

Lezione VII

(Integrali per moti vari,
Dinamica moto circolare
Forze d'attrito, esercizi,
Lavoro)



FRUIZIONE E UTILIZZO DEI MATERIALI DIDATTICI

- ➔ **E' vietata** la **copia**, la **rielaborazione**, la **riproduzione** dei contenuti e immagini presenti nelle lezioni in qualsiasi forma
- ➔ **E' inoltre vietata** la **diffusione**, la **redistribuzione** e la **pubblicazione** dei contenuti e immagini, incluse le registrazioni delle videolezioni con qualsiasi modalità e mezzo non autorizzati espressamente dall'autore o da Unica

Ricapitoliamo:

Abbiamo introdotto la dinamica dicendo che in sostanza, il problema della dinamica di un corpo (per semplicità un punto materiale) è determinare **come si muove** la particella, **note** le **cause** che agiscono su di essa. Quindi per esempio nel caso di un moto unidimensionale lungo l'asse x , determinare la funzione $x(t)$ in funzione delle **cause** che agiscono sulla particella. Abbiamo quindi definito queste **cause**: le forze che agiscono sulla particella, o più in generale **la risultante \mathbf{F} delle forze \mathbf{F}_i che agiscono sulla particella**. E abbiamo definito tre importanti Leggi: le Leggi di Newton

La I Legge di Newton:

Ogni corpo persiste nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme finché forze esterne ad esso non lo costringano a mutare questo stato.

La II Legge di Newton:

L'accelerazione di un corpo è direttamente proporzionale e nella stessa direzione della forza agente su di esso, ed è inversamente proporzionale alla sua massa:

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a}$$

La III Legge di Newton:

Se un corpo A esercita una forza su un corpo B, il corpo B esercita su A una forza uguale e contraria.

Le implicazioni sono **molto** interessanti: infatti già in cinematica abbiamo imparato a determinare $x(t)$ in funzione dell'accelerazione a (per accelerazione costante) e quindi se possiamo scrivere

$$a = F/m$$

siamo immediatamente in grado di determinare $x(t)$ in funzione di F

Quindi per esempio nel caso di un moto unidimensionale (e per accelerazione costante), dalle equazioni della cinematica che già conosciamo:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v(t) = v_0 + a t$$

Ponendo: $a = F/m$

Scriveremo:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} (F/m) t^2$$

$$v(t) = v_0 + (F/m) t$$

Ovviamente, non dimentichiamo che **le equazioni che abbiamo appena scritto** erano state derivate per il **caso $a = \text{costante}$** , e quindi **valgono solo nel caso $F = \text{costante}$**

Nel caso in cui **F non è costante**, lo vedremo più avanti, la derivazione delle equazioni del moto **non è così semplice**.

Ma perché sarebbe così complicato determinare $x(t)$ nel caso in cui \mathbf{F} non è costante ?

Cioè nel caso in cui $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$? Forse in questo caso **NON** vale la II Legge di Newton ?

NO, la II Legge di Newton **vale sempre** e quindi se $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$ risulterà $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{F}(t) / m$$

E allora? visto che possiamo comunque ricavare $\mathbf{a}(t)$ da $\mathbf{F}(t)$, una volta nota $\mathbf{a}(t)$,

possiamo scrivere $v(t) = v_0 + a(t)t$???



NO!

Non dimentichiamo che l'accelerazione è una quantità ricavata dal calcolo **differenziale**:

$$a(t) = dv(t)/dt$$

Se conosciamo $a(t)$ e vogliamo ricavare $v(t)$, possiamo certamente scrivere

$$dv(t) = a(t) dt$$

Il che, se $a(t) = \text{costante}$ implica che ad ogni intervallo di tempo infinitesimo dt si osserva lo stesso incremento infinitesimo di velocità $dv = a dt$ e quindi in un generico intervallo finito di tempo Δt si osserverà $\Delta v = a \Delta t$ che altro non è che la nota equazione del moto: $v(t) = v_0 + at$

Ma questo risultato è valido solo se $a = \text{costante}$!!!

Se invece a non è costante, per esempio nel caso generale che abbiamo immaginato in cui la forza F varia nel tempo, e quindi di conseguenza abbiamo una dipendenza di a dal tempo

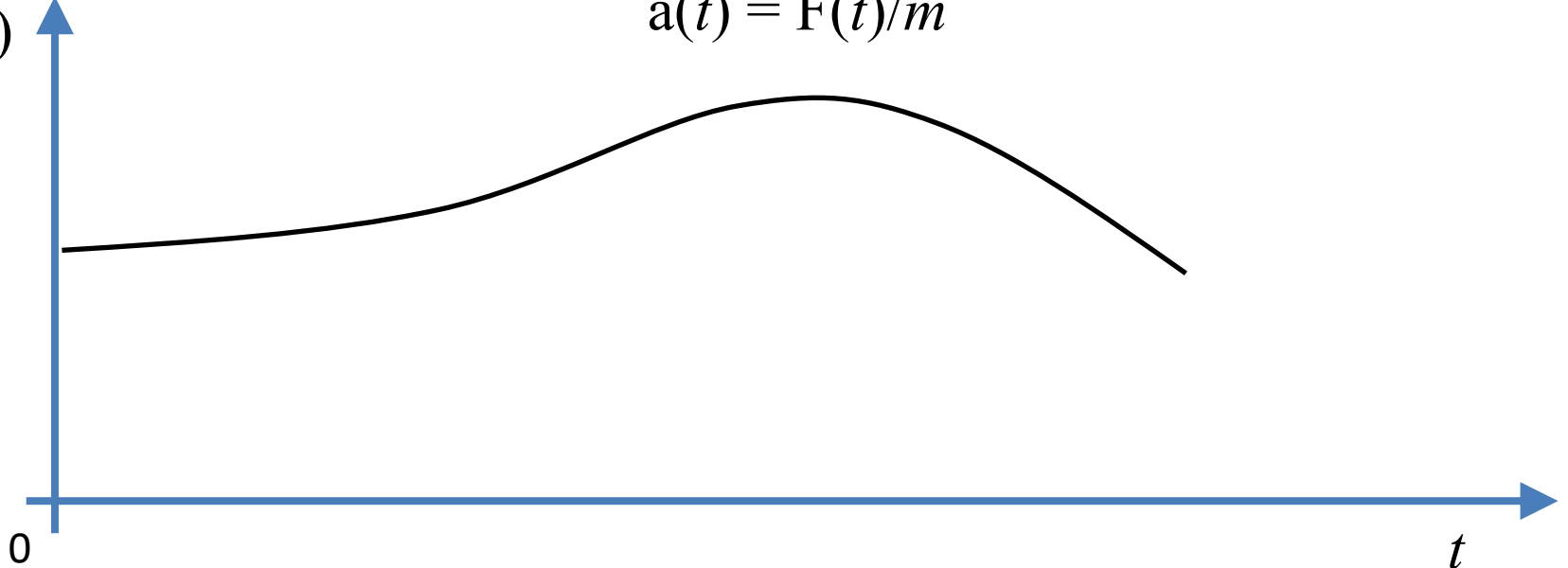
$$a(t) = F(t) / m$$

come si fa a ricavare $v(t)$?

Per esempio:

$a(t)$

$$a(t) = F(t) / m$$

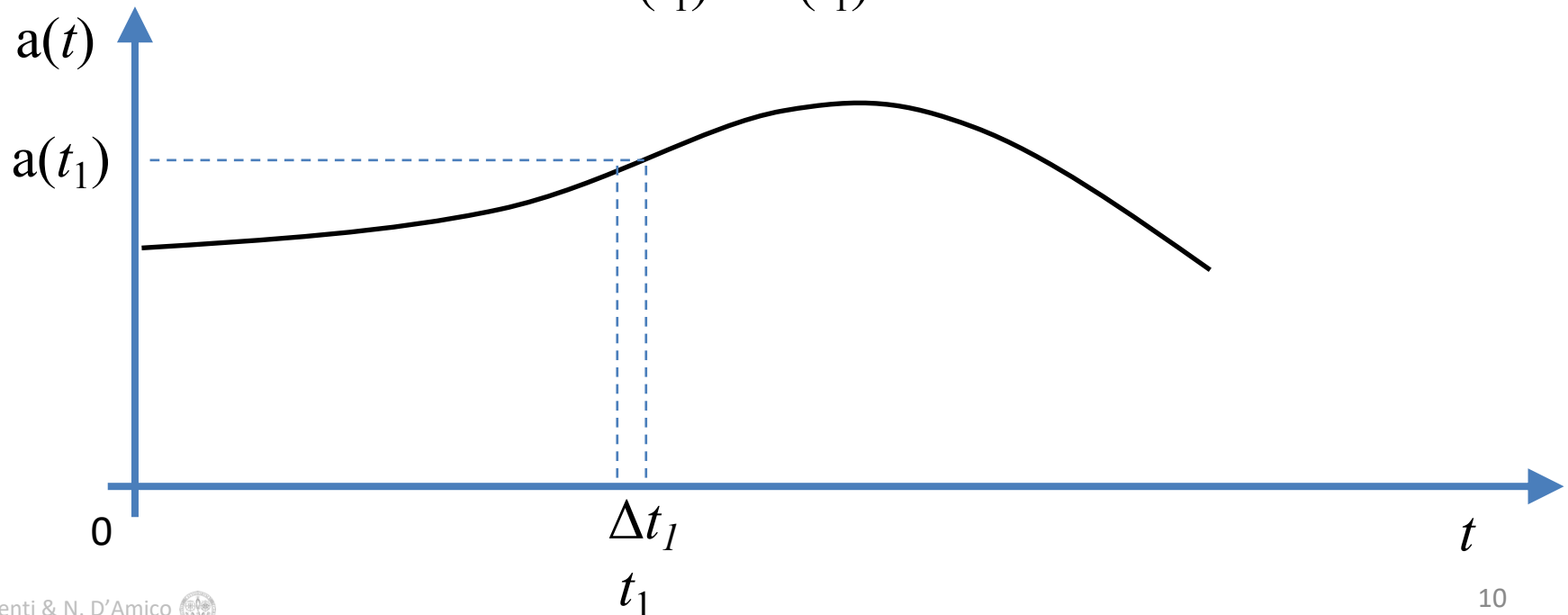


Riconsideriamo la formula:

