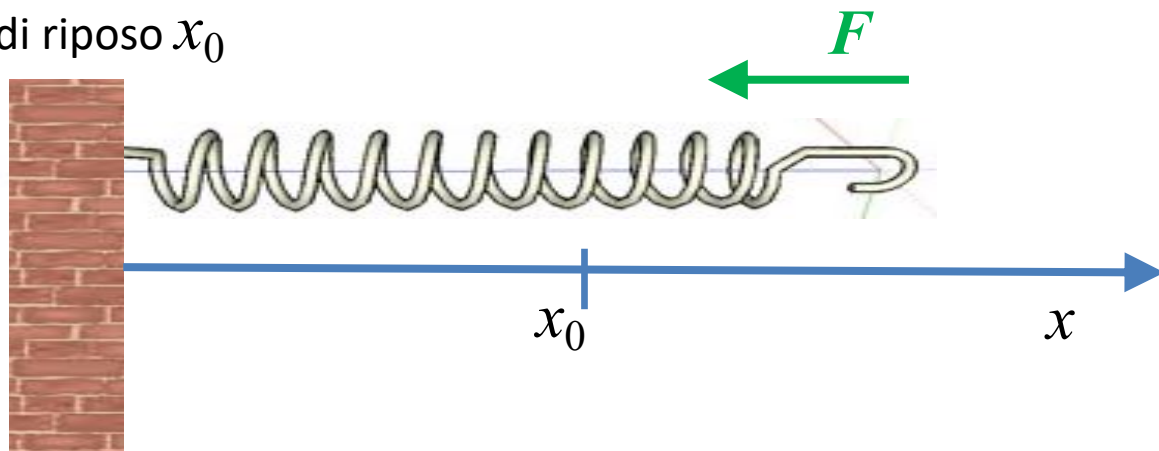
e il suo verso è sempre opposto allo spostamento da x_0



k = costante elastica della molla

Quando la molla è allungata $x > x_0$; quando la molla è compressa $x < x_0$

La forza \mathbf{F} è sempre diretta verso x_0 , e quindi cambia segno quando il suo estremo passa per la posizione di riposo x_0



Possiamo assumere $x_0 = 0$ e la formula diviene semplicemente $\mathbf{F} = -k x$

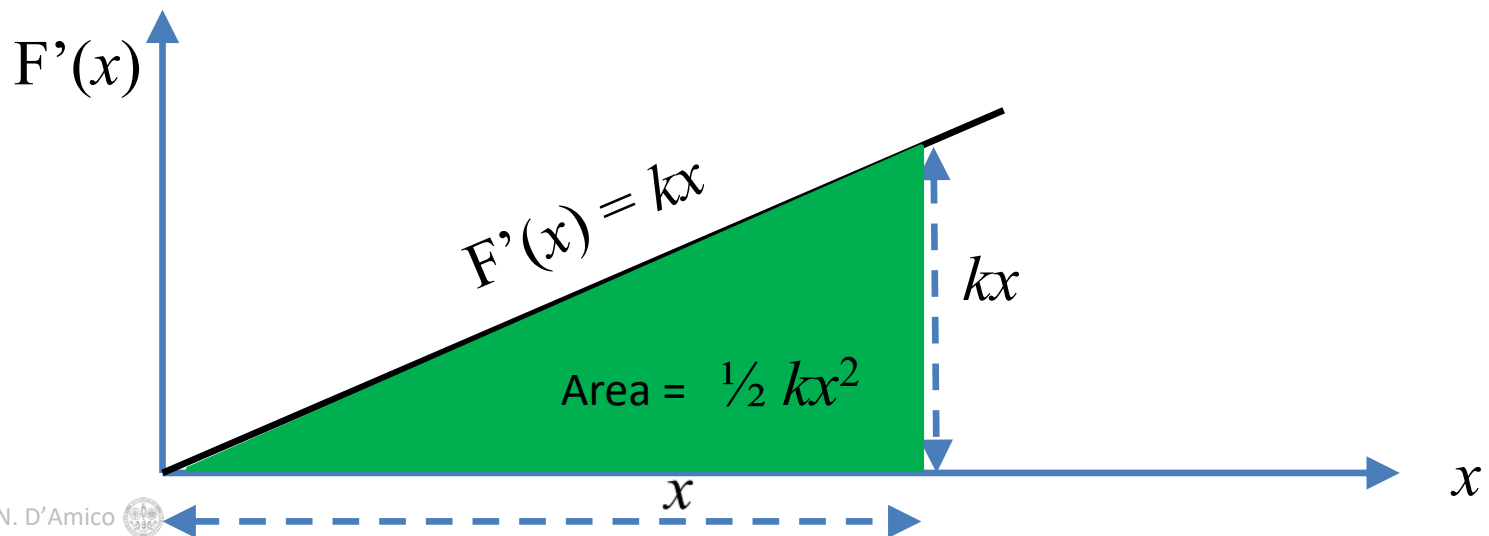
Per deformare la molla, è sufficiente applicare alla molla una forza F' esattamente eguale e contraria alla forza F esercitata dalla molla

su di noi. La forza che applicheremo sarà quindi: $F' = kx$.

