

Lezione IV

(esempi sui moti di caduta,
moto circolare
e moti relativi)



FRUIZIONE E UTILIZZO DEI MATERIALI DIDATTICI

- ➔ **E' vietata** la **copia**, la **rielaborazione**, la **riproduzione** dei contenuti e immagini presenti nelle lezioni in qualsiasi forma
- ➔ **E' inoltre vietata** la **diffusione**, la **redistribuzione** e la **pubblicazione** dei contenuti e immagini, incluse le registrazioni delle videolezioni con qualsiasi modalità e mezzo non autorizzati espressamente dall'autore o da Unica



Orario lezioni I anno – inizio 5 ottobre 2020

(se non diversamente specificato l'aula virtuale è quella dell'anno di corso del Corso di Studio di riferimento)

Orario	Lunedì	Martedì	Mercoledì	Giovedì	Venerdì
08:30 - 09:15		Analisi Matematica 1 (inizio lezioni da definire)			
09:15 - 10:00					
10:15 - 11:00					
11:00 - 11:45		Fisica 1 (inizio lezioni da definire)		Modulo Elementi di Informatica (corso in teledidattica)	Modulo Elementi di Informatica (corso in teledidattica)
12:00 - 12:45					
12:45 - 13:30					
15:00 - 15:45	Analisi Matematica 1 (inizio lezioni da definire)		Analisi Matematica 1 (inizio lezioni da definire)		
15:45 - 16:30					
16:45 - 17:30					
17:30 - 18:15	Fisica 1 (inizio lezioni da definire)		Fisica 1 (inizio lezioni da definire)		
18:30 - 19:15					
19:15 - 20:00					

Insegnamento	Docente	Ore lezione
Analisi Matematica 1		90
Fisica 1	Possenti Andrea	80
Elementi di Informatica (<i>modulo</i>) (corso in teledidattica)	Fraschini Matteo	60

**Sito per reperire le slide delle lezioni e (in futuro)
gli esiti di prove parziali e di esami**

https://www.unica.it/unica/it/ateneo_s07.page

**Individuare Andrea Possenti nella lista Docenti e poi cliccare
su «Materiale Didattico» nel menu a destra**

Libro di testo:

Le lezioni e le esercitazioni, nonché il flusso degli argomenti del programma, si ispirano prevalentemente ad un testo che ormai è diventato un classico:

Halliday & Resnick

FONDAMENTI DI FISICA I: MECCANICA, ONDE, TERMODINAMICA

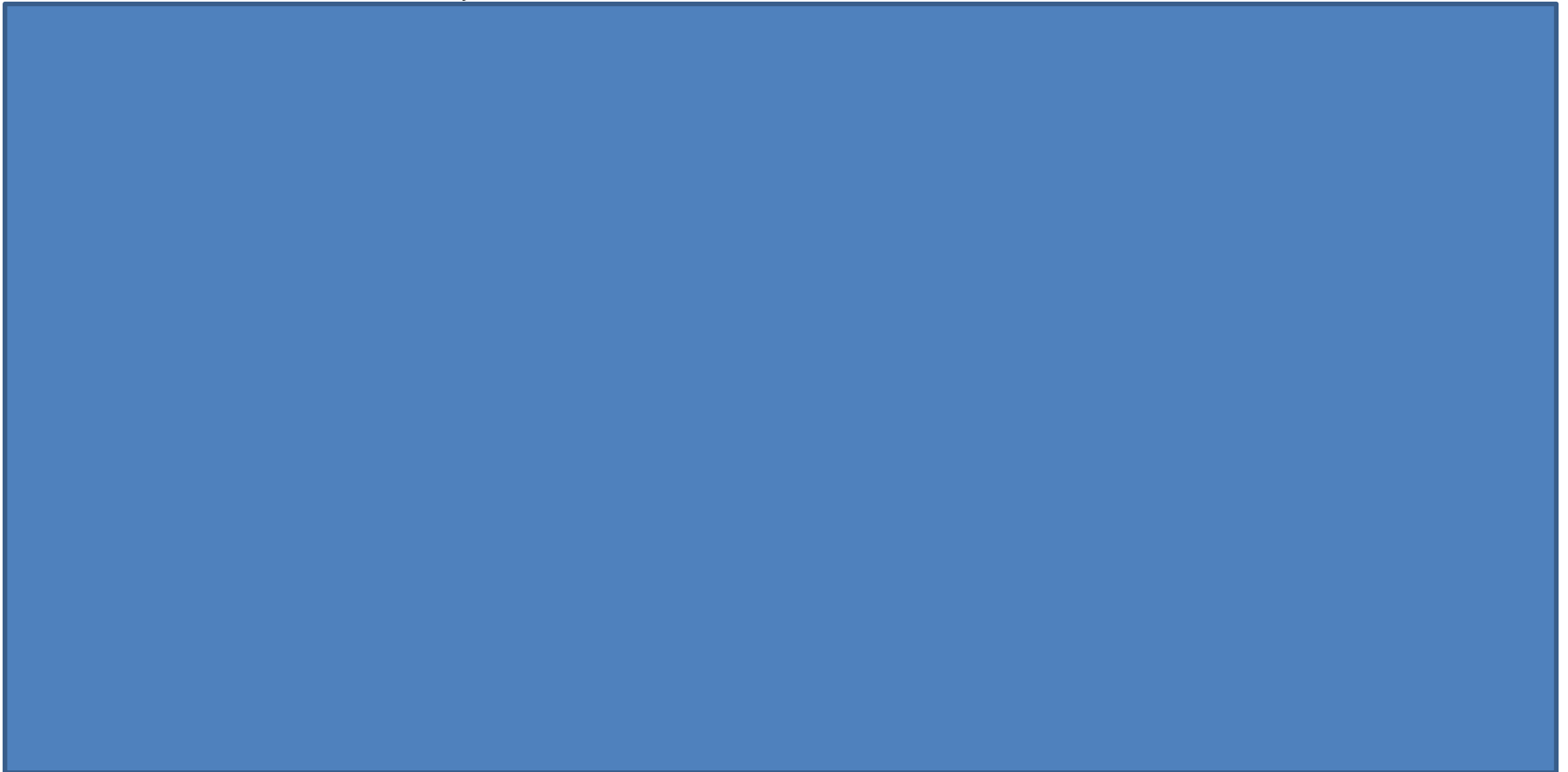
Per studenti di Fisica e Ingegneria

L'ultima edizione è la VII Edizione ma sono ok anche edizioni precedenti

Esempio 6

Un oggetto cade liberamente partendo da fermo. Determinare la posizione e la velocità dell'oggetto dopo 1,00; 2,00; 3,00 e 4,00 secondi.

Definiamo il nostro asse y di riferimento e scegliamo il punto di partenza all'origine.



Esempio 6

Un oggetto cade liberamente partendo da fermo. Determinare la posizione e la velocità dell'oggetto dopo 1,00; 2,00; 3,00 e 4,00 secondi.

Definiamo il nostro asse y di riferimento e scegliamo il punto di partenza all'origine.



La posizione y in funzione del tempo t è data dalla formula:

$$y(t) = V_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{Dove } g = 9,80 \text{ m/s}^2 \text{ e } V_0 = 0$$

Da cui si ricava per $s=1$: $y_1 = -\frac{1}{2} 9,80 = -4,90 \text{ m}$

E per la velocità si ricava: $V_1 = V_0 - g t = 0 - 9,80 = -9,80 \text{ m/s}$

Analogamente, applicando le stesse formule al caso $t=2,00$ s; $3,00$ s e $4,00$ s si ricava