$$dv(t) = a(t) dt$$

Questa è una formula **differenziale**, ma certamente è applicabile con buona approssimazione nel caso di intervalli di tempo Δt abbastanza piccoli, e in cui si adotta per $a(t)$ un valore costante pari al suo valore medio al tempo t_1 nell'intorno dell'intervallo di tempo in questione. Potremo certamente scrivere che con buona approssimazione:

$$\Delta v(t_1) = a(t_1) \Delta t$$



E in generale, per **ogni intervallo relativamente piccolo** Δt nell'intorno di un istante t_i in cui

l'accelerazione media vale $a(t_i)$, potremo scrivere

$$\Delta v(t_1) = a(t_1) \Delta t = v_1 - v_0$$

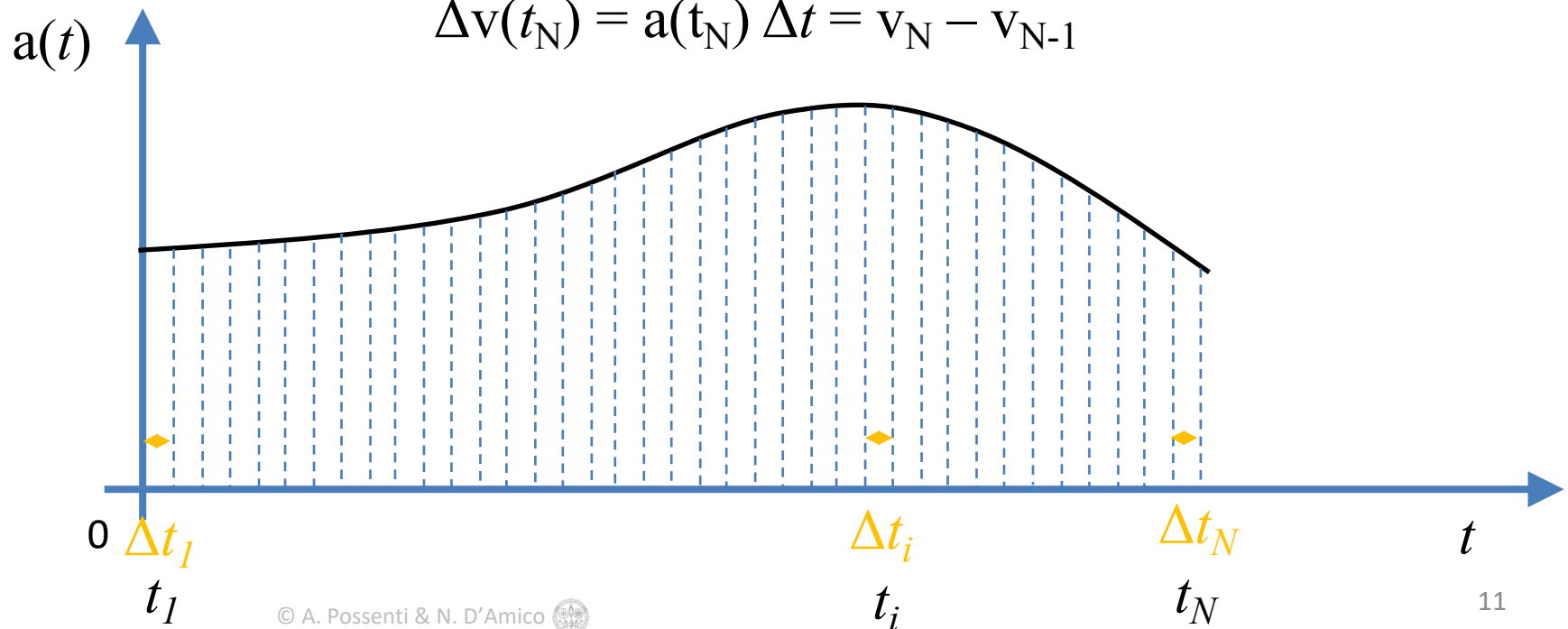
$$\Delta v(t_2) = a(t_2) \Delta t = v_2 - v_1$$

.....

$$\Delta v(t_i) = a(t_i) \Delta t = v_i - v_{i-1}$$

.....

$$\Delta v(t_N) = a(t_N) \Delta t = v_N - v_{N-1}$$



Quindi, dato un valore iniziale della velocità v_0 all'istante $t_0=0$, il valore di velocità ad un istante successivo di tempo t_N tale che:

$$t_N - t_0 = \sum_{i=0}^N \Delta t_i$$

sarà dato dalla relazione:

$$v = v_0 + \sum_{i=0}^N a(t_i) \Delta t$$

Questa formula, nel caso di intervalli di tempo infinitesimi, e cioè per $\Delta t \rightarrow 0$

si chiama **integrale di $a(t)$ rispetto al tempo t** ed è definito come segue:

$$v = v_0 + \int_{t=0}^t a(t) dt$$

E' facile rendersi conto che la sommatoria:

