

Controlli automatici

Stabilità di sistemi LTI

Ing. Alessandro Pisano
`pisano@diee.unica.it`

Formalizziamo e indaghiamo le proprietà di **stabilità di sistemi dinamici LTI** e di **sistemi di controllo lineari in retroazione**.

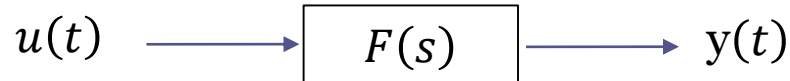
I sistemi dinamici LTI possono essere distinti in tre categorie

*Sistemi dinamici **asintoticamente stabili** - AS*

*Sistemi dinamici stabili (**semplicemente stabili**) - SS*

*Sistemi dinamici **instabili** - I*

Una FdT $F(s)$ viene detta **asintoticamente stabile** se tutti i suoi poli hanno parte reale negativa

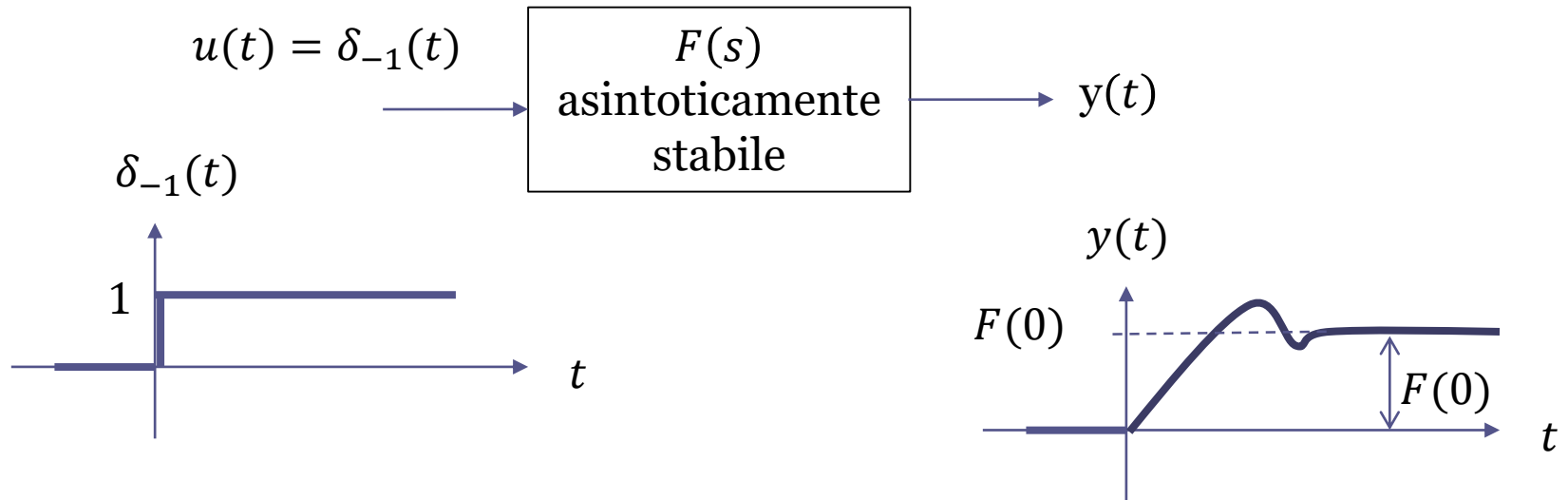


Un sistema dinamico **asintoticamente stabile** è tale che se riceve un ingresso nullo ($u(t) = 0$) la variabile di uscita tende asintoticamente a zero, mentre se viene applicato in ingresso un segnale costante ($u(t) = U^*$) l'uscita tende asintoticamente verso un valore costante ($y(t) \rightarrow Y^*$ per $t \rightarrow \infty$)

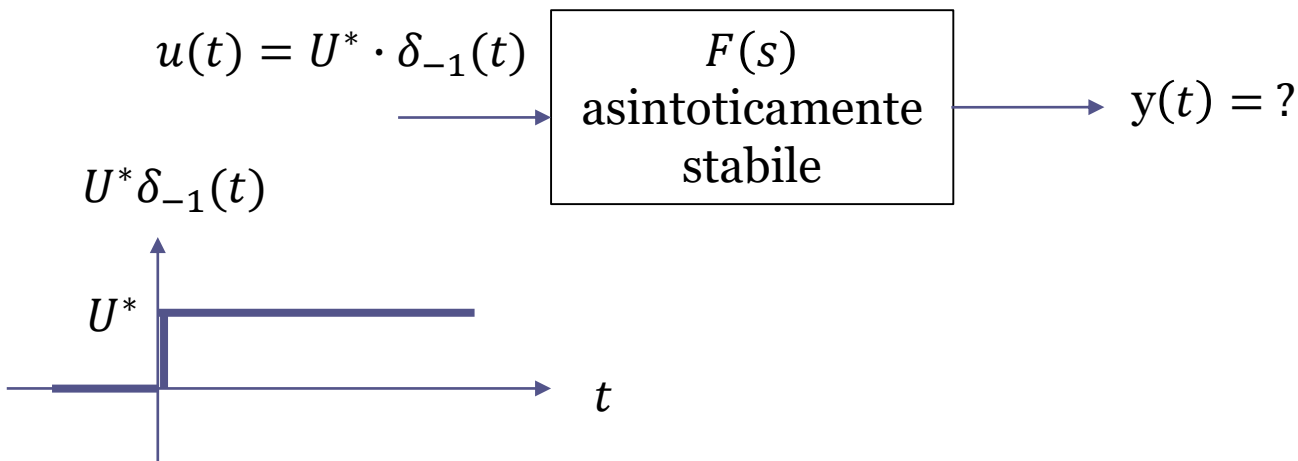
Si dimostra con facilità mediante il teorema del valore finale (fatelo per esercizio) che la risposta $y(t)$ di un sistema dinamico $F(s)$ asintoticamente stabile al gradino **unitario** di ingresso $u(t) = \delta_{-1}(t)$ converge al valore costante di regime