$$y_2 = -\frac{1}{2} 9,80 \times 2^2 = -19,6 \text{ m}$$

$$y_3 = -\frac{1}{2} 9,80 \times 3^2 = -44,1 \text{ m}$$

$$y_4 = -\frac{1}{2} 9,80 \times 4^2 = -78,4 \text{ m}$$

$$V_2 = V_0 - gt = 0 - 9,80 \times 2 = -19,6 \text{ m/s}$$

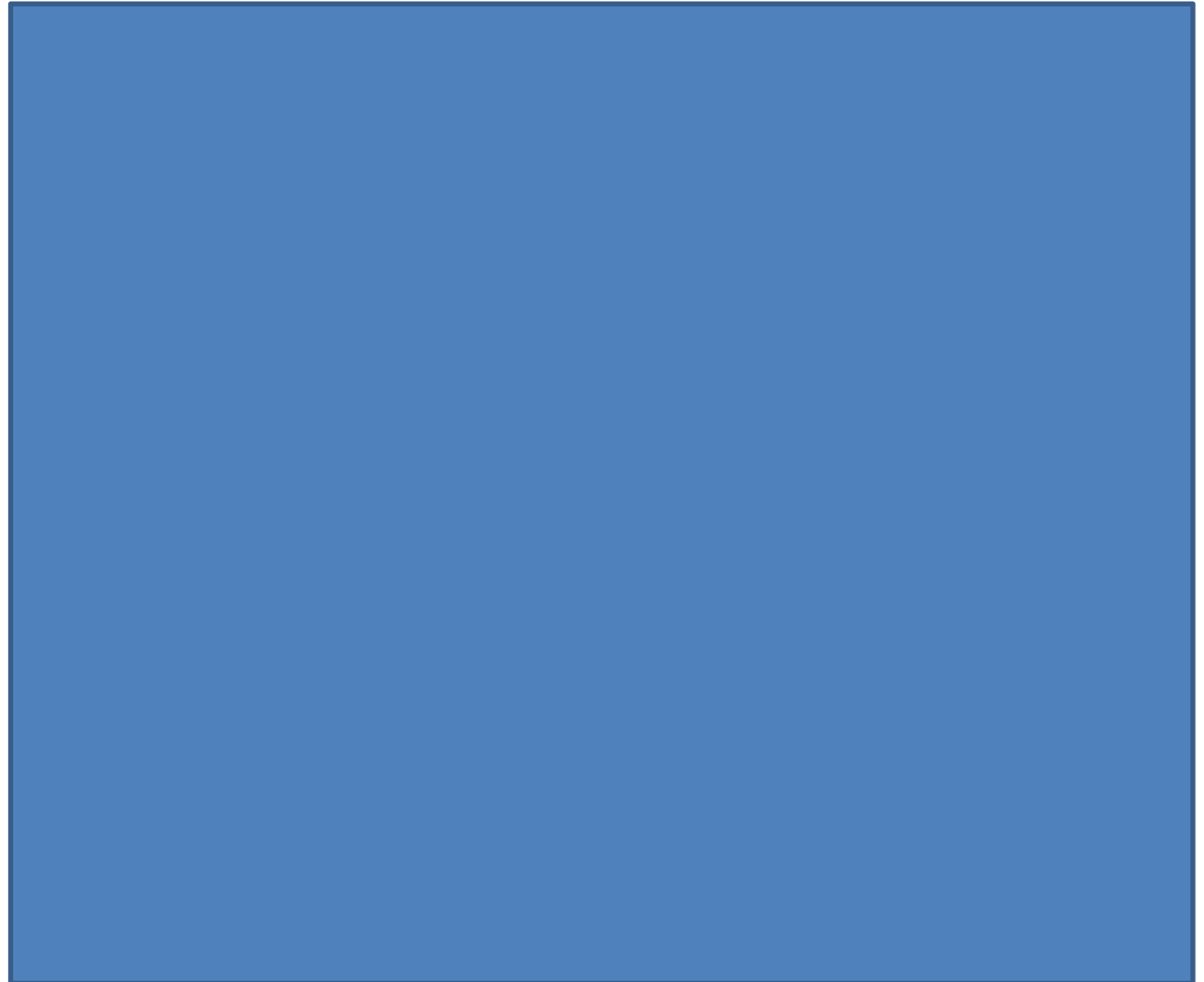
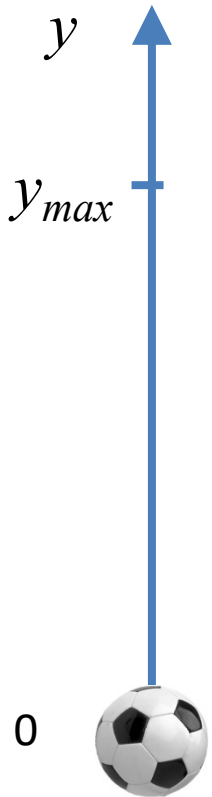
$$V_3 = V_0 - gt = 0 - 9,80 \times 3 = -29,4 \text{ m/s}$$

$$V_4 = V_0 - gt = 0 - 9,80 \times 4 = -39,2 \text{ m/s}$$

Esempio 7

Una palla è lanciata verticalmente verso l'alto dal suolo con una velocità di 29,4 m/s.

1° Quesito: Quanto tempo impiega la palla a raggiungere il suo punto più alto ?



Esempio 7

Una palla è lanciata verticalmente verso l'alto dal suolo con una velocità di 29,4 m/s.

1° Quesito: Quanto tempo impiega la palla a raggiungere il suo punto più alto ?

Dati del quesito:

$$V_0 = 29,4 \text{ m/s}$$

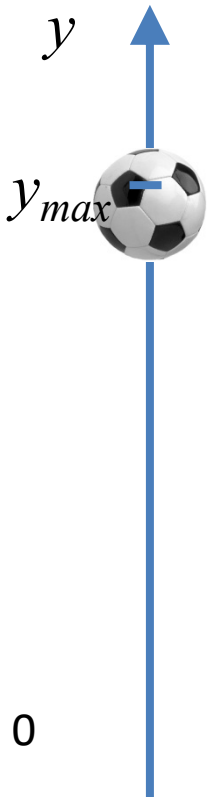
$$\text{Inoltre risulta evidente che } V(y_{\max}) = 0$$

Per ricavare il tempo t scriveremo:

$$v = v_0 - g t$$

$$t = (v_0 - v) / g$$

$$t = (29,4 - 0) \text{ m/s} / 9,8 \text{ m/s}^2 = 3,0 \text{ s}$$



2° Quesito: determinare la massima altezza y_{max} raggiunta dalla palla.



2° Quesito: determinare la massima altezza y_{max} raggiunta dalla palla.

Scriveremo:

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{dove: } v_0 = 29,4 \text{ m/s} \quad \text{e } t = 3,0 \text{ s}$$

Quindi:

$$y_{max} = 29,4 \times 3 - \frac{1}{2} 9,8 \times 3^2 = 88,2 - 44,1 = 44 \text{ m}$$

3° Quesito: A che istante la palla sarà ad una altezza y_k di 39,2 m dal suolo ?



3° Quesito: A che istante la palla sarà ad una altezza y_k di 39,2 m dal suolo ?

Scriveremo nuovamente:

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{dove: } v_0 = 29,4 \text{ m/s} \quad \text{e } y = 39,2 \text{ m}$$

Abbiamo quindi una equazione di secondo grado in t :

$$\frac{1}{2} g t^2 - v_0 t + y_k = 0$$

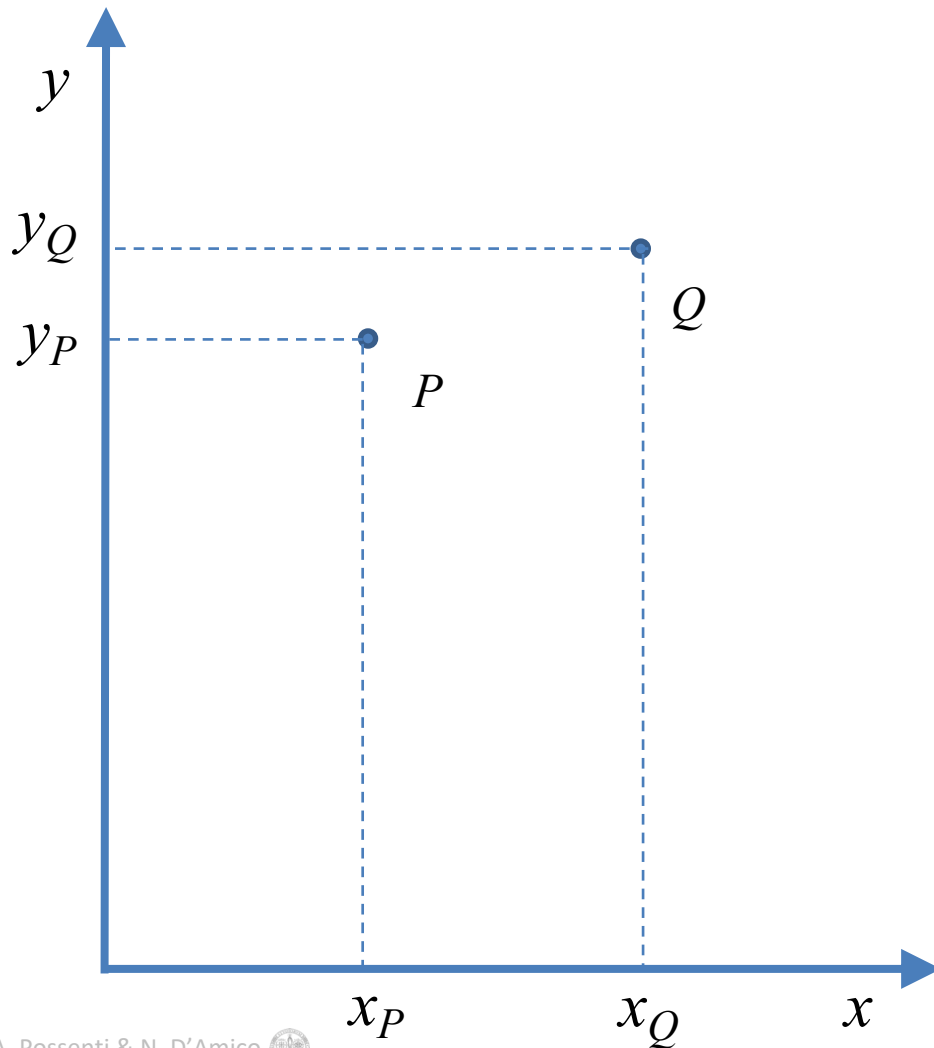
$$\begin{array}{ccccc} 4,9 t^2 & - & 29,4 t & + & 39,2 = 0 \\ \text{a} & & \text{b} & & \text{c} \end{array}$$