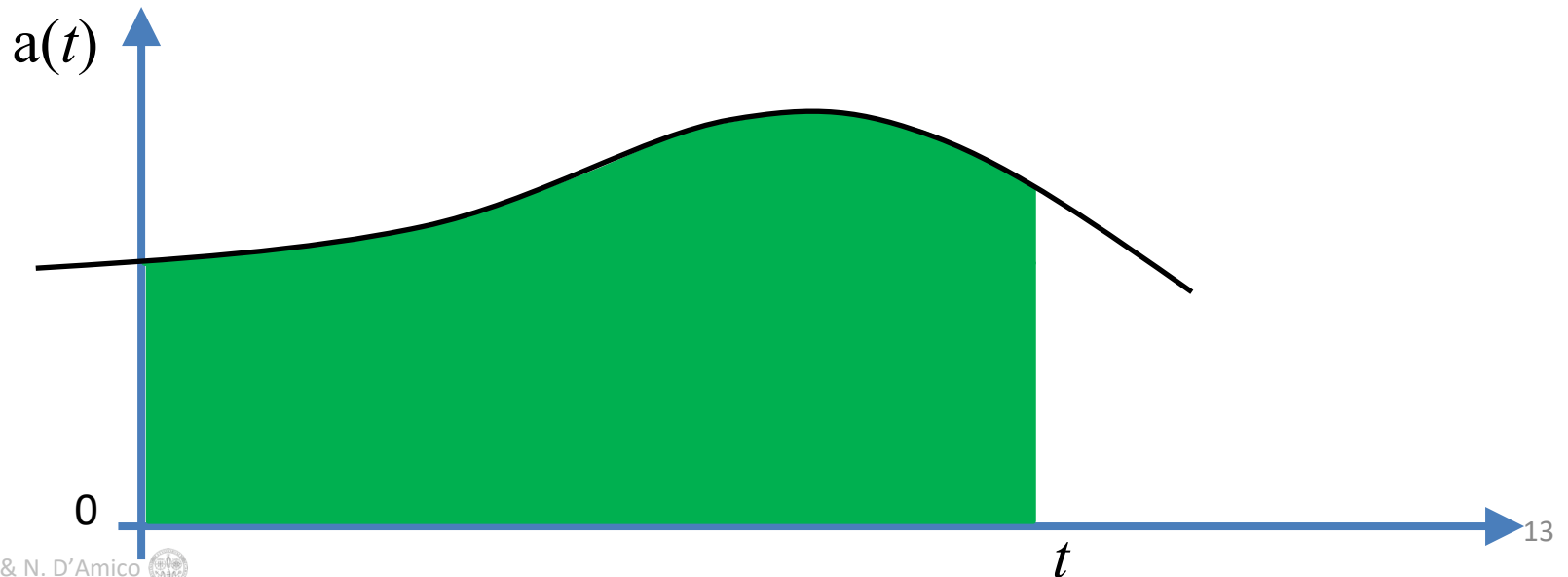
$$v = v_0 + \sum a(t_i) \Delta t_i$$

e di conseguenza anche l'integrale

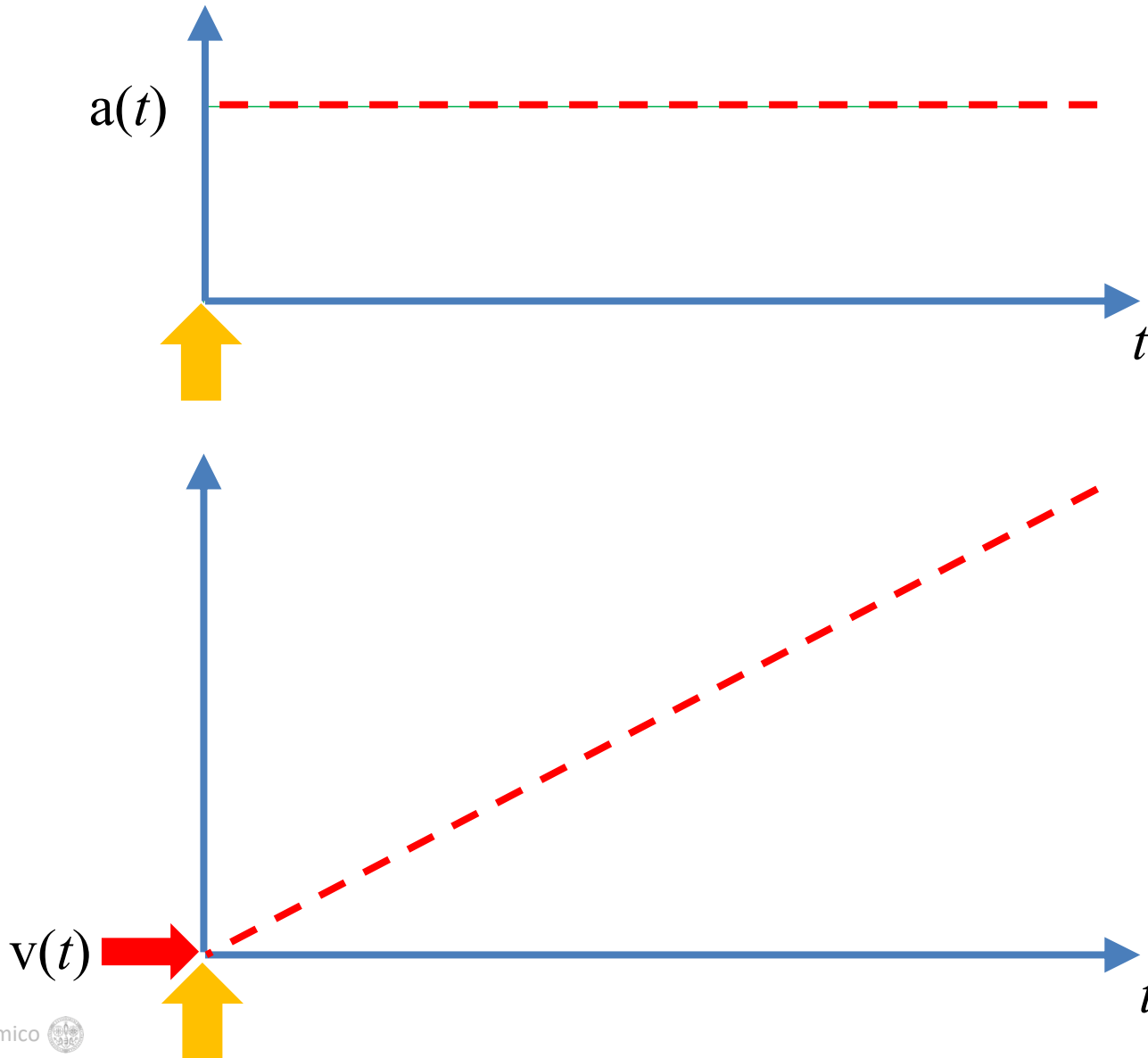
$$v = v_0 + \int a(t) dt$$

corrispondono all'area delimitata dalla curva $a(t)$ e l'asse t nell'intervallo $[0;t]$

preso in esame

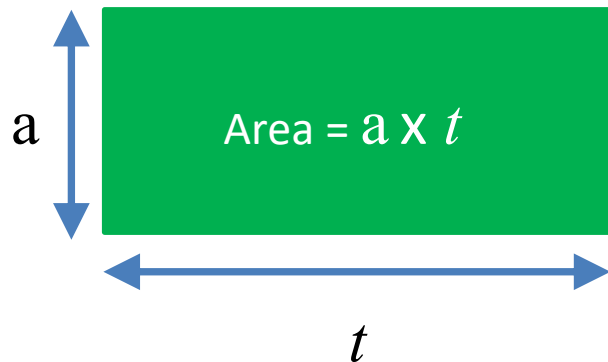


Quindi per esempio, nel caso di $a = \text{costante}$, si osserva in **funzione del tempo** una cosa del genere:



Quindi: la formula che abbiamo scritto in cinematica per il caso semplice $a = \text{costante}$, è soltanto il **caso particolare** di una **relazione più generale in cui la velocità è (istante per istante) l'area (l'integrale) definita dalla curva nel piano $a(t)$ vs t**

Nel caso particolare di un moto uniformemente accelerato, cioè $a = \text{costante}$, la velocità cresce linearmente, ma è sempre data (istante per istante) dall'**area in questione** che nel caso specifico è l'area del seguente **rettangolo**:



$$v = a t \quad (+ \text{ ovviamente un termine iniziale } V_0)$$

Quindi **velocità istantanea e accelerazione istantanea**, cioè le funzioni $v(t)$ e $a(t)$ sono **connesse** dalle relazioni inverse:

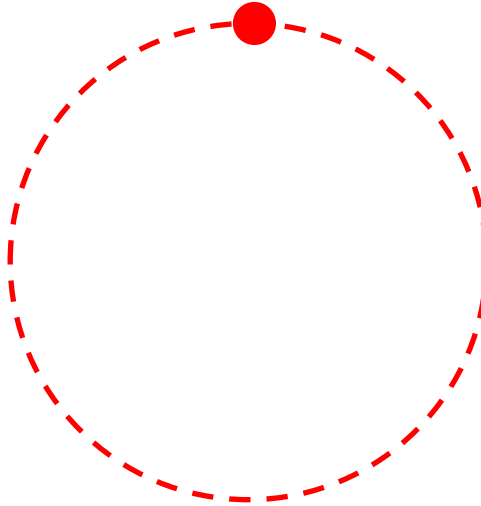
$$a(t) = dv(t) / dt \quad \longleftrightarrow \quad v(t) = \int a(t) dt$$

Questo ci dice che quando avremo a che fare con forze variabili (e di conseguenza accelerazioni variabili) dovremo inevitabilmente ricorrere a **derivate** e **integrali**, anche se in molti casi vedremo che le soluzioni sono semplici e spesso posso essere ricavate in base a dei grafici.

Dinamica del moto circolare uniforme (acc NON costante)

Come abbiamo già visto, per moto circolare uniforme intendiamo in senso cinematico

il moto lungo una circonferenza di raggio r con **velocità costante in modulo**.



E abbiamo già studiato in cinematica che in un moto circolare uniforme esiste una

accelerazione \mathbf{a} , diretta sempre verso il centro della circonferenza il cui modulo è dato da:

Accelerazione centripeta: $a = v^2 / r$

Adesso di questo moto ne vogliamo studiare la Dinamica. Applicando la II Legge di Newton risulta che la **somma vettoriale di tutte le forze** applicate alla massa m deve soddisfare la relazione:

$$\sum \mathbf{F} = m \mathbf{a}$$

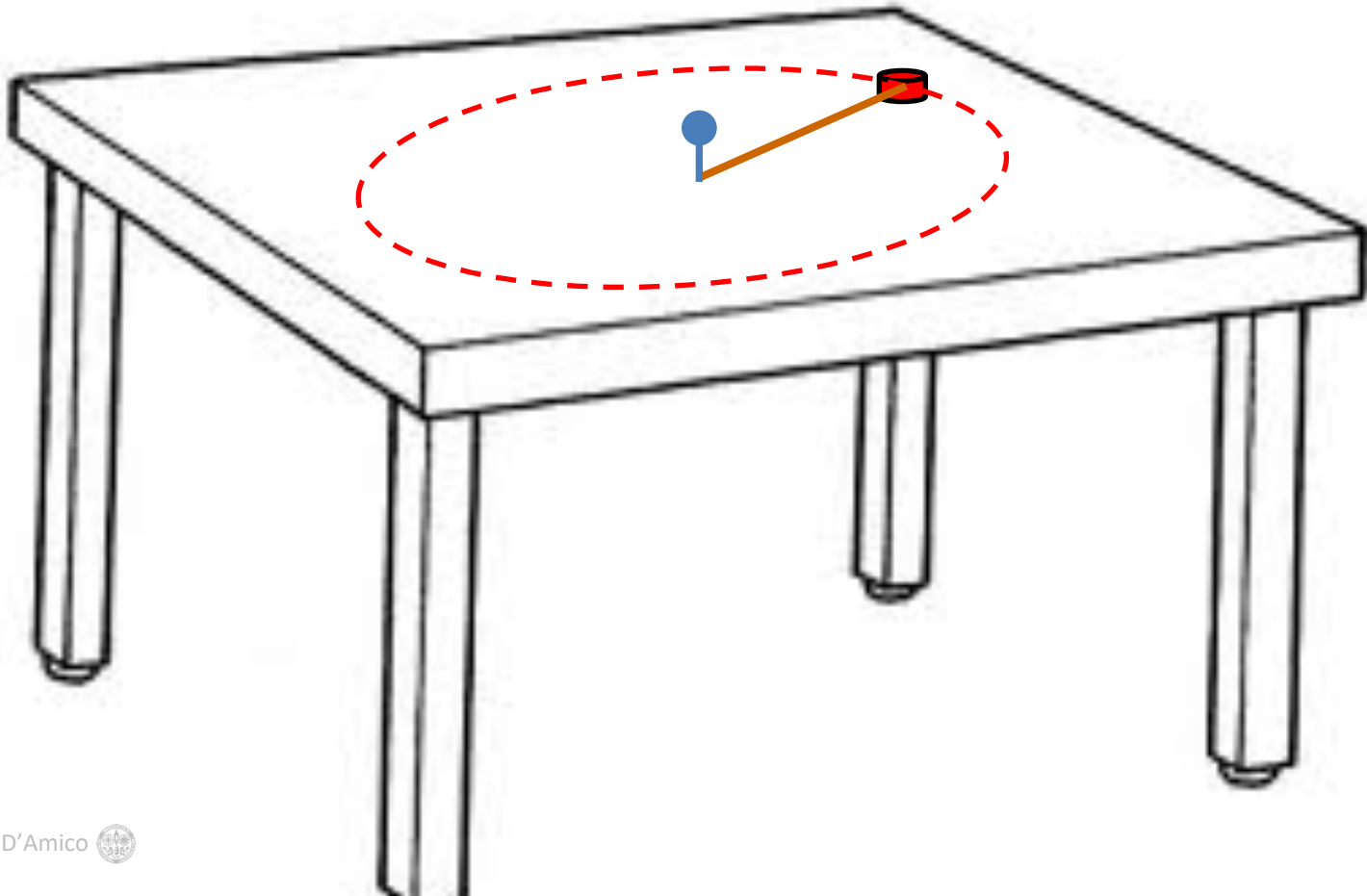
E poiché l'accelerazione \mathbf{a} come abbiamo visto in Cinematica è diretta verso il centro della circonferenza, anche la forza risultante $\sum \mathbf{F}$ sarà diretta verso il centro.