$$Y^* = F(0)$$

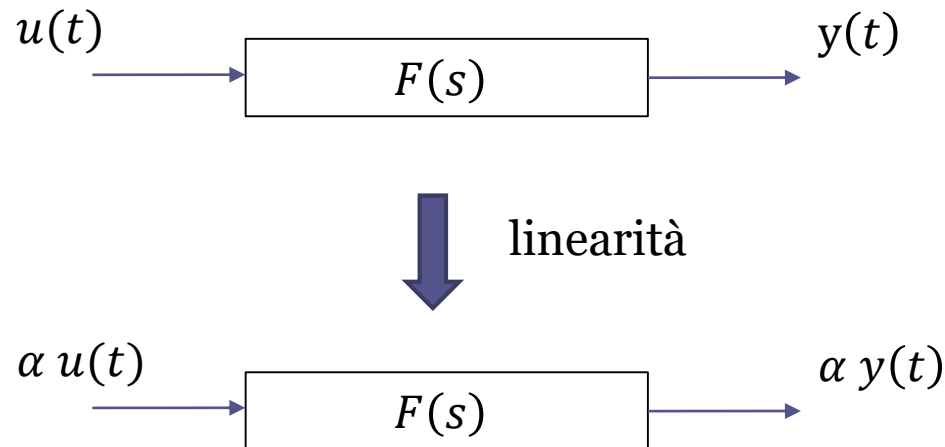
$F(0) =$ **guadagno statico della $F(s)$**



Possiamo desumere, sulla base di questo risultato, quale sarà il comportamento della variabile di uscita in risposta ad un gradino in ingresso di **ampiezza non unitaria** ?



Applicando la proprietà di linearità possiamo assolutamente desumere, sulla base di questo risultato, quale sarà il comportamento della variabile di uscita in risposta ad un gradino in ingresso di **ampiezza non unitaria**.

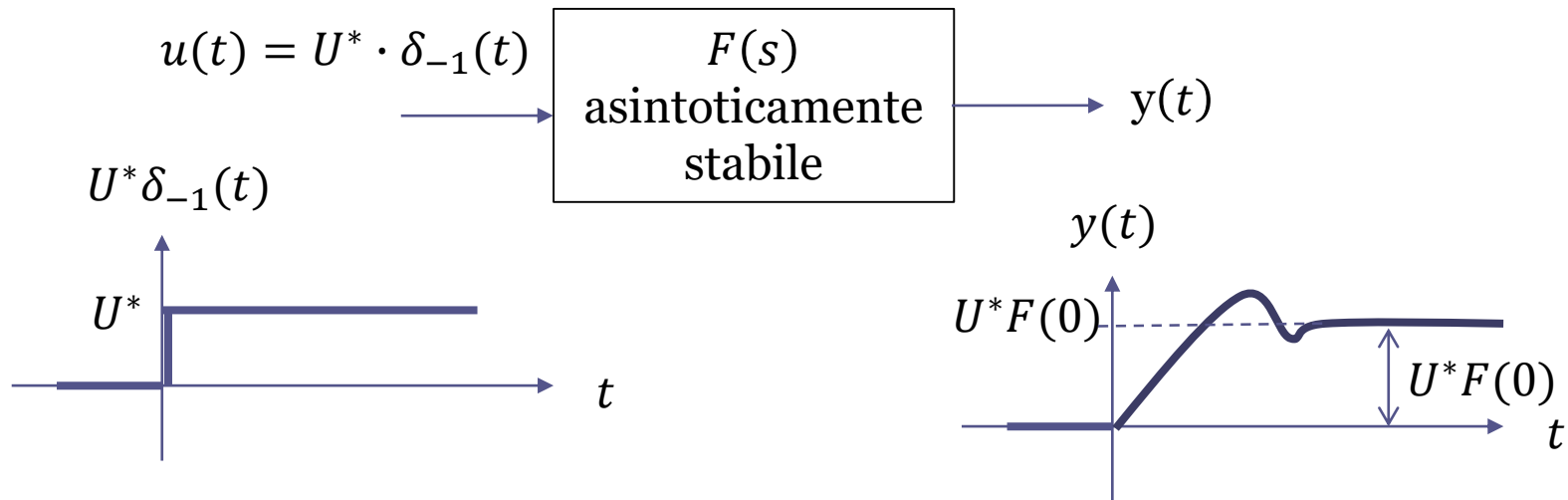


Se un sistema lineare risponde ad un arbitrario ingresso $u(t)$ con un segnale di uscita $y(t)$ allora la sua risposta al segnale di ingresso $\alpha u(t)$, dove α è un coefficiente reale qualunque, sarà il segnale di uscita $\alpha y(t)$

Si può pertanto affermare che:

La risposta $y(t)$ di un sistema dinamico $F(s)$ asintoticamente stabile al gradino di ingresso $u(t) = U^ \cdot \delta_{-1}(t)$ converge al valore costante di regime*

$$Y^* = U^* \cdot F(0) \quad F(0) = \text{guadagno statico della } F(s)$$



Le proprietà di AS, SS, I dipendono esclusivamente dalla posizione dei poli nel piano