$$t = \frac{-b \pm (b^2 - 4ac)^{1/2}}{2a} \qquad (b^2 - 4ac)^{1/2} = 9,8$$

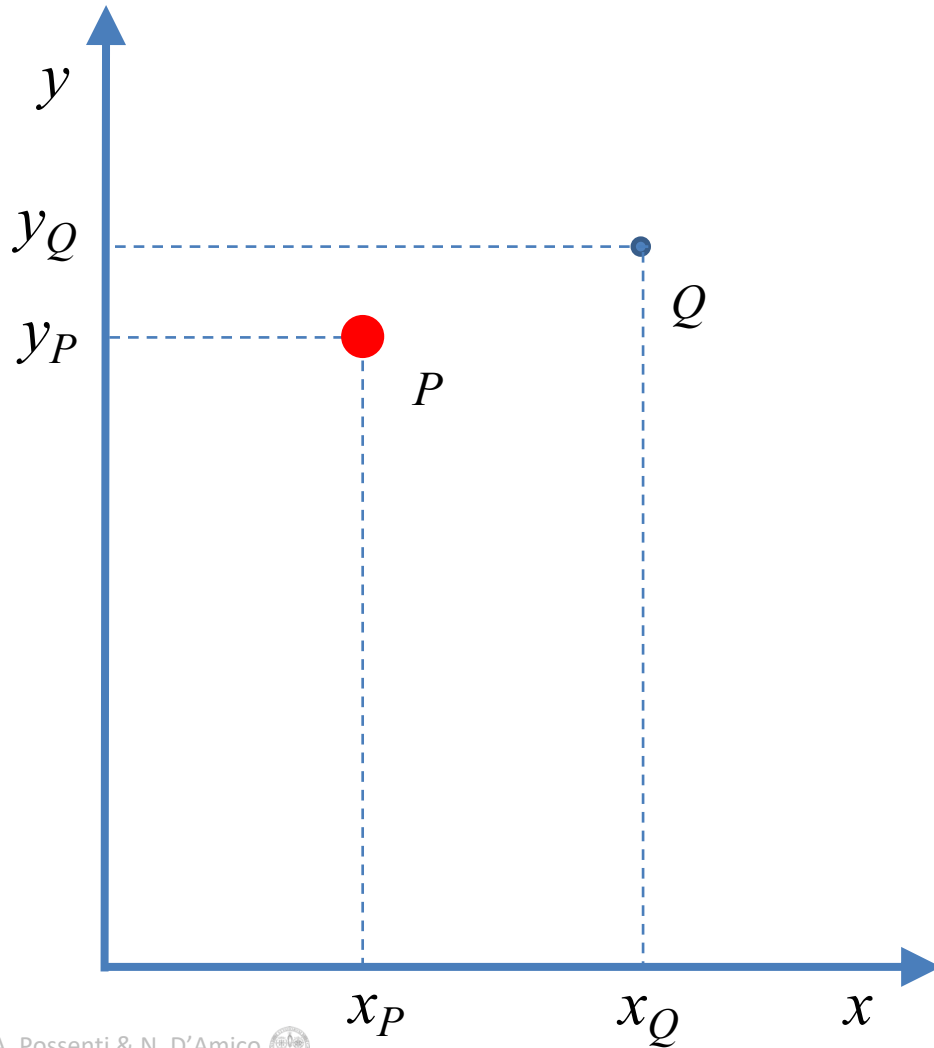
$$t = \frac{(29,4 \pm 9,8)}{9,8} \rightarrow t_1 = 2,0 \qquad t_2 = 4,0$$

Moti piani (moti in due dimensioni)

Consideriamo un punto materiale che si muove lungo una traiettoria curva dal punto P al punto Q nel piano x - y

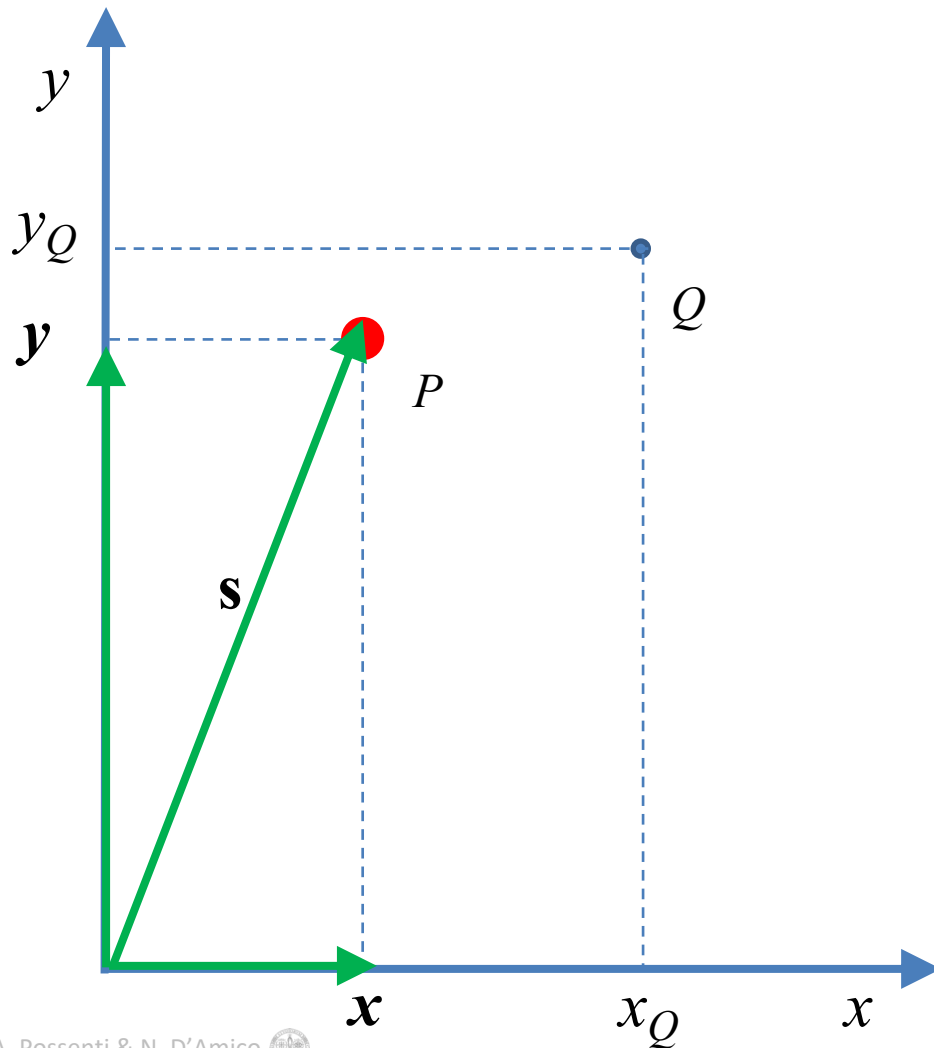


Consideriamo un punto materiale che si muove lungo una traiettoria curva dal punto P al punto Q nel piano x - y