Riguardo alla sua intensità (modulo) risulterà:

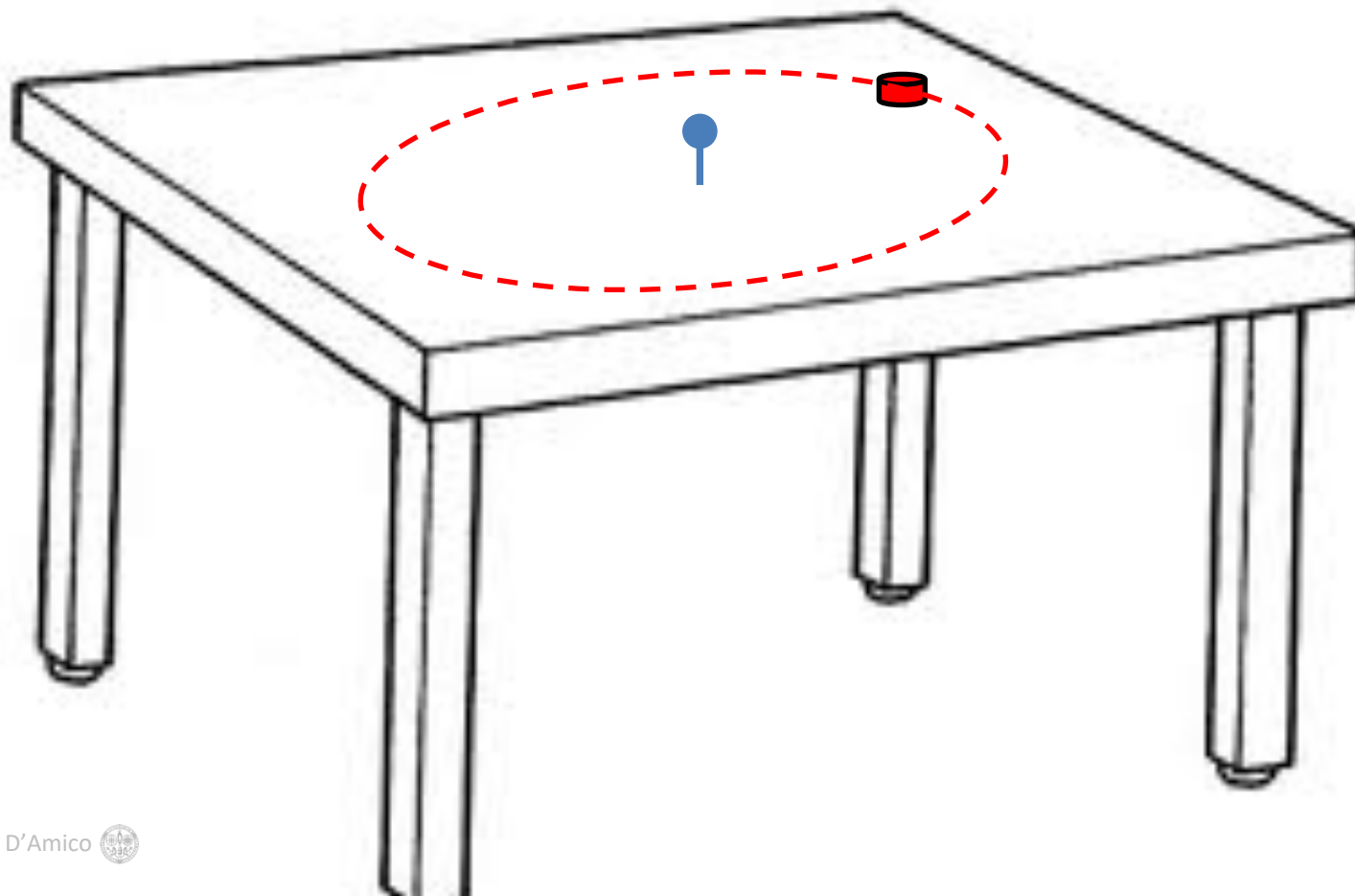
$$\left| \sum \mathbf{F} \right| = m a = m v^2 / r$$

Un esempio concreto:

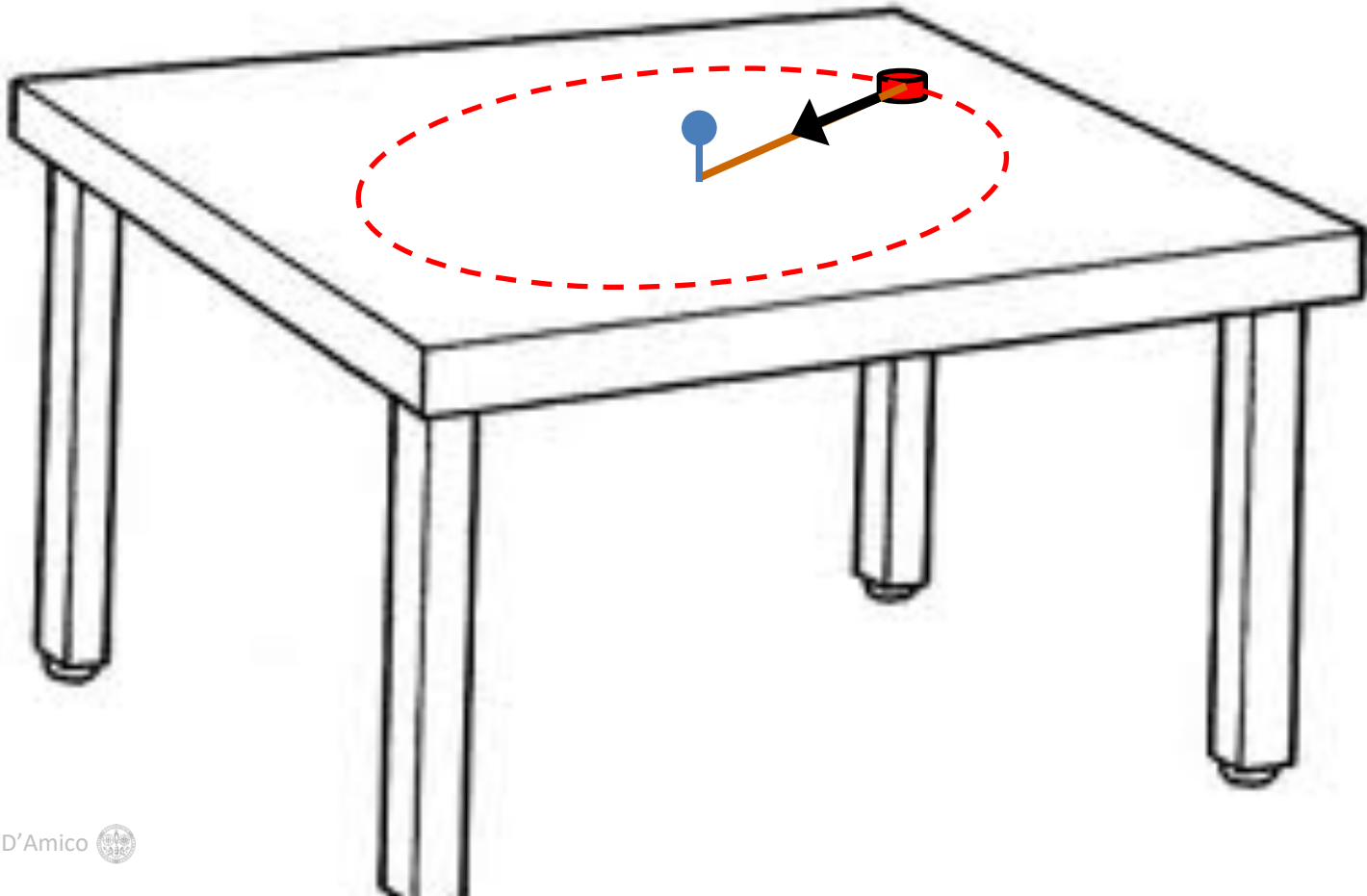
Un corpo di massa m collegato con una fune al centro di un tavolo tramite un chiodo, che si muove di moto circolare uniforme.