Sistemi dinamici *asintoticamente stabili* - AS

Hanno *tutti i poli* strettamente contenuti nel semipiano sinistro

Sistemi dinamici *semplicemente stabili* - SS

Hanno uno o più poli *semplici* sull'asse immaginario

Non hanno poli nel semipiano destro

Sistemi dinamici *instabili* - I

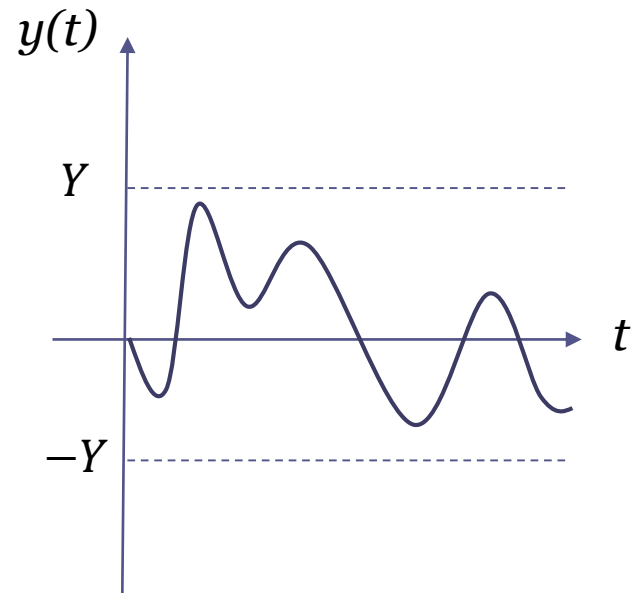
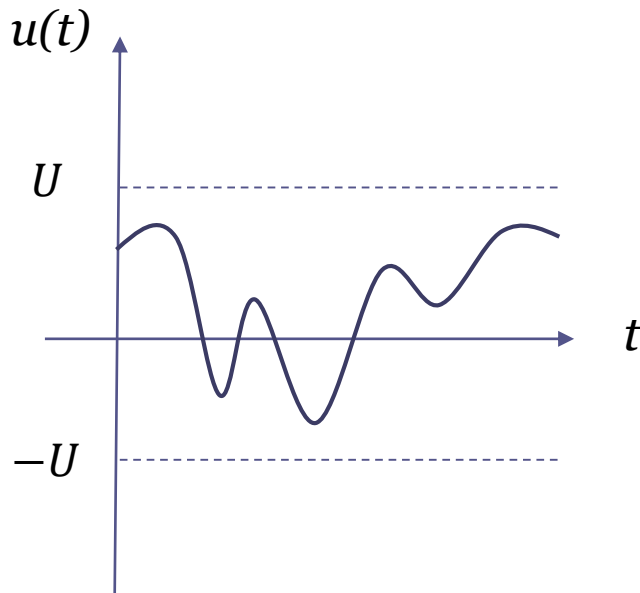
Hanno almeno un polo nel semipiano destro oppure uno o più poli *multipli* sull'asse immaginario

Sistemi dinamici **asintoticamente stabili** - AS

Con ingresso **nullo** ($u(t) = 0$) la variabile di uscita tende asintoticamente a **zero** ($y(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \infty$)

Con ingresso **costante** ($u(t) = U^*$) l'uscita tende asintoticamente verso un valore **costante** ($y(t) \rightarrow Y^*$ per $t \rightarrow \infty$, con $Y^* = U^* \cdot F(0)$)

Con ingresso **limitato** ($|u(t)| \leq U$) la variabile di uscita si mantiene sempre **limitata** ($|y(t)| \leq Y$)



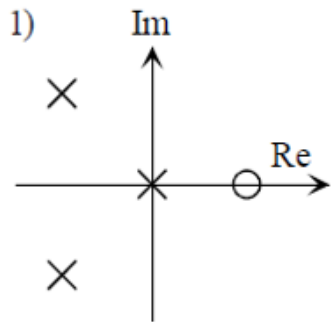
Sistemi dinamici semplicemente stabili - SS

Con ingresso **nullo** ($u(t) = 0$) la variabile di uscita si mantiene sempre limitata ($|y(t)| \leq Y$)

Sistemi dinamici instabili - I

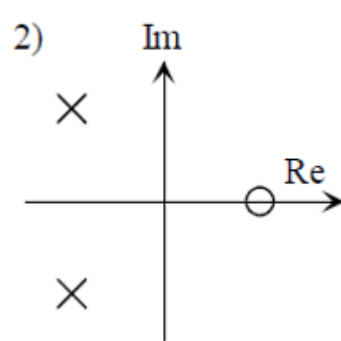
Con ingresso **limitato** ($|u(t)| \leq U$) la variabile di uscita generalmente **diverge** ($|y(t)| \rightarrow \infty$ per $t \rightarrow \infty$) eccetto che in corrispondenza di determinate e specifiche condizioni iniziali e sequenza di ingresso