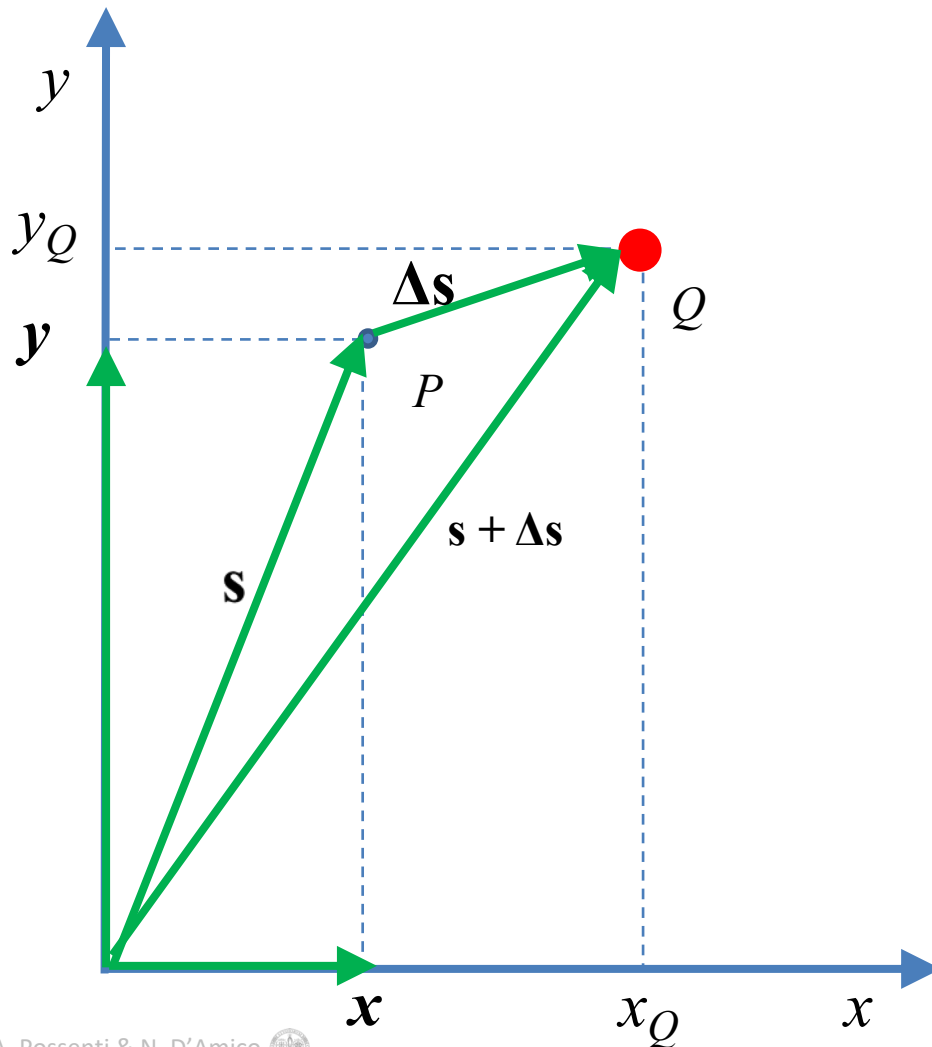


La posizione **iniziale** del punto materiale è individuata dal vettore **S** così definito:

$$\mathbf{s} = x + y = x_P \mathbf{i} + y_P \mathbf{j}$$



La posizione **finale** del punto materiale è individuata dal vettore risultante dalla somma vettoriale $\mathbf{s} + \Delta\mathbf{s}$



Pertanto la velocità media del nostro punto materiale durante Δt sarà :

$$\bar{\mathbf{v}} = \Delta\mathbf{s} / \Delta t$$

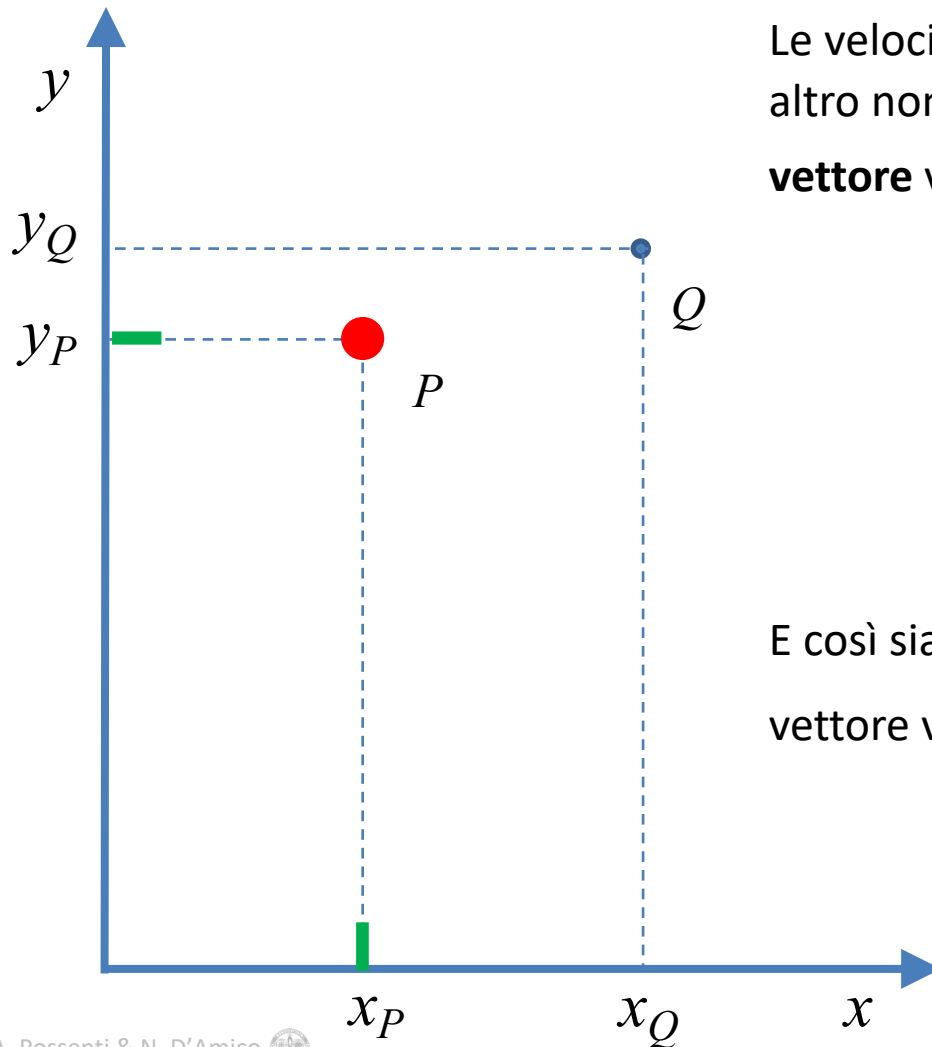
e la direzione e il verso di questo vettore saranno quelli del vettore $\Delta\mathbf{s}$

Applicando il solito processo al limite come abbiamo fatto ne caso unidimensionale:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta\mathbf{s} / \Delta t) = d\mathbf{s} / dt$$

Si, ma in pratica come si calcola la derivata di un vettore ?

E' facile rendersi conto che mentre il punto materiale si muove lungo la traiettoria **curva**, e cioè mentre il vettore **S** cambia direzione e modulo, le sue proiezioni sugli assi x e y si muovono di moto **rettilineo (ma non necessariamente uniforme)**.



Le velocità delle proiezioni, e cioè i **vettori** \mathbf{V}_x e \mathbf{V}_y altro non sono che le componenti ortogonali del **vettore** velocità \mathbf{V}