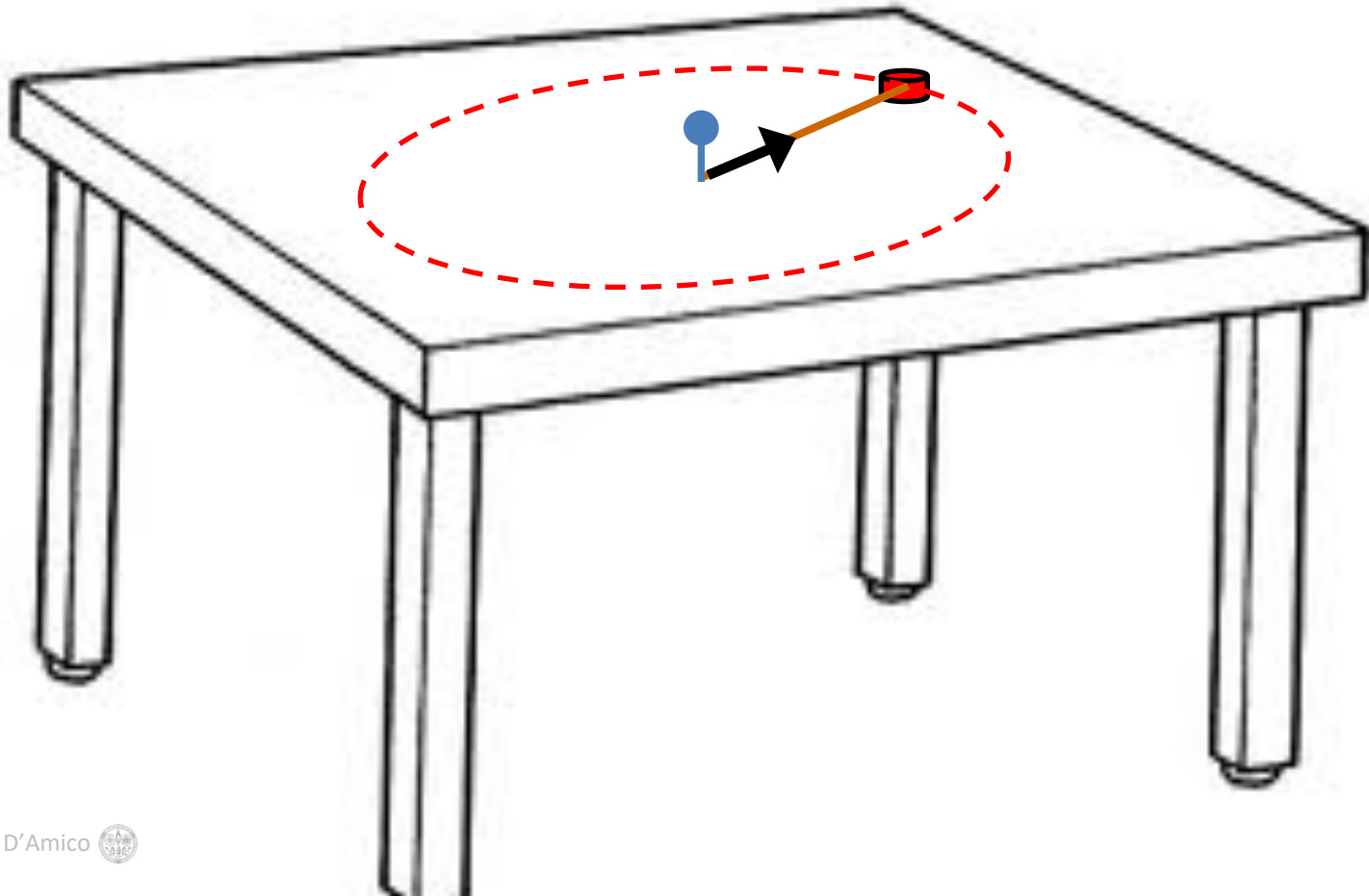
Quindi un moto di questo tipo:



La forza centripeta \mathbf{F}_c è la forza con cui la fune agisce sul corpo di massa m ed è la forza totale applicata. Essa agisce sulla massa m e ne fa cambiare costantemente la direzione della velocità \mathbf{V} . Il modulo di questa forza centripeta è $m v^2 / r$



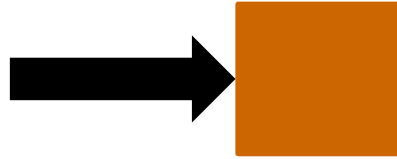
In base alla III Legge di Newton, l'agente che applica la forza centripeta sulla massa m (cioè la fune) sente una forza di reazione esercitata dalla massa m su di essa. Questa forza è definita forza **centrifuga** ed è eguale e opposta alla forza centripeta: $-m v^2 / r$



Le forze d'attrito

Supponiamo di applicare una forza \mathbf{F}_1 ad un corpo posizionato su di una superficie non perfettamente liscia:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 \rightarrow \mathbf{a} = 0$$



Non succede niente !

In base alle **Leggi di Newton** possiamo affermare che **esiste** una forza eguale a $-\mathbf{F}_1$ applicata al corpo cosicché essendo la risultante delle forze $\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_1 = 0$, risulta $\mathbf{a} = 0$.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 \rightarrow \mathbf{a} = 0$$



$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_2 \rightarrow \mathbf{a} = 0$$

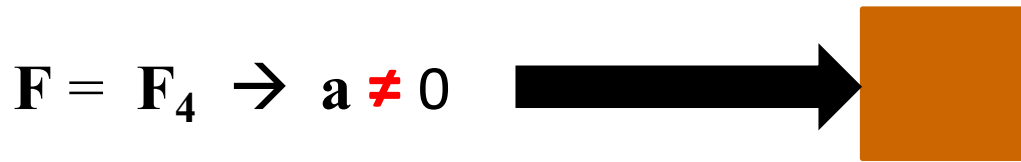


$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_3 \rightarrow \mathbf{a} = 0$$



Chiameremo questa forza f_s
(Forza di attrito **Statico**)

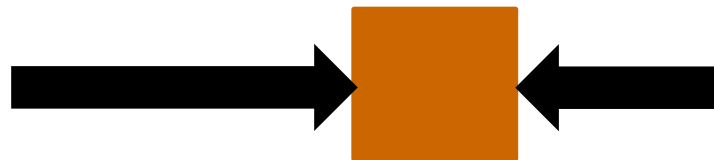
Se osserviamo in dettaglio il moto nel caso \mathbf{F}_4 scopriamo che **se manteniamo applicata la forza**, il corpo si muove di moto accelerato



Tuttavia, se facciamo delle misure scopriamo che $\mathbf{a} < \mathbf{F}_4 / m$

Evidentemente, esiste una **forza contraria** tale che la risultante \mathbf{F}_r obbedisce alla relazione