$$G(s) = \frac{s-1}{s(s^2+s+1)}$$



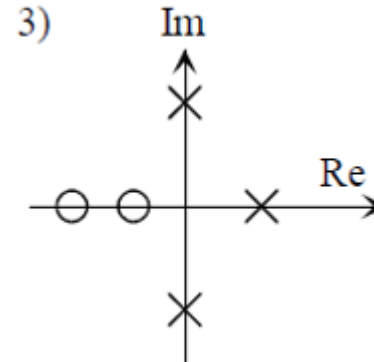
SS

$$G(s) = \frac{s-1}{(s^2+s+1)}$$



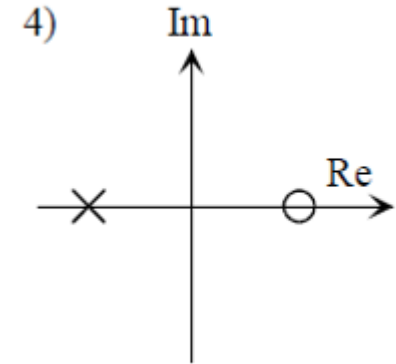
AS

$$G(s) = \frac{(s+2)(s+3)}{(s^2+1)(s-1)}$$



I

$$G(s) = \frac{(s-2)}{(s+1)}$$



AS

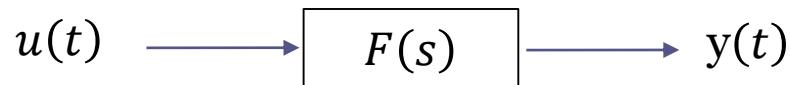
$$G(s) = \frac{s-1}{s^2(s^2+s+1)}$$

Instabile

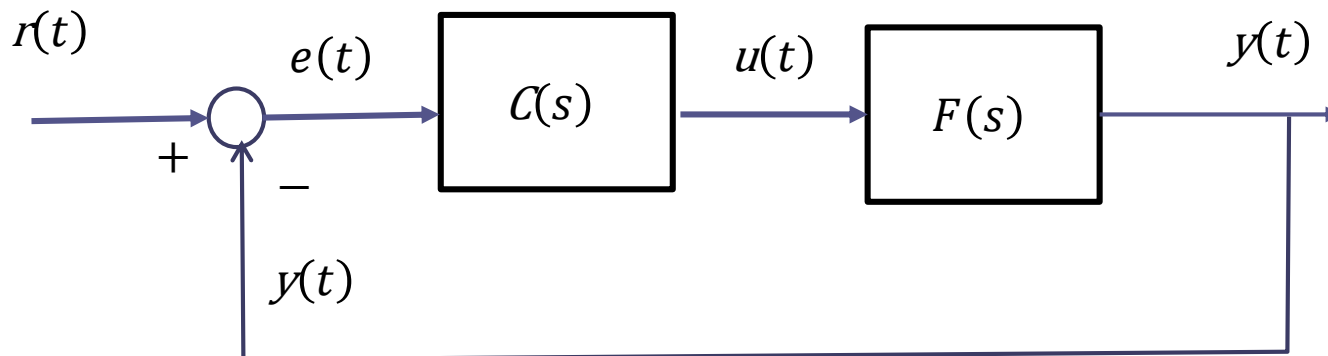
$$G(s) = \frac{s+1}{s^2(s^2+1)}$$

Instabile

Quanto visto fino ad ora circa le relazioni fra le proprietà di stabilità di un sistema LTI e le posizioni nel piano dei suoi poli si riferiva alla **stabilità a ciclo aperto** del sistema.

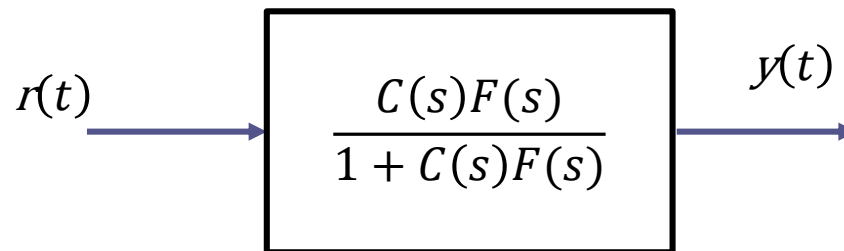


Cosa succede nel momento in cui un sistema dinamico (asintoticamente stabile, stabile, o instabile) viene inserito in un sistema di controllo in retroazione ?



Le proprietà del sistema vengono «alterate» grazie alla retroazione, cioè grazie al fatto che l'uscita del sistema viene retroazionata e influisce quindi direttamente sul segnale applicato in ingresso all'impianto.

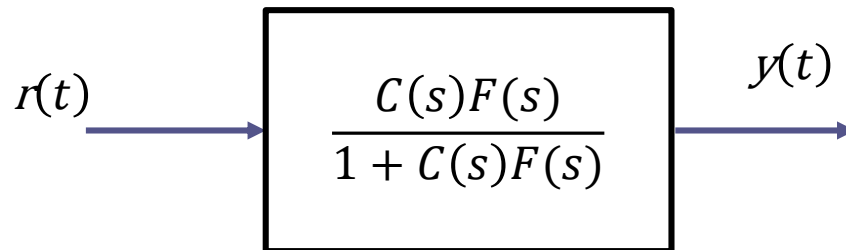
Di fatto, siamo interessati ad imporre le caratteristiche desiderate al sistema a ciclo chiuso. Indipendentemente dal fatto che il processo $F(s)$ da controllare sia as. stabile, stabile o instabile il nostro compito è quello di **progettare il controllore $C(s)$ per fare in modo che il sistema a ciclo chiuso**



sia asintoticamente stabile e tale inoltre da garantire una risposta caratterizzata una evoluzione temporale soddisfacente (ad esempio in termini di durata del transitorio, o della presenza di sovraelongazione o oscillazioni contenute).

Altre specifiche di progetto, che tratteremo meglio più avanti, si riferiscono alla capacità di attenuare, o compensare del tutto, l'effetto sulla variabile di uscita di ingressi disturbanti.

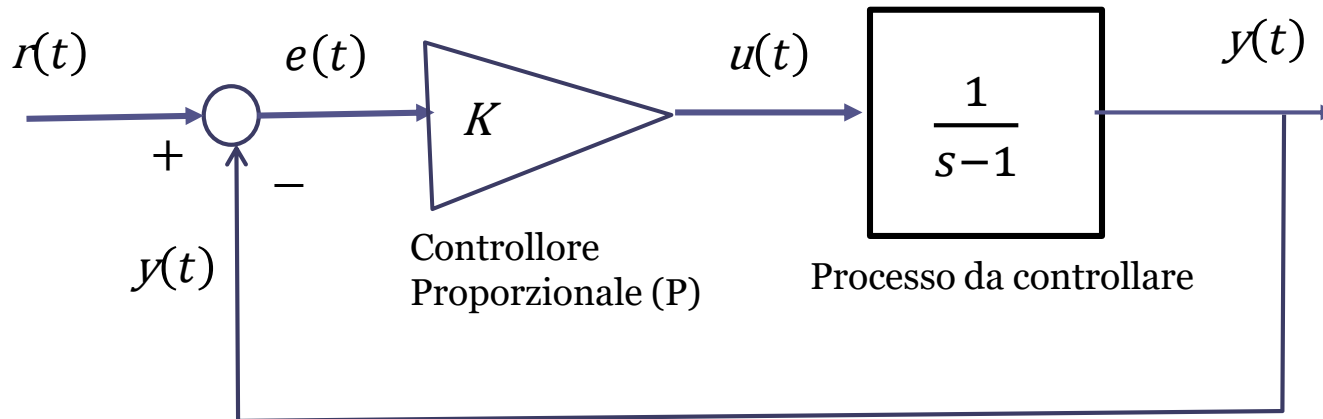
Il comportamento del sistema a ciclo chiuso è governato dalle caratteristiche della FdT a ciclo chiuso fra il set point e l'uscita.