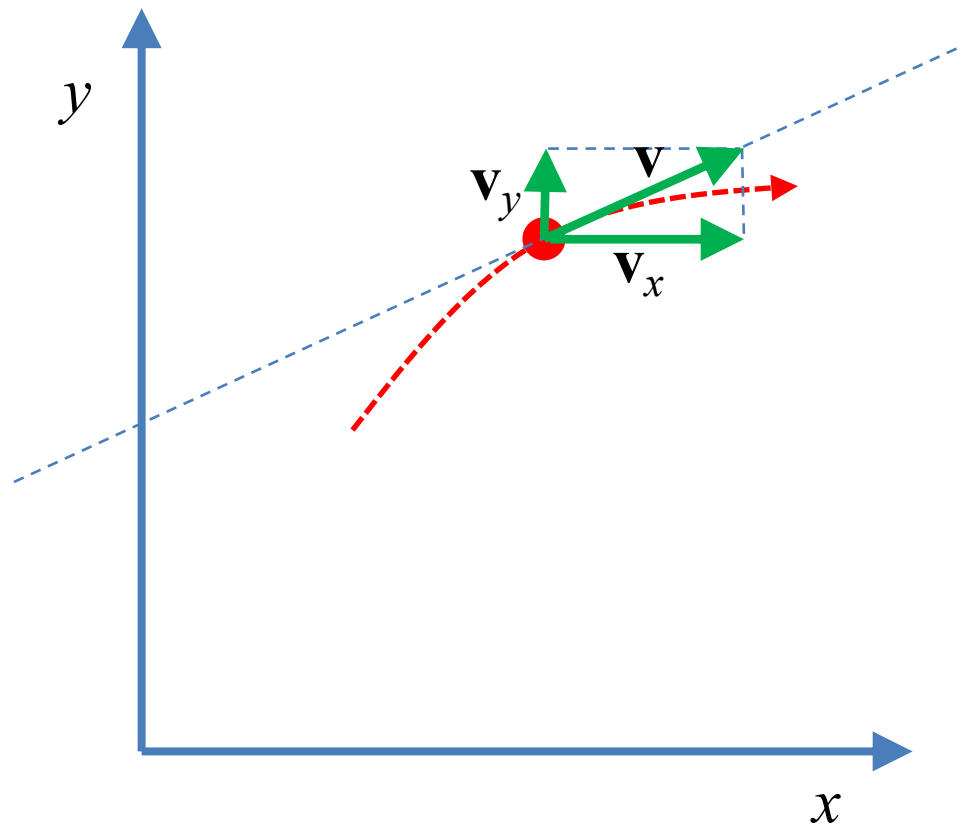
$$\mathbf{v}_x = dx/dt$$

$$\mathbf{v}_y = dy/dt$$

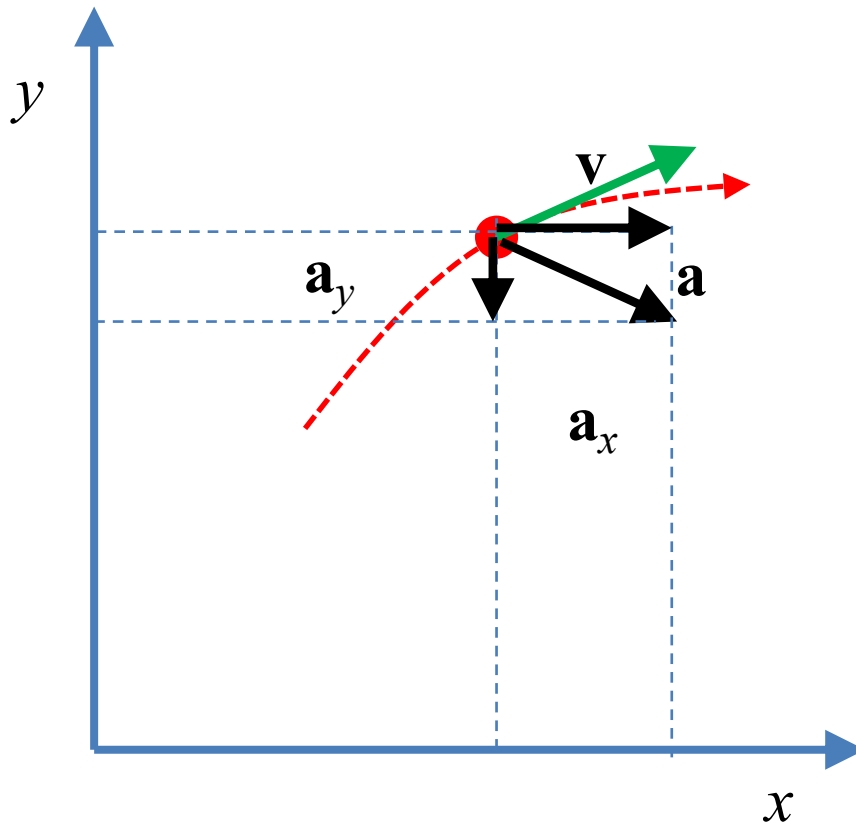
E così siamo in grado di calcolare la derivata del vettore velocità:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_x + \mathbf{v}_y$$

Quando un punto materiale si muove lungo una linea retta, il suo **vettore** velocità può avere qualsiasi modulo, ma è **sempre diretto lungo la retta**. Al contrario, quando un punto materiale si muove in un **piano**, il **vettore velocità può avere anche qualsiasi direzione**. E poiché la velocità lungo la curva è la somma vettoriale delle velocità componenti lungo gli assi x e y , il vettore velocità risulta sempre tangente alla curva in ciascun punto del moto.



In modo del tutto analogo possiamo scomporre il vettore accelerazione nelle sue componenti x e y e in sostanza l'accelerazione di un punto materiale che si muove in un piano lungo una traiettoria curva si ricava come somma vettoriale delle accelerazioni componenti.



$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y$$

$$\mathbf{a} = d\mathbf{v}_x/dt + d\mathbf{v}_y/dt$$

Quindi in sostanza, le stesse equazioni del moto che abbiamo applicato al caso unidimensionale (riducibile in sostanza ad una trattazione **scalare**) sono applicabili al caso bidimensionale (trattazione **vettoriale**), applicandole alle **componenti del vettore**.

Un caso interessante che possiamo trattare subito quindi è il caso di un moto in un piano con **accelerazione costante**, di cui abbiamo già trattato il caso unidimensionale.

Avevamo visto che nel caso unidimensionale l'equazione del moto per **$\mathbf{a} = \text{costante}$** era:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{a} t^2$$

Dovendo essere \mathbf{a}_x e \mathbf{a}_y **costanti** (il vettore **\mathbf{a}** si mantiene immutato nel tempo)

avremo per le due componenti del moto x e y :

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \\ y(t) &= y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{s}(t) = \mathbf{s}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{a} t^2$$

Il caso descritto è con buona approssimazione rappresentativo dei

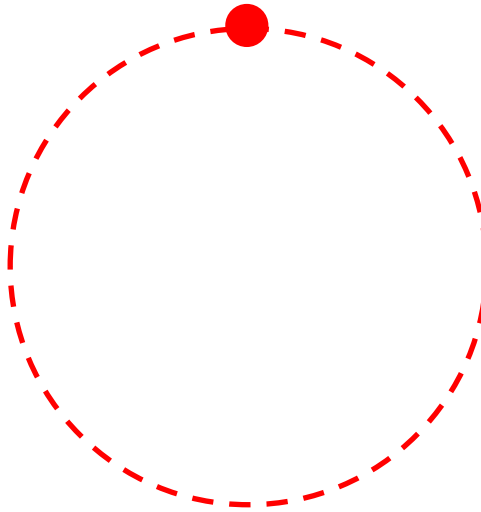
Moto di un proiettile

Con piccole correzioni dovute alla presenza dell'atmosfera, questa equazione purtroppo è quella che viene utilizzata nei bombardamenti!

Moto circolare uniforme

Consideriamo adesso il caso di un punto che si muove di moto circolare uniforme:

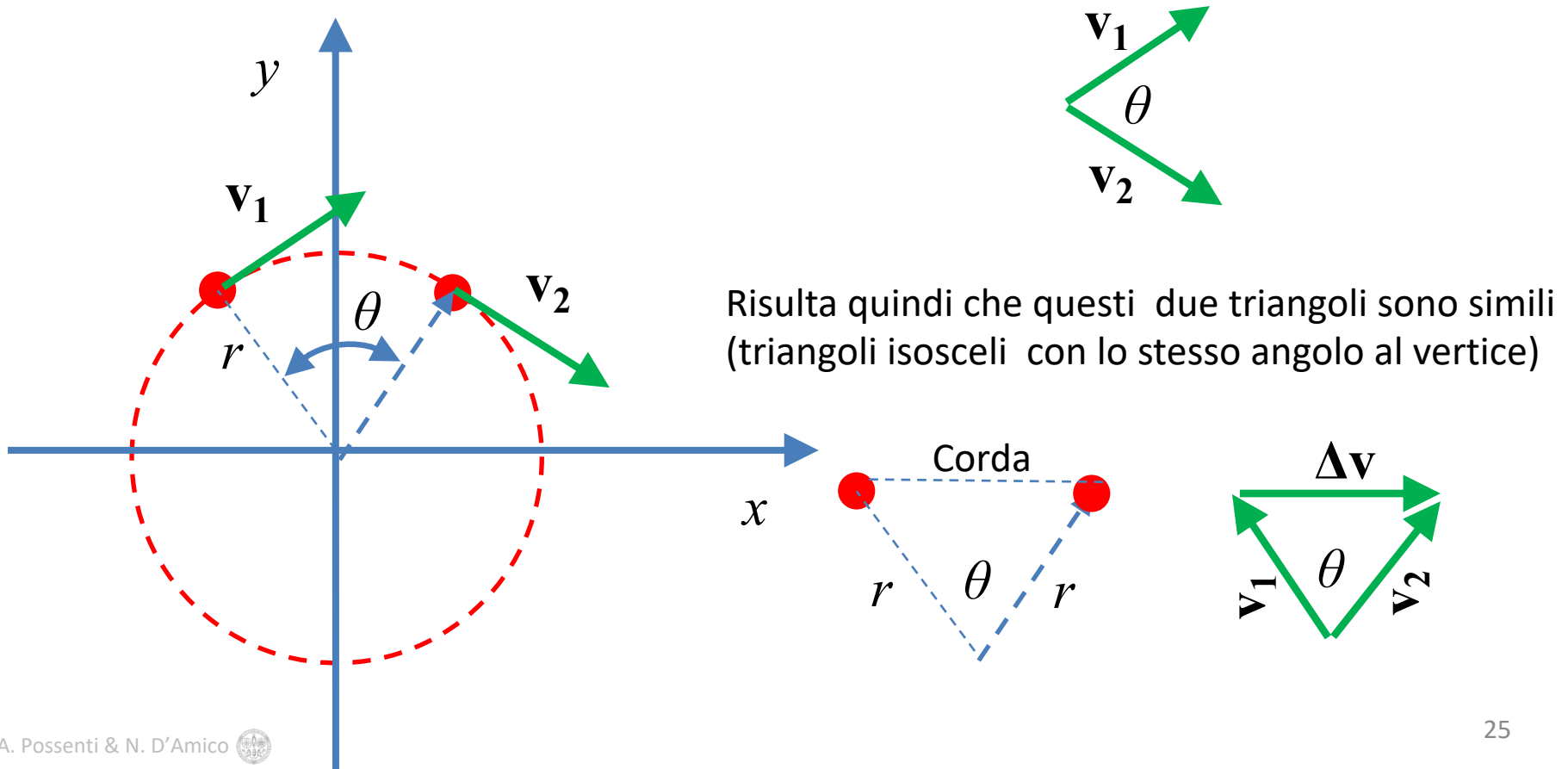
Intendiamo il moto lungo una circonferenza di raggio r con **velocità costante in modulo**.