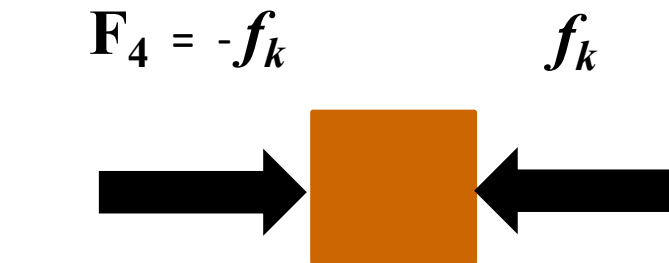
$$\mathbf{F}_r = m \mathbf{a}$$



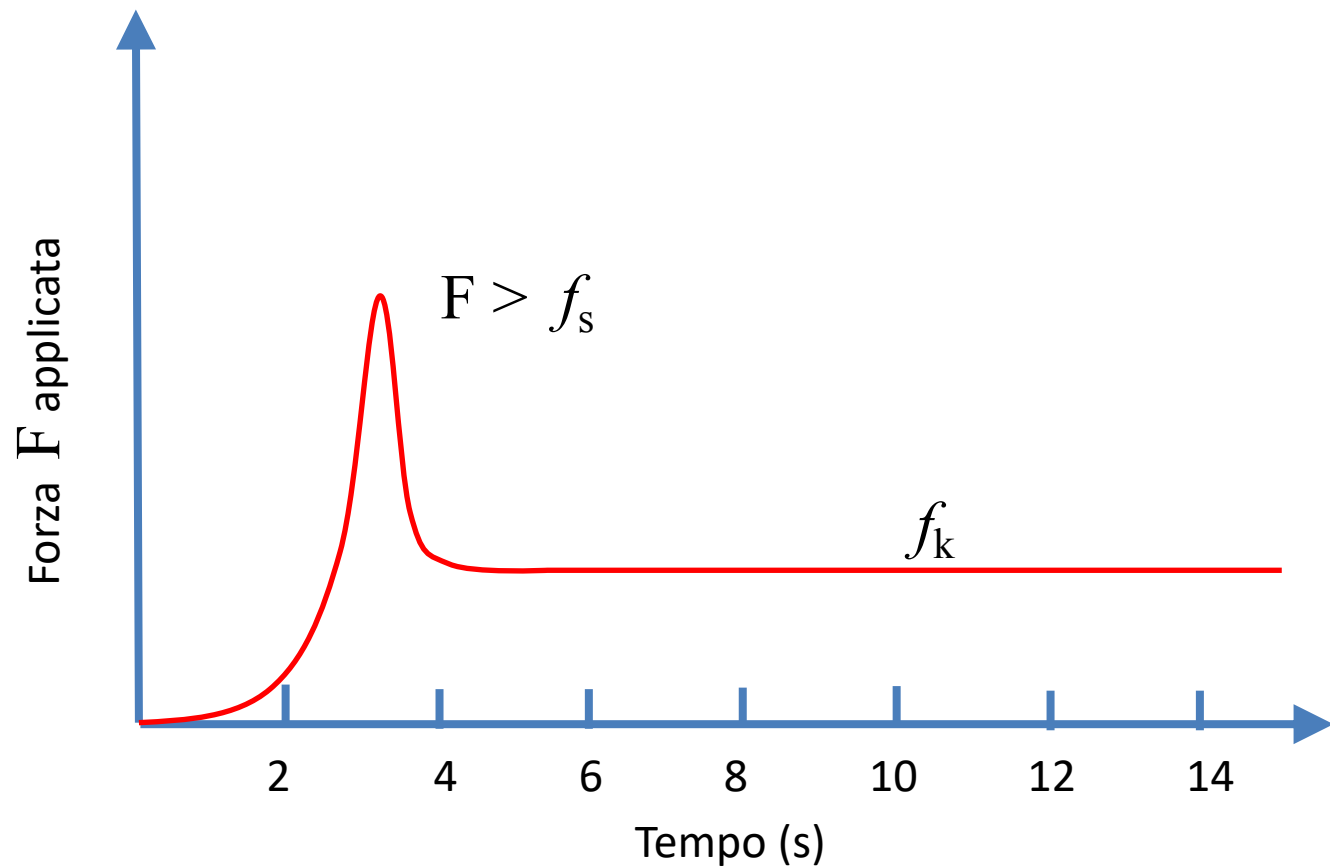
$$\mathbf{F}_r = \mathbf{F}_4 - \mathbf{f}_k = m \mathbf{a}$$

Chiameremo questa forza \mathbf{f}_k
(Forza di attrito Dinamico)

Va da sé che una volta «**sbloccato**» il corpo dalla posizione di quiete, se vogliamo semplicemente che mantenga uno stato di **moto uniforme** ($\mathbf{a} = \mathbf{0}$), dobbiamo smorzare la forza \mathbf{F}_4 fino a **eguagliare in modulo** f_k



Quindi, in sostanza, se misuriamo in funzione del tempo la forza \mathbf{F} necessaria per **sbloccare** il corpo dalla sua posizione di quiete e **poi mantenerlo in uno stato di moto rettilineo uniforme** ($\mathbf{a} = 0$), otteniamo un grafico di questo tipo:



Si osserva che la forza di attrito f è proporzionale alla forza normale N che mantiene a contatto la massa in questione con la superficie su cui si trova.

Di norma l'attrito è quantificato attraverso l'introduzione del cosiddetto coefficiente d'attrito μ

Definiremo pertanto il **coefficiente d'attrito statico** in base alla formula:

$$f_s = \mu_s N$$

E definiremo il **coefficiente d'attrito dinamico** (o cinetico) in base alla formula

$$f_c = \mu_D N$$

Naturalmente le forze di attrito NON sono dirette come la forza normale N

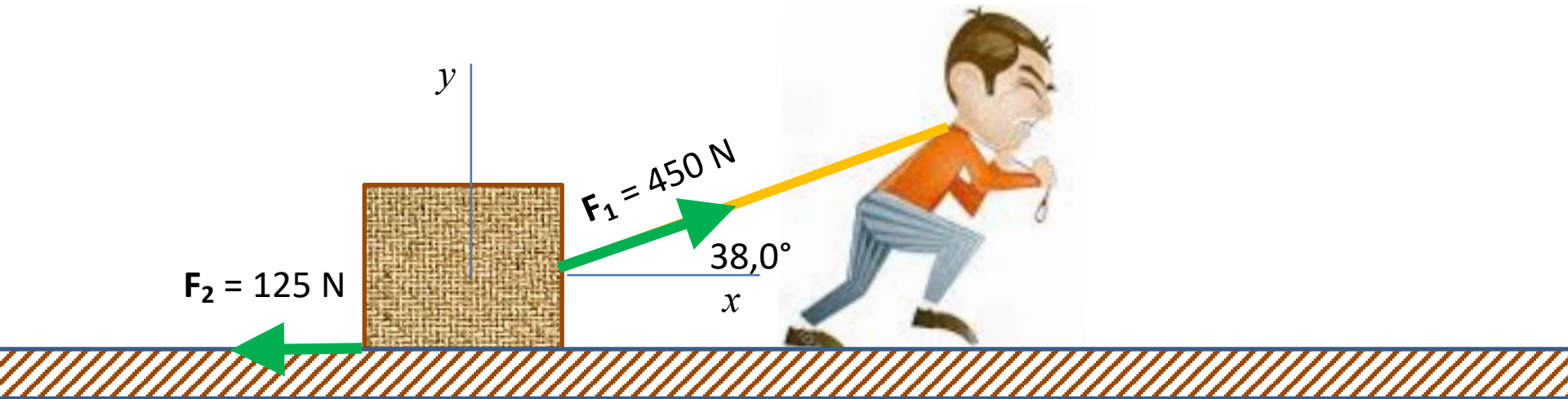
ESERCIZI DI DINAMICA

e

di applicazioni delle Leggi di Newton

Esempio 1

Supponiamo di trascinare una cassa sul pavimento mediante una corda, come in figura.



I dati del problema sono i seguenti:

La corda è inclinata di $38,0^\circ$ rispetto al piano orizzontale ed esercita una forza di 450 N in modulo

Il pavimento esercita sulla cassa un forza orizzontale di attrito di 125 N in modulo

(come in figura)

Quesito: Calcolare l'accelerazione della cassa supponendo che abbia una massa di $96,0 \text{ kg}$.

Per risolvere il quesito applicheremo la II Legge di Newton

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Dove \mathbf{F} è la **risultante** delle forze applicate alla cassa e \mathbf{a} è l'accelerazione che ne risulta.

Possiamo trattare il problema **vettoriale** scomponendo i vettori nei componenti x e y

Le forze applicate alla cassa hanno le seguenti componenti:

$$F_{1x} = F_1 \cos(38,0^\circ)$$

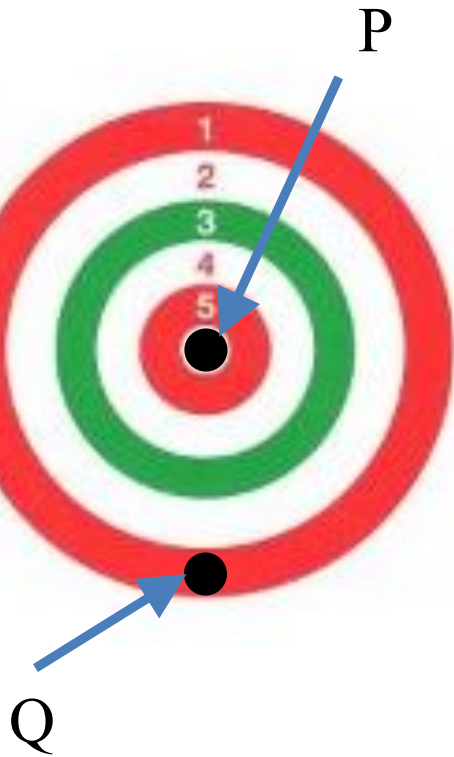
$$F_{1y} = F_1 \sin(38,0^\circ)$$

Nelle ipotesi formulate dal problema non c'è alcun moto in verticale, quindi la componente verticale F_{1y} semplicemente alleggerisce la cassa diminuendo la forza d'attrito dinamico che risulta nel valore citato nelle premesse. Riguardo alla componente orizzontale, la risultante delle forze è:

$$F_x = F_{1x} - F_2 = F_1 \cos(38,0^\circ) - F_2 = 450 \times \cos(38,0^\circ) - 125 = 229,6 \text{ N}$$

Dalla II Legge di Newton: $a_x = F_x / m \rightarrow a_x = 229,6 / 96,0 = 2,39 \text{ m/s}^2$