Il primo e imprescindibile vincolo sulla scelta del controllore è garantire che **la FdT a ciclo chiuso fra il set point e l'uscita sia asintoticamente stabile.**

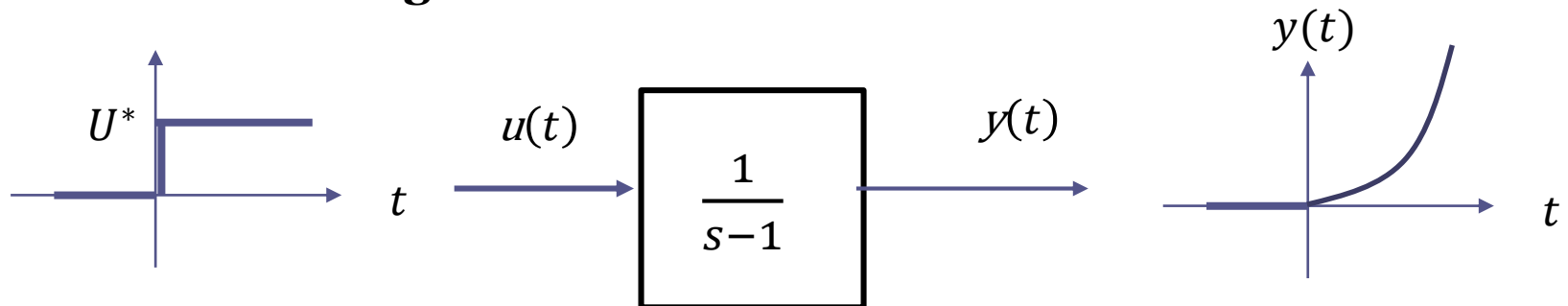
Vediamo alcuni esempi

Esempio Sistema di controllo a retroazione unitaria

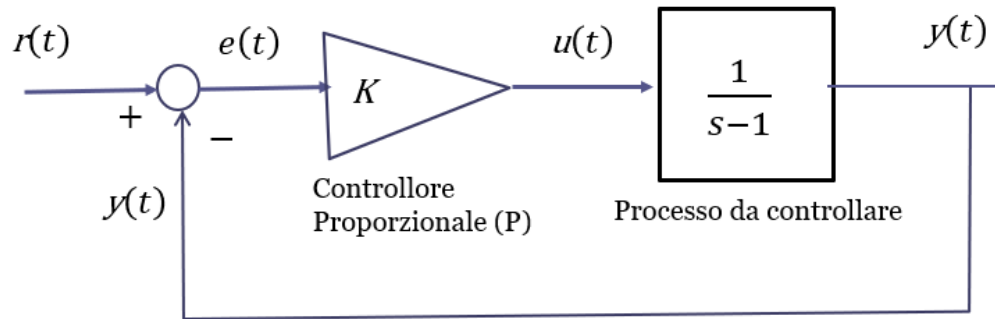


Il processo da controllare è **instabile**

L'applicazione in ingresso al processo di un segnale costante vedrebbe la variabile di uscita **divergere**



Esempio Sistema di controllo a retroazione unitaria



La FdT a ciclo chiuso fra il set-point e l'uscita è:

$$W_r^y(s) = \frac{K \cdot \frac{1}{s-1}}{1 + K \cdot \frac{1}{s-1}} = \frac{K}{s-1+K} \quad \begin{array}{l} \text{Polo} \\ p = 1 - K \end{array}$$

La FdT a ciclo chiuso (e quindi il sistema di controllo) risulta essere:

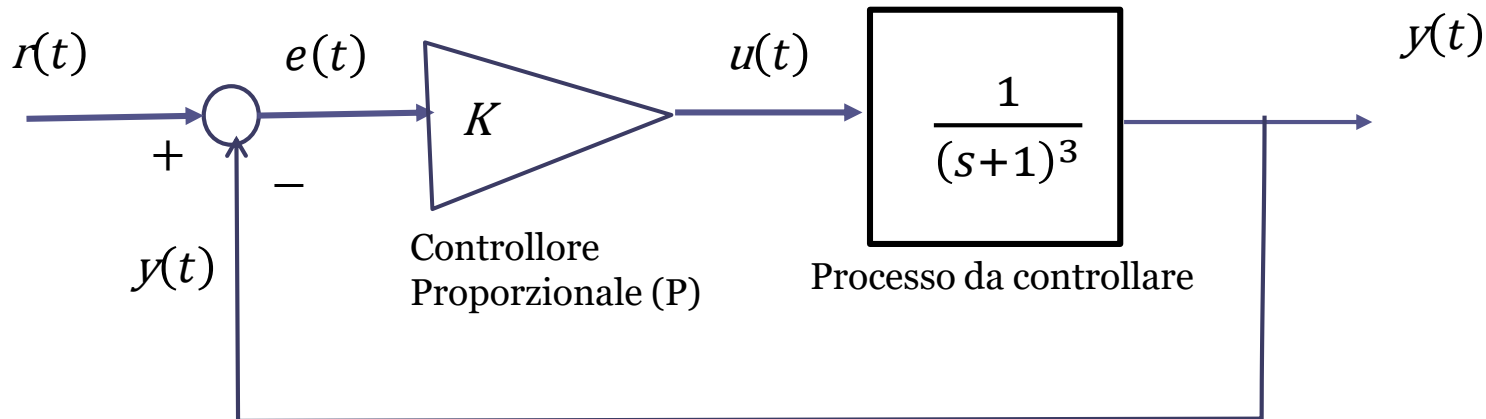
Instabile $0 < K < 1$

Semplicemente stabile $K = 1$

Asintoticamente stabile $K > 1$

Si svolga la medesima analisi con riferimento ad un controllore P.I.