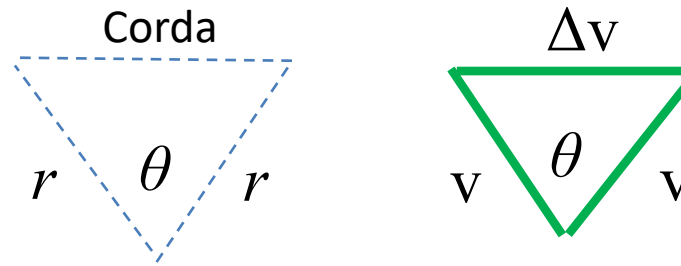


E' ovvio che, sebbene il vettore velocità \mathbf{v} sia costante in modulo, esso cambia con continuità in direzione. Esiste quindi un vettore accelerazione \mathbf{a} che vogliamo calcolare

Piazziamo la nostra orbita circolare all'origine di un sistema di assi cartesiani, consideriamo due istanti t_1 e t_2 in cui il punto si trova in posizioni simmetriche rispetto all'asse y , e definiamo con θ l'angolo fra i due vettori posizione agli istanti t_1 e t_2

Poiché ad ogni istante il **vettore** velocità è tangente alla circonferenza, e cioè risulta **ortogonale** al raggio, risulta che l'angolo fra i due vettori \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 è $= \theta$





Trattandosi di triangoli simili, i lati corrispondenti saranno proporzionali:

$$\text{Corda} / r = \Delta v / v$$

Considerando un processo al limite in cui $\theta \rightarrow 0$ si ha:

$$\text{«Corda»} \rightarrow v dt$$

Da cui risulta:

$$\Delta v / v = v \Delta t / r$$

$$\Delta v / \Delta t = v^2 / r \quad \rightarrow a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta v / \Delta t) = v^2 / r$$

Accelerazione centripeta:

$$a = v^2 / r$$

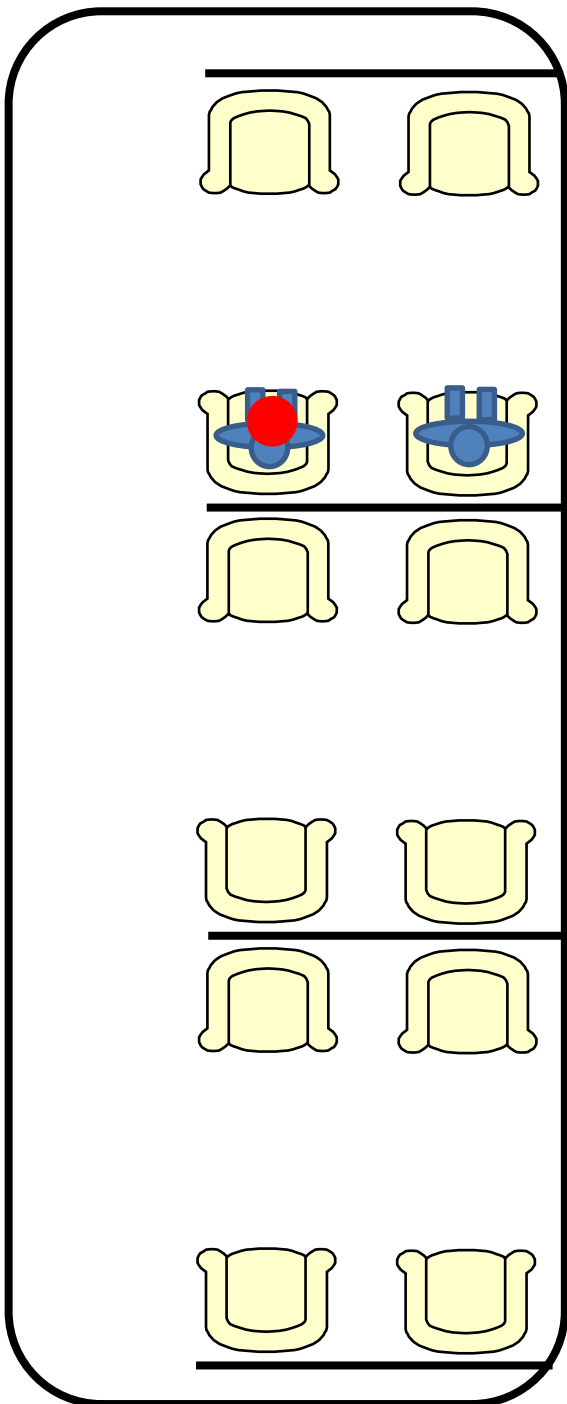
Sistemi di riferimento inerziali e moti relativi

Abbiamo introdotto varie grandezze fisiche fondamentali, la posizione di un punto materiale, la sua velocità, l'accelerazione, abbiamo introdotto anche il formalismo vettoriale, etc... e lo abbiamo fatto utilizzando liberamente un **sistema di riferimento**, cioè un sistema di coordinate, tipicamente un sistema di assi cartesiani X-Y.

Adesso vale la pena di approfondire un po' questa questione dei sistemi di riferimento.

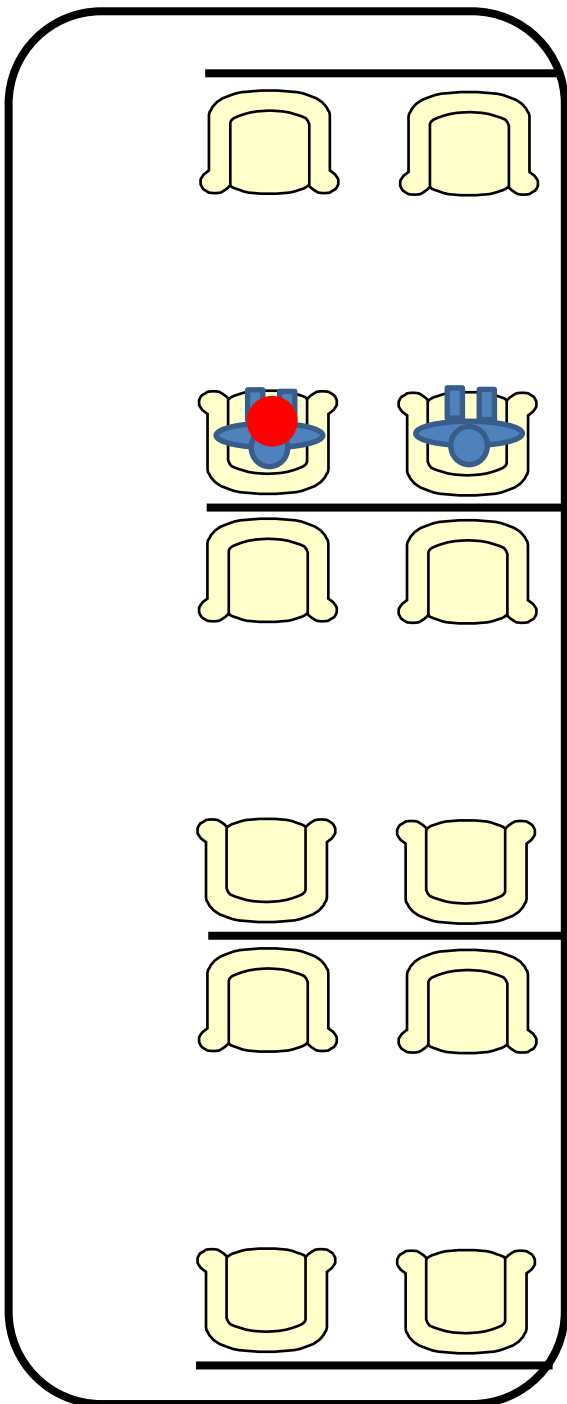
Supponiamo di essere a bordo di un treno che si muove con velocità costante V lungo un tratto rettilineo: il treno cioè si muove di **moto rettilineo uniforme**. Come in figura:

Velocità $v = \text{costante}$



Siamo seduti e abbiamo in mano una palla da tennis. Vorremmo lanciarla al nostro vicino di posto, imprimendole quindi una velocità ortogonale a quella del treno.