Esempio 2

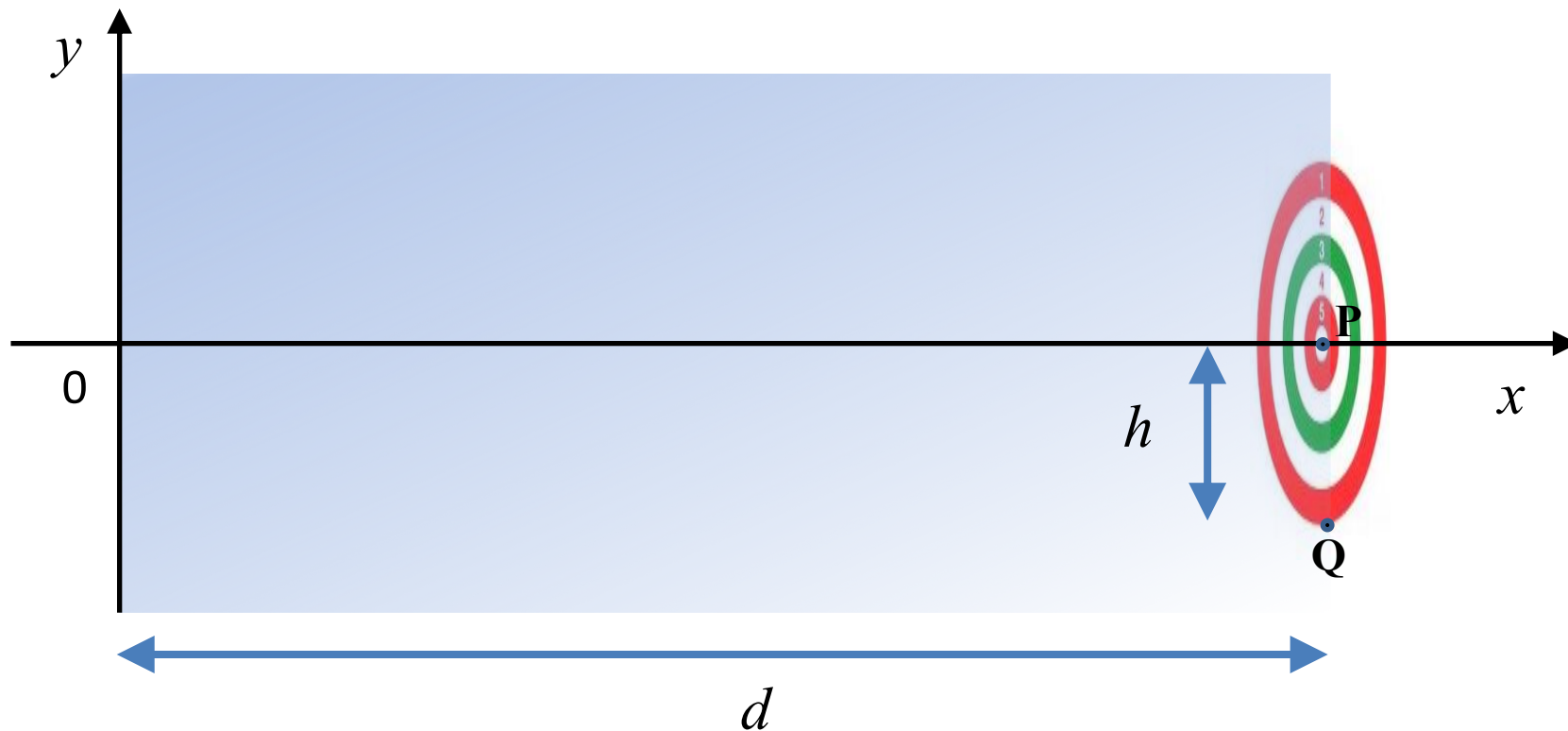


Immaginiamo di lanciare una freccetta orizzontalmente con velocità iniziale di 10 m/s puntando al centro **P** del bersaglio.

La freccetta 0.19 sec dopo finisce sul bordo inferiore del bersaglio al punto **Q**.

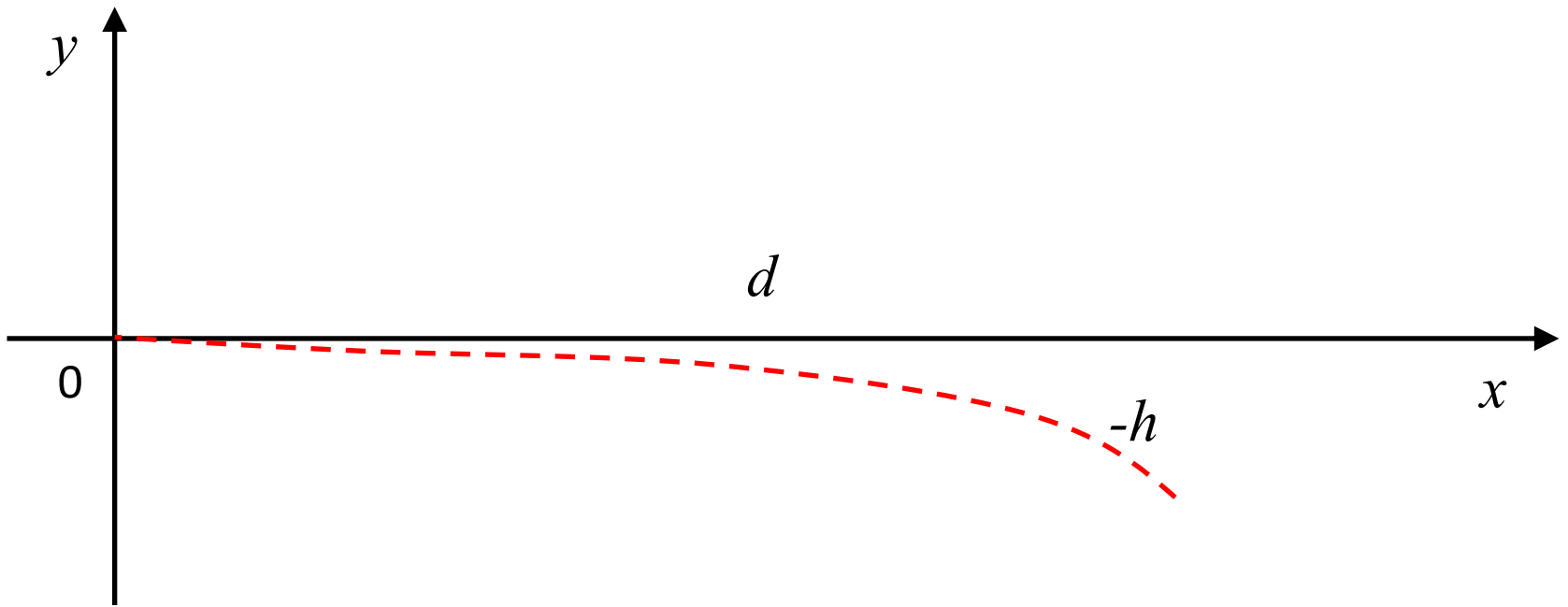
Quesiti: Qual è la distanza **P-Q** ? A che distanza dal bersaglio si trovava il lanciatore ?

Inquadrriamo i dati del problema definendo un sistema di assi cartesiani x - y che individua un piano ortogonale al bersaglio e fissiamo l'origine nel punto da cui parte la freccetta:



Indichiamo con d la distanza fra l'origine e il bersaglio e con h la distanza fra i punti P e Q

I dati iniziali ci dicono che in orizzontale (cioè lungo l'asse x) **non** agiscono forze: si parla solo di una velocità **iniziale** $V_{0x} = 10 \text{ m/s}$, quindi il moto risulterà rettilineo uniforme. In verticale invece, e cioè lungo l'asse y , agisce la **forza** gravitazionale e si avrà quindi un moto **uniformemente accelerato**.



Possiamo quindi scrivere i dati iniziali e finali come segue:

t_0	=	0	t_f	=	0,19 s
x_0	=	0	x_f	=	$d = ?$
y_0	=	0	y_f	=	$-h = ?$
v_{0x}	=	10 m/s	v_{fx}	=	10 m/s
v_{0y}	=	0	v_{fy}	=	?
a_x	=	0 (costante)			
a_y	=	-9,8 m/s ² (costante)			

Possiamo quindi scrivere le equazioni del moto che sappiamo essere valide per $a = \text{costante}$:

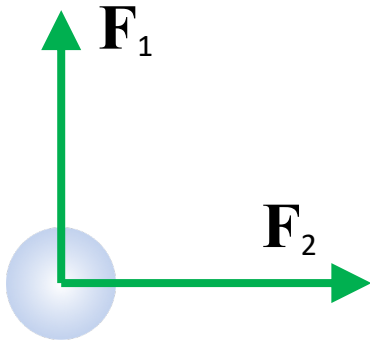
$$x_f = v_{0x} t_f = 1,9 \text{ m} \quad \rightarrow \quad d: \text{risposta al primo quesito}$$

$$y_f = -\frac{1}{2} g t_f^2 = 0,18 \text{ m} \quad \rightarrow \quad h: \text{risposta al secondo quesito}$$

Esempio 3

Due forze \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 agiscono su un corpo di massa m come illustrato in figura.