Esempio Sistema di controllo a retroazione unitaria

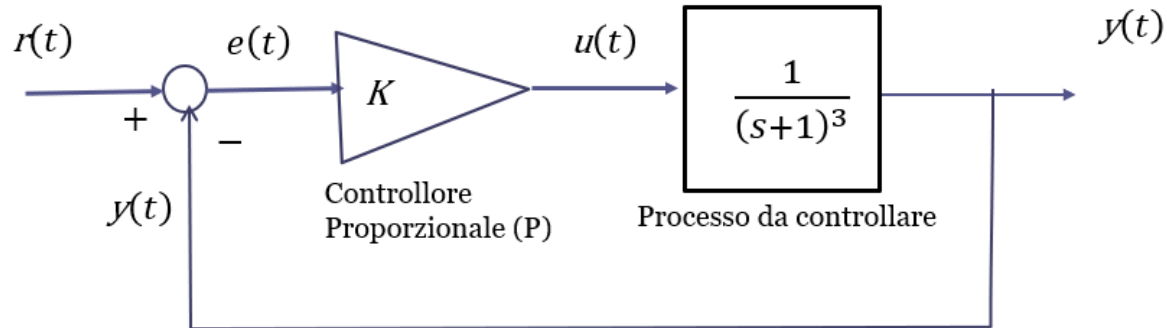


Il processo da controllare è ora invece asintoticamente **stabile**

La FdT a ciclo chiuso fra il set-point e l'uscita è:

$$W_r^y(s) = \frac{K \cdot \frac{1}{(s+1)^3}}{1 + K \cdot \frac{1}{(s+1)^3}} = \frac{K}{(s+1)^3 + K} = \frac{K}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + K}$$

Esempio Sistema di controllo a retroazione unitaria



FdT a ciclo chiuso fra il set-point e l'uscita: $W_r^y(s) = \frac{K}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + K}$

$$K = 1 \quad p_1 = -2 \quad p_{2,3} = -0.5 \pm j0.86$$

Sistema di controllo
asintoticamente stabile

$$K = 15 \quad p_1 = -3.46 \quad p_{2,3} = 0.23 \pm j2.13$$

Sistema di controllo
instabile

Ricavare questi risultati ha richiesto l'impiego di Matlab per la determinazione delle radici del polinomio caratteristico $P_c(s) = s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + K$ della FdT a ciclo chiuso in corrispondenza degli specifici valori di K considerati

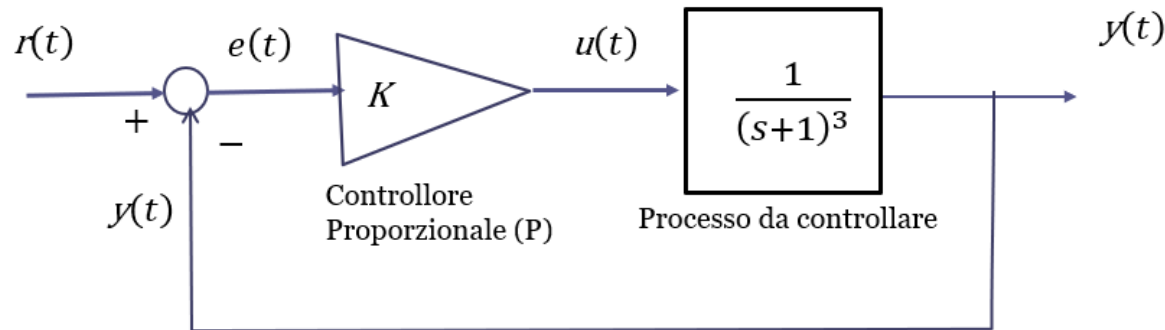
I due esempi precedenti hanno mostrato che:

- 1 Una adeguata scelta del controllore può assegnare un comportamento a ciclo chiuso stabile ad un processo che nel suo funzionamento a ciclo aperto esibisce un comportamento instabile
- 2 Una non adeguata scelta del controllore può condurre ad un comportamento a ciclo chiuso instabile anche per un processo che nel suo funzionamento a ciclo aperto esibisca un comportamento stabile

In generale quindi il controllore può stabilizzare a ciclo chiuso un processo instabile, o destabilizzare a ciclo chiuso un processo stabile.

Le proprietà di stabilità del processo a ciclo aperto e di stabilità del processo a ciclo chiuso inserito in un sistema di controllo sono completamente indipendenti l'una dall'altra.

Il secondo esempio trattato:



FdT a ciclo chiuso fra il set-point e l'uscita:
$$W_r^y(s) = \frac{K}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + K}$$

ha messo in luce difficoltà nel determinare le caratteristiche di stabilità al variare, ad esempio, di un parametro del controllore.

Le difficoltà nel determinare «a mano» le radici di un polinomio di grado superiore al secondo possono essere ovviate grazie ad uno strumento di analisi in grado di determinare se le radici di un polinomio di grado arbitrario giacciono, o meno, nel semipiano sinistro.

Criterio di Routh-Hurwitz

Il criterio di Routh permette di determinare se un sistema retroazionato è asintoticamente stabile senza dover calcolare esattamente la posizione dei poli della FdT a ciclo chiuso, cioè le radici del polinomio caratteristico.