Il lavoro fatto da questa forza F' per allungare la molla da 0 a x è:

$$L = \int_0^x kx dx = \frac{1}{2} kx^2$$

Come calcolare un integrale così semplice, in modo grafico: (l'integrale è l'area....)

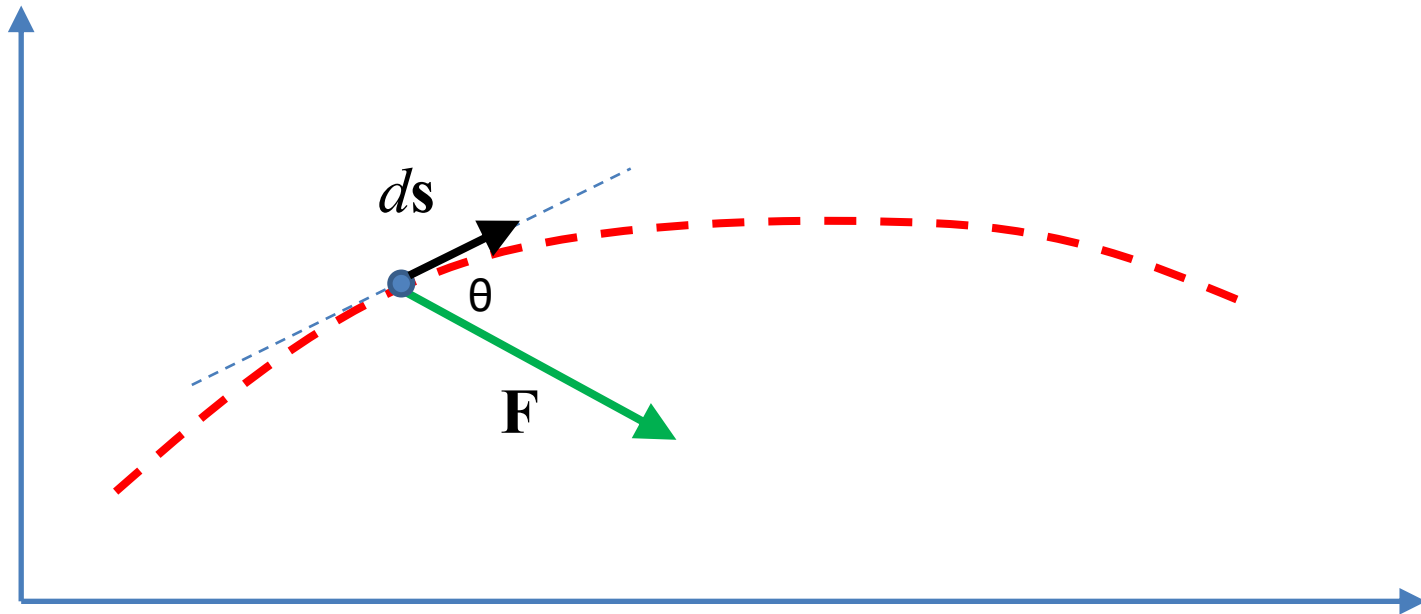


Il caso che abbiamo trattato è molto semplice, infatti abbiamo preso in esame:

- a) uno spostamento che avviene lungo un asse x
- b) una forza F che varia solo in modulo, ma ha sempre direzione lungo lo stesso asse x

Conosciamo la dipendenza di F dallo spostamento, cioè conosciamo $F(x)$

Più in generale la forza \mathbf{F} può variare sia in direzione che in modulo, e la particella su cui questa forza è applicata può muoversi lungo un cammino curvilineo. Per calcolare il lavoro in questo caso generale, dobbiamo conoscere l'angolo θ fra la forza \mathbf{F} in un dato punto della traiettoria e lo **spostamento** infinitesimo $d\mathbf{s}$ in quello stesso punto.



In questo caso dovremmo integrare la seguente:

$$dL = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F \cos \theta ds$$

Potenza

Fin qui **non** abbiamo considerato il **tempo** impiegato per compiere un dato lavoro.

E in base alla definizione di lavoro, non c'è dubbio che per spostare un corpo ad una data altezza, compiamo lo stesso lavoro L , qualsiasi tempo t ci impieghiamo.