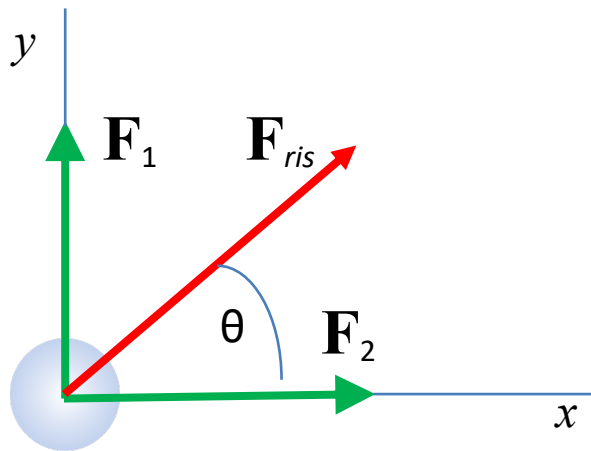
Posto: $m = 5,2 \text{ kg}$; $F_1 = 3,7 \text{ N}$ e $F_2 = 4,3 \text{ N}$, calcolare il vettore accelerazione \mathbf{a} del corpo in esame.



Esempio 3

Due forze \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 agiscono su un corpo di massa m come illustrato in figura.

Posto: $m = 5,2 \text{ kg}$; $F_1 = 3,7 \text{ N}$ e $F_2 = 4,3 \text{ N}$, calcolare il vettore accelerazione \mathbf{a} del corpo in esame.



Applicheremo la II Legge di Newton alla risultante delle forze applicate \mathbf{F}_{ris}

Scriveremo quindi $\mathbf{F}_{ris} = m\mathbf{a}$

In questo caso la risultante delle forze è la somma vettoriale delle due forze \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2

il cui modulo è dato da: $F_{ris} = (F_1^2 + F_2^2)^{1/2} = ((4,3)^2 + (3,7)^2)^{1/2} = 5,7 \text{ N}$

e il cui angolo rispetto all'orizzontale è dato da:

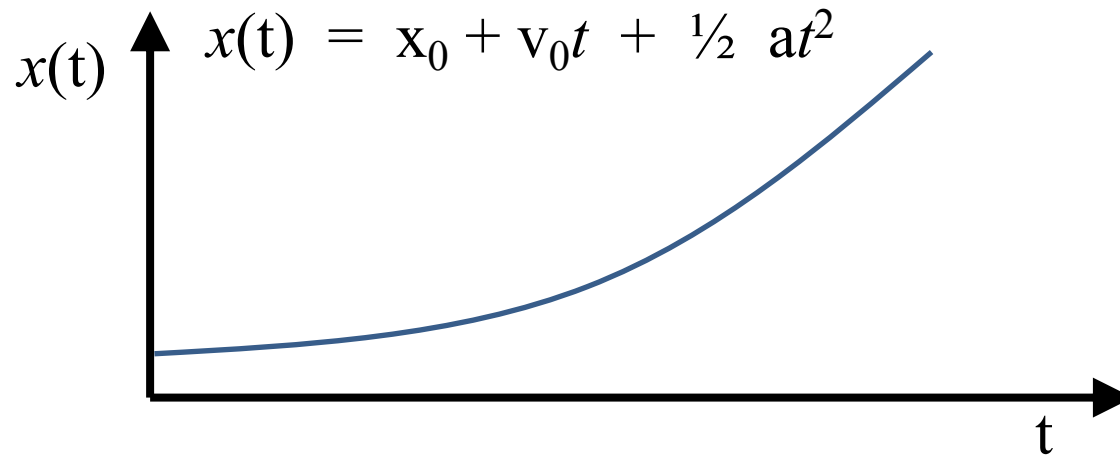
$$\theta = \arctan(F_1/F_2) = 41^\circ$$

Lavoro ed Energia

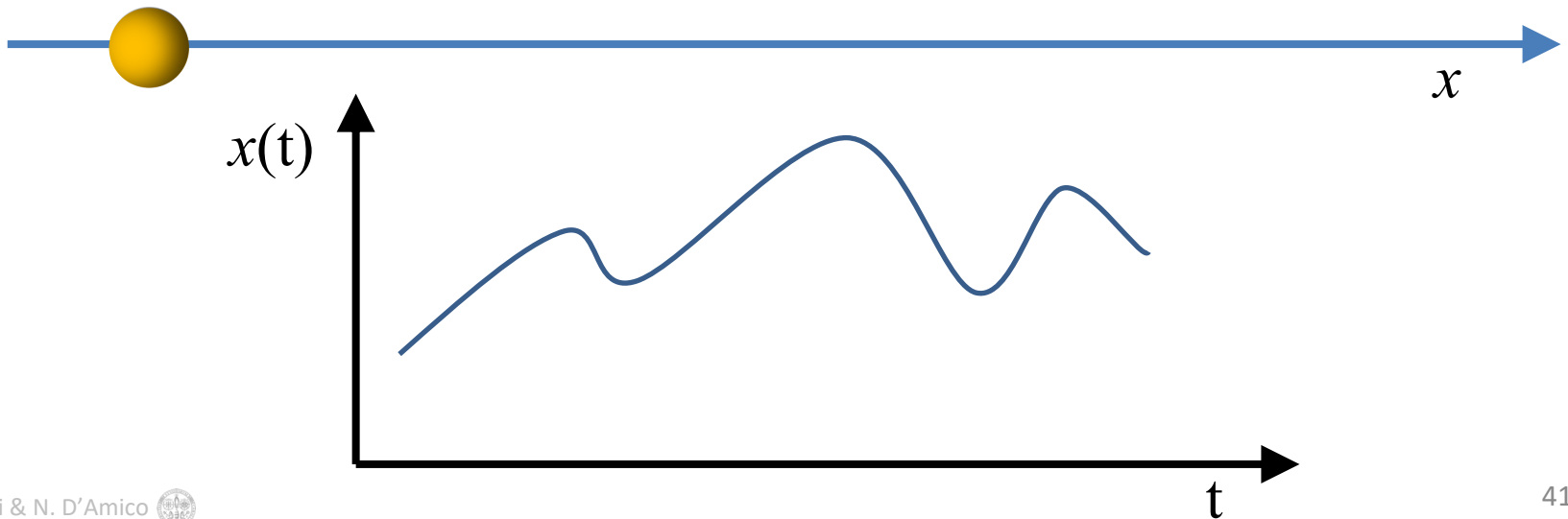
Come abbiamo già visto, il problema della dinamica di un punto materiale è: determinare **come si muove** la particella, note le **forze** che agiscono su di essa. Con il termine **come si muove** si intende **come varia nel tempo** la sua posizione. Se per esempio il moto è unidimensionale, il problema è quindi determinare x come funzione del tempo $x(t)$. Nel nostro primo approccio alla dinamica, [nelle lezioni precedenti, abbiamo affrontato e risolto il problema semplice che si presenta quando le forze in gioco sono costanti](#), utilizzando essenzialmente la

II Legge di Newton

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$



Il problema è un po' più complicato quando la forza agente sulla particella **non è costante**, e si configura per esempio un moto del genere:



Nel seguito, **limiteremo la nostra attenzione alle forze che dipendono dalla posizione** della particella. Ve ne sono una varietà in Fisica: per esempio la **forza gravitazionale**, la cui intensità dipende dal quadrato della distanza, la **forza esercitata da una molla** deformata, su un corpo a cui è attaccata, ecc ...

Lo studio di questi casi ci condurrà alla definizione di importanti grandezze fisiche come il **Lavoro** e l'**Energia Cinetica**, e di seguito alla definizione più generale di **Energia** e alla sua **Legge di Conservazione**.

Queste grandezze saranno di notevole aiuto per la Soluzione di parecchie Problemi di Dinamica relativi a Forze NON costanti, senza la necessità di utilizzare il calcolo differenziale o integrale

Lavoro fatto da una forza costante

Consideriamo ancora il caso di una forza $\mathbf{F} = \text{costante}$, e di un moto rettilineo lungo la direzione della forza. In questo caso, come sappiamo possiamo ridurre nuovamente lo studio al caso unidimensionale (scalare) (moto lungo l'asse x).

E sappiamo già che la particella di muoverà di moto accelerato con accelerazione costante

$$a = F/m$$



Definiamo **Lavoro L** fatto dalla forza \mathbf{F} sulla particella come il prodotto del **modulo $|\mathbf{F}|$** della forza per la **distanza d** percorsa dalla particella

$$L = |\mathbf{F}| d$$

Consideriamo adesso il caso in cui la forza (sempre costante) non agisce però lungo la direzione di moto:



In questo caso definiremo il **Lavoro** fatto dalla forza \mathbf{F} sulla particella come il prodotto della **componente** F_x **della forza lungo la direzione di moto**, per la **distanza** d percorsa dalla particella

$$L = F_x d$$

$$L = (F \cos\theta) d$$

Se $\theta = 0$, il Lavoro è semplicemente $F d$, come per il caso precedente, mentre se $\theta = 90^\circ$ il lavoro fatto dalla forza F sulla particella è **nullo**.

Il **Lavoro** è una quantità scalare
ed altro non è che il **prodotto scalare** dei vettori **F** e **d**

$$L = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}$$

Unità di misura del Lavoro

L'unità di misura del lavoro è il lavoro fatto dall'**unità di forza** nel muovere un corpo dell'**unità di lunghezza** nella direzione della forza.

Quindi nel sistema **SI** l'unità di lavoro è 1 Newton-metro, detto **joule**

Un'altra unità di misura in uso è il kilogrammetro, definita come $1\text{kgm} = 9,8\text{ joule}$