Sia dato il del polinomio caratteristico

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

Per applicare il criterio di Routh-Hurwitz occorre anzitutto costruire sulla base dei coefficienti del polinomio la **tabella di Routh-Hurwitz**:

n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	\dots
$n-1$	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	\dots
$n-2$	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}	\dots
$n-3$	c_{n-3}	c_{n-5}	\dots	
\dots	\dots	\dots	\dots	

Le **prime due righe** della tabella sono formate dai coefficienti del polinomio a partire da quello corrispondente alla potenza più elevata

Condizione Necessaria (ma non sufficiente) perché le radici del polinomio caratteristico abbiano tutte parte reale negativa è che sia

$$a_0 > 0, a_1 > 0, \dots, a_{n-1} > 0, a_n > 0$$

Se non è verificata la condizione necessaria non c'è motivo di costruire la Tabella in quanto sappiamo già che il polinomio sotto esame non ha tutte le radici a parte reale negativa

Ritorniamo alla costruzione della Tabella

$$\begin{array}{c|ccc}
 n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \dots \\
 n-1 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \dots \\
 n-2 & b_{n-2} & b_{n-4} & b_{n-6} & \dots & \\
 n-3 & c_{n-3} & c_{n-5} & \dots & & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & &
 \end{array}$$

Il termine b_{n-2} è espresso dal determinante 2x2 costituito dai primi due coefficienti delle prime due righe, cambiato di segno e diviso per il primo coefficiente della seconda riga.

Gli elementi della riga n-2 sono definiti dalle relazioni

$$b_{n-2} = \frac{a_{n-1} a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \quad b_{n-4} = \frac{a_{n-1} a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} \quad b_{n-6} = \frac{a_{n-1} a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$$

$$b_{n-2} = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

Calcolo di b_{n-2}

$$\begin{array}{c|ccc}
 n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \dots \\
 n-1 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \dots \\
 n-2 & b_{n-2} & b_{n-4} & b_{n-6} & \dots & \\
 n-3 & c_{n-3} & c_{n-5} & \dots & & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & &
 \end{array}$$

Per il calcolo di b_{n-4} , la seconda colonna della matrice 2x2 di cui si deve calcolare il determinante «scorre verso destra». Tutto il resto è identico.

Gli elementi della riga n-2 sono definiti dalle relazioni

$$b_{n-2} = \frac{a_{n-1} a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \quad b_{n-4} = \frac{a_{n-1} a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} \quad b_{n-6} = \frac{a_{n-1} a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$$

$$b_{n-2} = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \quad b_{n-4} = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}$$

Calcolo di b_{n-4}

$$\begin{array}{ccccccc}
 n & \boxed{a_n} & a_{n-2} & \boxed{a_{n-4}} & \boxed{a_{n-6}} & \dots & \\
 n-1 & \boxed{a_{n-1}} & a_{n-3} & \boxed{a_{n-5}} & \boxed{a_{n-7}} & \dots & \\
 n-2 & b_{n-2} & b_{n-4} & b_{n-6} & \dots & & \\
 n-3 & c_{n-3} & c_{n-5} & \dots & & & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & & &
 \end{array}$$

Per il calcolo di b_{n-6} , la seconda colonna della matrice 2x2 di cui si deve calcolare il determinante «scorre verso destra» di un ulteriore passo.
Tutto il resto è identico.

Gli elementi della riga n-2 sono definiti dalle relazioni

$$b_{n-2} = \frac{a_{n-1} a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \quad b_{n-4} = \frac{a_{n-1} a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} \quad b_{n-6} = \frac{a_{n-1} a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$$

$$b_{n-2} = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \quad b_{n-4} = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix} \quad b_{n-6} = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix}$$

Calcolo di b_{n-6}

n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	\dots
$n-1$	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	\dots
$n-2$	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}	\dots	
$n-3$	c_{n-3}	c_{n-5}	\dots		
\dots	\dots	\dots	\dots		

In modo analogo si costruisce ogni successiva riga della tabella, in funzione dei termini delle due righe immediatamente precedenti.

Gli **elementi della riga $n-3$** sono definiti dalle relazioni

$$c_{n-3} = \frac{b_{n-2}a_{n-3} - a_{n-1}b_{n-4}}{b_{n-2}}$$

$$c_{n-5} = \frac{b_{n-2}a_{n-5} - a_{n-1}b_{n-6}}{b_{n-2}}$$

$$c_{n-3} = -\frac{1}{b_{n-2}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-2} & b_{n-4} \end{vmatrix}$$

Calcolo di c_{n-3}

n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	\dots
$n-1$	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	\dots
$n-2$	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}	\dots	\dots
$n-3$	c_{n-3}	c_{n-5}	\dots	\dots	\dots
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots

In modo analogo si costruisce ogni successiva riga della tabella, in funzione dei termini delle due righe immediatamente precedenti.

Gli **elementi della riga $n-3$** sono definiti dalle relazioni

$$c_{n-3} = \frac{b_{n-2}a_{n-3} - a_{n-1}b_{n-4}}{b_{n-2}}$$

$$c_{n-5} = \frac{b_{n-2}a_{n-5} - a_{n-1}b_{n-6}}{b_{n-2}}$$

$$c_{n-3} = -\frac{1}{b_{n-2}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-2} & b_{n-4} \end{vmatrix}$$

$$c_{n-5} = -\frac{1}{b_{n-2}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_{n-2} & b_{n-6} \end{vmatrix}$$

Calcolo di c_{n-5}

Le righe della tabella sono contraddistinte con i numeri $n, n-1, \dots$ e sono di lunghezza decrescente: l'ultima riga, (la numero 0) ha un solo elemento

Criterio di Routh-Hurwitz

Ad ogni variazione di segno che presentano i termini della prima colonna della Tabella di Routh-Hurwitz, considerati nell'ordine, corrisponde una radice con parte reale positiva, ad ogni permanenza una radice con parte reale negativa

Si deve quindi verificare che tutti gli elementi della prima colonna della Tabella abbiano lo stesso segno, in caso contrario il polinomio studiato non possiede tutte le radici a parte reale negativa.

Esempio

Sia data l'equazione $s^3 - 4s^2 + s + 6 = 0$.

Il fatto che i coefficienti del polinomio non abbiano segno concorde ci rivela che il polinomio ammette certamente radici a parte reale non negativa.

Costruendo la Tabella di RH si ottiene infatti:

$$\begin{array}{r|rr}
 3 & 1 & 1 \\
 2 & -4 & 6 \\
 1 & \frac{-4-6}{-4} = 2.5 & 0 \\
 0 & \frac{2.5 \cdot 6}{2.5} = 6 &
 \end{array}$$

Esempio

Sia data l'equazione $2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 10 = 0$.