← Cioè vorremmo fare una cosa così



$v = 200 \text{ km/h}$

Ma siamo sicuri che mentre la palla si muove da sinistra verso destra, il treno che si muove ad alta velocità non le «scappa sotto»

← E magari succede una cosa così ?

COSA NE PENSATE ?

Si osserva che se il treno è in moto rettilineo uniforme, e cioè **NON** è soggetto ad alcuna **accelerazione**, non c'è nessun esperimento che possiamo fare a bordo che ci dia informazioni sulla velocità del treno.

E infatti, l'unica informazione che abbiamo sul fatto che il treno è in moto, ci viene dal panorama che osserviamo dai finestrini. Se li chiudiamo, noi a tutti gli effetti **NON** possiamo affermare se il treno è fermo o è in moto.

Tutti gli esperimenti che faremo a bordo del treno, e che riferiremo rispetto ad un **sistema di riferimento ad esso solidale**, daranno gli stessi risultati, sia che il treno sia fermo, sia che sia in moto rettilineo uniforme.

Un sistema di riferimento del genere si chiama

Sistema Inerziale

Un osservatore a bordo del treno osserverà che:

La pallina da tennis si muove lungo la direzione **trasversale** di moto **accelerato** mentre possiede velocità **zero** lungo la direzione **longitudinale** del treno

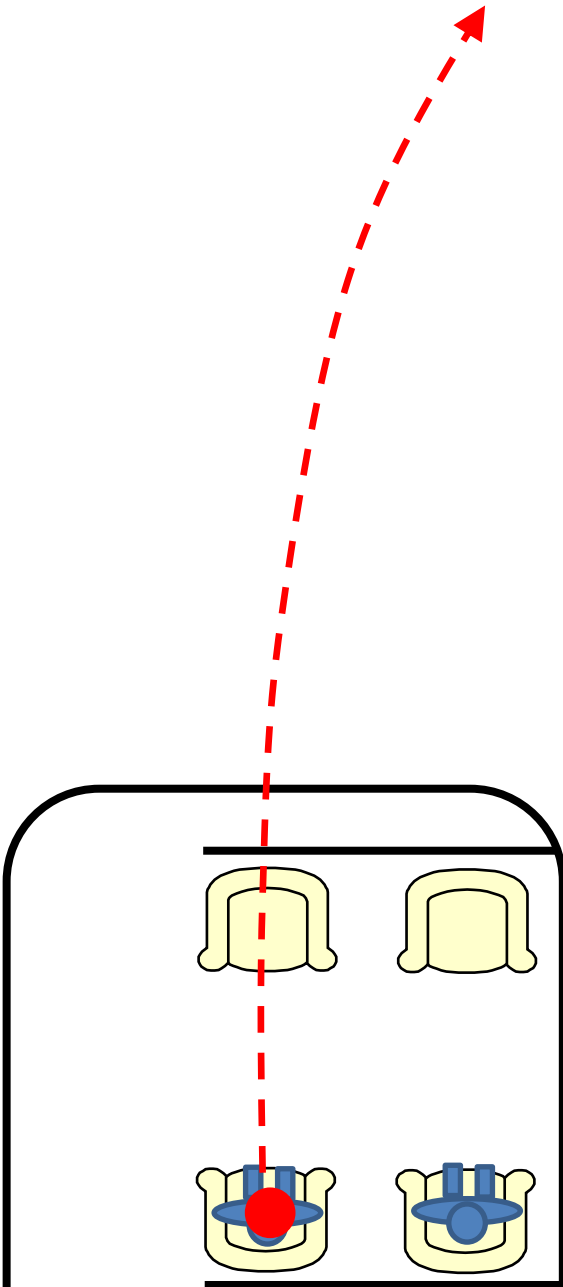
Allo stesso tempo, un **osservatore** a terra fuori dal treno che ne osserva il moto longitudinale, misurerà invece una **velocità** della pallina da tennis **pari a quella del treno**

In sostanza: i due osservatori NON concordano sulla velocità longitudinale della pallina

E riguardo al moto **trasversale** della pallina, quello che da dentro risulta accelerato, cosa si osserverà da fuori ?

Si osserva esattamente lo stesso moto accelerato !

Quindi: due osservatori situati in due sistemi **inerziali**, **concordano** sulla misura delle **accelerazioni** ma **NON** sulla misura delle **velocità**.