Non c'è dubbio, tuttavia, che il tempo impiegato per compiere un dato lavoro, o meglio la rapidità con cui viene compiuto, può essere rilevante in alcune applicazioni. Rifacendoci al concetto di derivata che abbiamo già introdotto in diverse occasioni, definiremo la **potenza**

P come la rapidità con cui il lavoro L è compiuto, quindi:

$$P = dL / dt \quad (\text{potenza istantanea})$$

$$\langle P \rangle = \Delta L / \Delta t \quad (\text{potenza media})$$

Ovviamente, se la potenza è costante nel tempo: $L = P \Delta t$

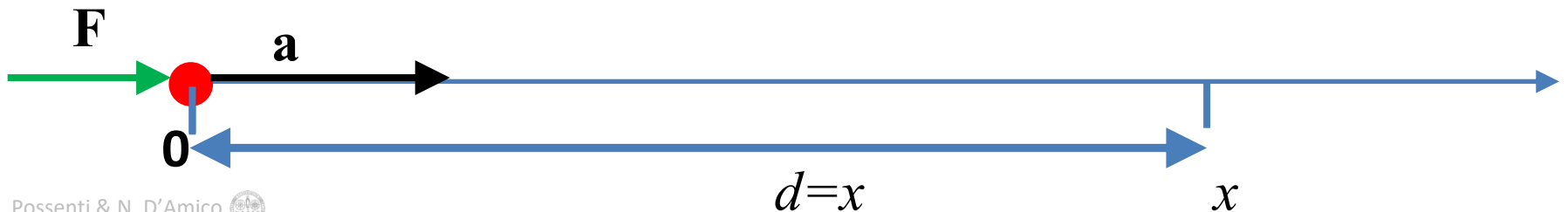
Avendo adottato nel sistema **SI** il joule come unità di misura del lavoro, l'unità di misura della potenza sarà **1 joule / 1 s** denominato **Watt**

Energia cinetica

Supponiamo il caso in cui la risultante \mathbf{F} delle forze applicate ad una massa m sia costante (in termini vettoriali cioè sia in modulo che in direzione e verso). Come sappiamo, una forza costante imprime alla massa in questione una accelerazione costante \mathbf{a} , data dalla II Legge di Newton:

$$\mathbf{a} = \mathbf{F} / m$$

Scegliamo come sistema di riferimento l'asse delle x coincidente con la direzione comune della forza \mathbf{F} e dell'accelerazione \mathbf{a} , e calcoliamo il lavoro fatto dalla forza \mathbf{F} nello spostare la massa m di una quantità x .



Il prodotto scalare fra i due vettori \mathbf{F} e \mathbf{d} , $L = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}$, in questo caso si riduce ad una semplice moltiplicazione: $F x$. Stiamo parlando di un moto uniformemente accelerato

(\mathbf{a} = costante, in senso vettoriale, quindi in modulo, direzione e verso), e quindi rettilineo.

La forza, l'accelerazione e lo spostamento hanno quindi la stessa direzione.

Il prodotto scalare $\mathbf{F} \cdot \mathbf{d}$ si riduce al prodotto dei moduli dei due vettori.

$$L = F x$$

Essendo \mathbf{a} = costante, dalle equazioni del moto definite in cinematica sia ha:

$$v = v_0 + a t \quad \rightarrow \quad a = (v - v_0) / t$$

$$x = \langle v \rangle t \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{2} (v + v_0) t$$

Dove V_0 è la velocità della particella a $t = 0$ e V è a sua velocità all'istante t

Il lavoro $L = F x$ è quindi dato da:

$$\begin{aligned} L = F x = m a x &= [m (v - v_0) / t] [\frac{1}{2} (v + v_0) t] = \\ &= \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 \quad (\text{ricordate i «prodotti notevoli» ?}) \end{aligned}$$

Definiamo questa quantità l' **Energia Cinetica** (energia di movimento) della massa m
e la indicheremo col simbolo K

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

Quindi: $L = K - K_0$

**Il lavoro fatto da una forza su una particella è uguale alla
sua variazione di Energia Cinetica**

Si dimostra che anche nel caso in cui **la forza non solo varia in modulo, ma varia anche in direzione**, in ogni caso risulta sempre che il lavoro fatto dalla risultante delle forze su una particella è eguale alla sua variazione di energia cinetica :

Teorema Lavoro-Energia o Teorema dell'Energia Cinetica

$$**L** \text{ (lavoro della forza risultante)} = **K - K_0 = \Delta K**$$

Il caso del moto circolare uniforme

Non dobbiamo dimenticare che il lavoro è il **prodotto scalare** della **forza** per lo **spostamento**. Ciò che è rilevante pertanto è la componente della forza nella **direzione dello spostamento**. In tutti i casi in cui la forza applicata risulta ortogonale allo spostamento, risulta evidente che $L = 0$. Per esempio nel moto circolare uniforme, la forza centripeta, istante per istante, è **ortogonale** allo spostamento e pertanto tale forza **NON** compie lavoro sulla massa m in questione.

In generale, **una forza che determina una variazione della sola direzione della velocità, ma non del suo modulo, NON compie lavoro**. Infatti, se una forza avesse una componente nella direzione del moto (così da avere $L \neq 0$), allora determinerebbe anche una variazione del modulo della velocità.