La CN è soddisfatta. La corrispondente tabella di RH è

4	2	3	10
3	1	5	0
2	-7	10	
1	$\frac{45}{7}$	0	
0	10		

La prima colonna della tabella presenta due variazioni di segno.

Ciò implica che due fra le radici del polinomio sotto studio hanno parte reale positiva.

Se, durante la costruzione della tabella, **i termini di una stessa riga sono moltiplicati tutti per uno stesso coefficiente positivo** non si ha nessuna conseguenza sulla applicazione del metodo. Ciò può essere impiegato per semplificare i calcoli. In particolare, **se il primo elemento di una riga è positivo si può evitare, nel calcolo dei coefficienti della riga successiva, di dividere per tale elemento.**

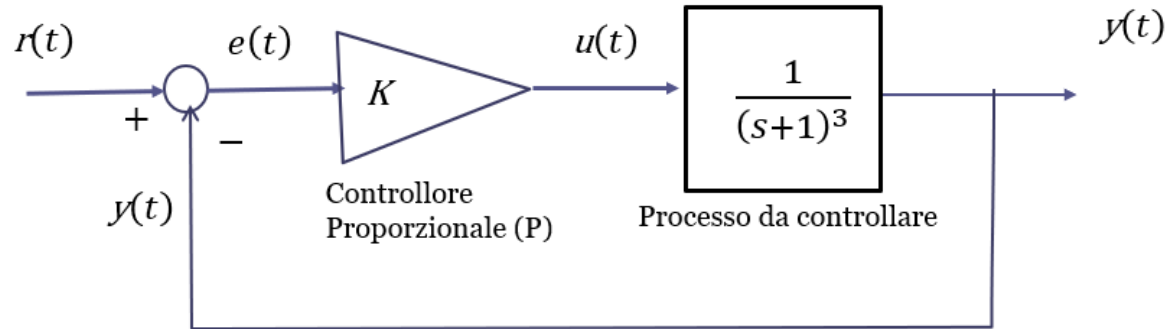
Esempio. Sia data l'equazione $4s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 2s + 1 = 0$. La tabella di Routh è

4	4	5	1	
3	3	2	0	
2	7	3		(non si è diviso per 3)
1	5	0		(non si è diviso per 7)
0	3			

Tutte le radici hanno parte reale negativa.

Esempio

Applichiamo il criterio di RH per studiare la stabilità a ciclo chiuso del sistema trattato in uno degli esempi visti in precedenza



FdT a ciclo chiuso fra il set-point e l'uscita:

$$W_r^y(s) = \frac{K}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + K}$$

$$P_c(s) = s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + K$$

$$n = 3$$

3	1	3
2	3	$1 + K$
1	b_1	0
0	c_0	

$$b_1 = -\frac{1}{3} \left| \begin{array}{c|c} 1 & 3 \\ \hline 3 & 1 + K \end{array} \right| = -\frac{1+K-9}{3} = \frac{8-K}{3}$$

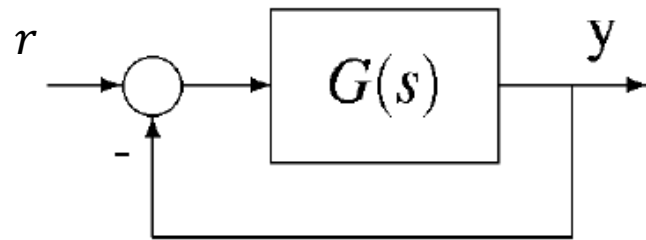
$$c_0 = -\frac{3}{8-K} \left| \begin{array}{c|c} 3 & 1 + K \\ \hline \frac{8-K}{3} & 0 \end{array} \right| = 1 + K$$

3	1	3
2	3	$1 + K$
1	$\frac{8 - K}{3}$	—
0	$1 + K$	

Imponendo che gli elementi della prima colonna della tabella siano tutti positivi si ottengono le disequazioni:

$$-1 < K < 8$$

Esempio. Sia dato il sistema in retroazione



$$\text{con } G(s) = \frac{K}{s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + 2}$$

L'equazione caratteristica del sistema in retroazione è

$$s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + K + 2 = 0$$

La corrispondente tabella di RH è

4	1	11	$K + 2$
3	6	6	0
2	10	$K + 2$	
1	$48 - 6K$	0	
0	$K + 2$		

Per la stabilità asintotica del sistema di controllo a ciclo chiuso si deducono le condizioni:

$$48 - 6K > 0 \quad (\text{da cui } K < 8)$$

$$K + 2 > 0 \quad (\text{da cui } K > -2).$$

Il campo di valori ammissibili per il guadagno K corrispondente alla stabilità asintotica a ciclo chiuso del sistema di controllo è pertanto

$$\mathbf{-2 < K < 8}$$

Durante la costruzione della tabella di RH si possono presentare i seguenti due casi singolari, che non consentono di portarla a termine:

Caso A *il primo termine di una riga è nullo*

$$\begin{array}{c|ccc}
 4 & 2 & 3 & 10 \\
 3 & 0 & 5 & 0 \\
 2 & ?? & & \\
 1 & \dots & & \\
 0 & \dots & &
 \end{array}$$

Caso B *tutti i termini di una riga sono nulli.*

$$\begin{array}{c|ccc}
 4 & 5 & 6 & 2 \\
 3 & 0 & 0 & 0 \\
 2 & ?? & & \\
 1 & \dots & & \\
 0 & \dots & &
 \end{array}$$

Per questi due casi vi sono procedure ad hoc che consentono determinare le proprietà di stabilità del sistema di controllo sotto esame. Non vediamo tali metodi, che peraltro sono da impiegarsi in un ridotto numero di casi pratici, ed hanno pertanto valenza applicativa limitata. Si rimanda ai testi consigliati per maggiori dettagli.