ESERCIZI

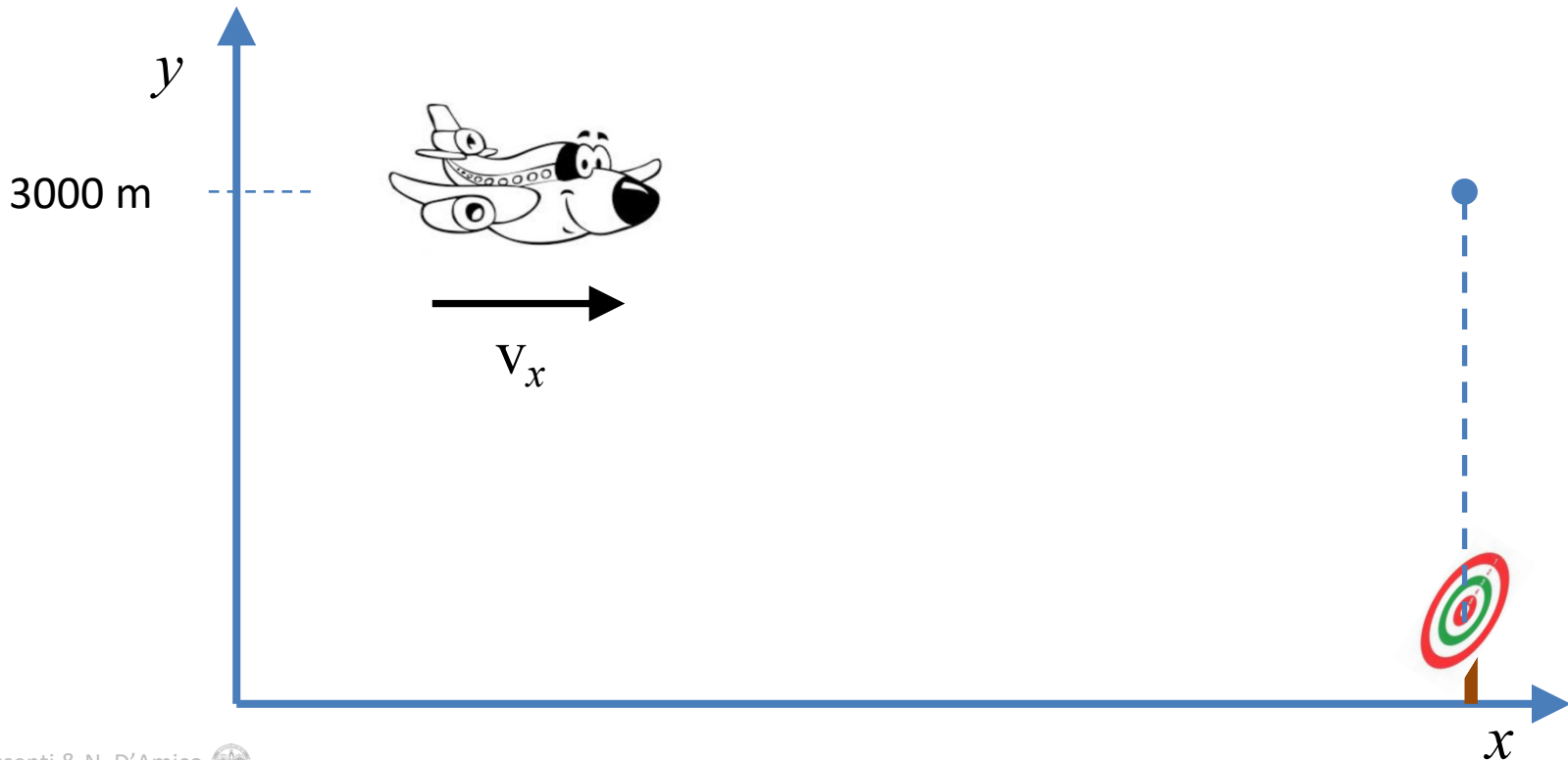
Moti di caduta

Esempio 1

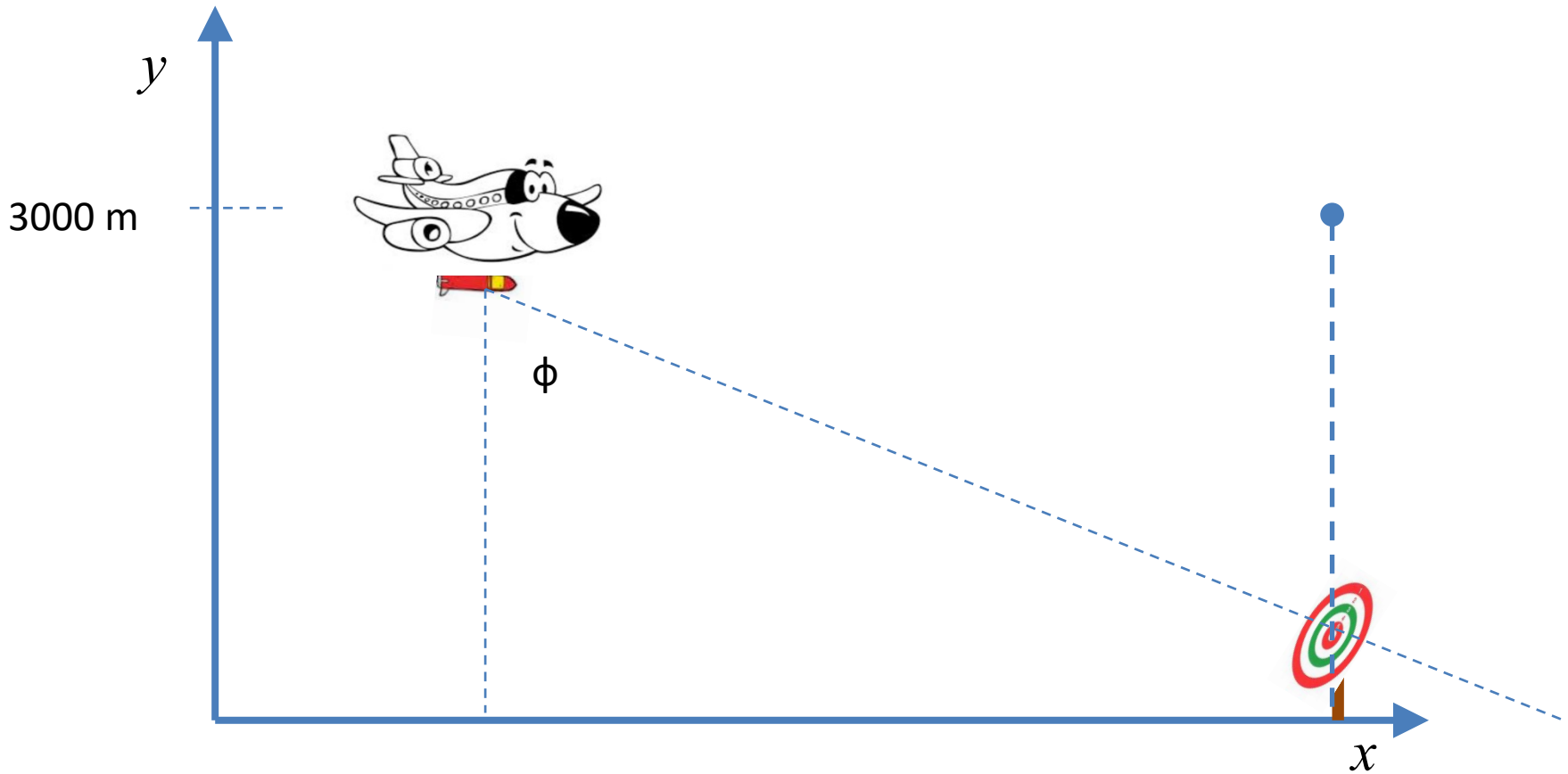
Un bombardiere vola con velocità orizzontale V_x costante di 400 km/h ad una altezza di 3000 m dirigendosi verso un punto che si trova esattamente sulla verticale del suo bersaglio.

Quesito: a quale angolo di vista ϕ deve essere sganciato il proiettile per colpire il bersaglio ?

Definiamo il quesito in un sistema di assi cartesiani di riferimento x - y



Quello che ci aspettiamo è una cosa del genere,



e siamo interessati alla determinazione dell'angolo di vista ϕ al quale deve essere sganciato il proiettile

La velocità iniziale V_0 del proiettile al momento in cui viene sganciato avrà le seguenti componenti:

$$V_{0x} = 400 \text{ km/h} = 111 \text{ m/s}$$

$$V_{0y} = 0$$

Il tempo t di **caduta** del proiettile è **connesso** alla **quota** della caduta y dall'equazione:

$$y = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{dove } v_{0y} = 0 \quad \text{e } y_0 = 3,00 \times 10^3 \text{ m}$$

Siccome quando arriva a terra la quota del proiettile è $y = 0$, segue:

$$t = [-2(-y_0)/g]^{1/2} \rightarrow (-2(-3000) \text{ m} / 9,80 \text{ m/s}^2)^{1/2} = 24,8 \text{ s}$$

La distanza orizzontale x percorsa dal proiettile durante questo tempo t sarà:

$$x(t) = v_{0x} t = 111 \text{ m/s} \times 24,8 \text{ s} = 2,75 \times 10^3 \text{ m}$$

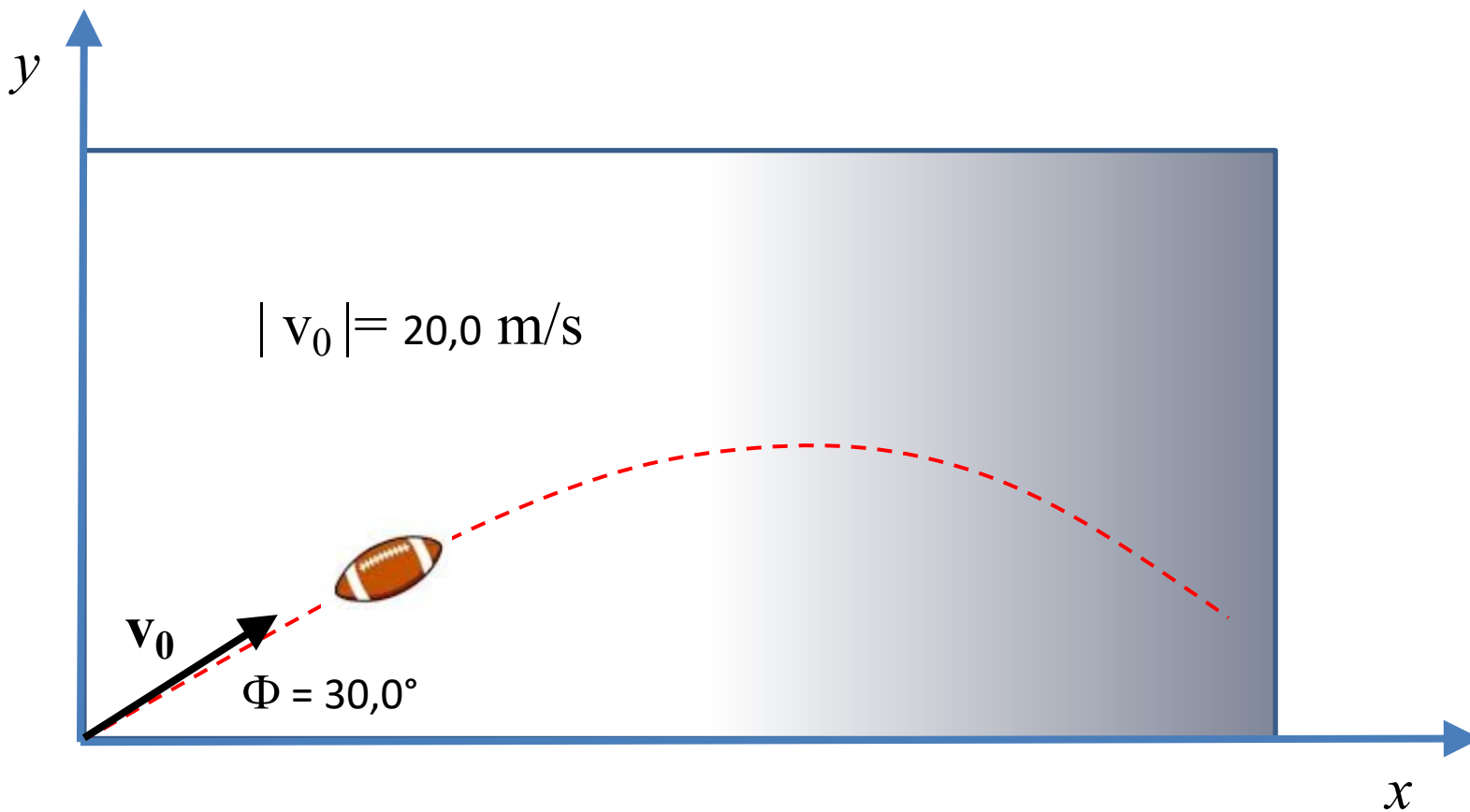
L'angolo sarà $\phi = \arctan (x/y) = \arctan (2750/3000) = 42,5^\circ$

Esempio 2

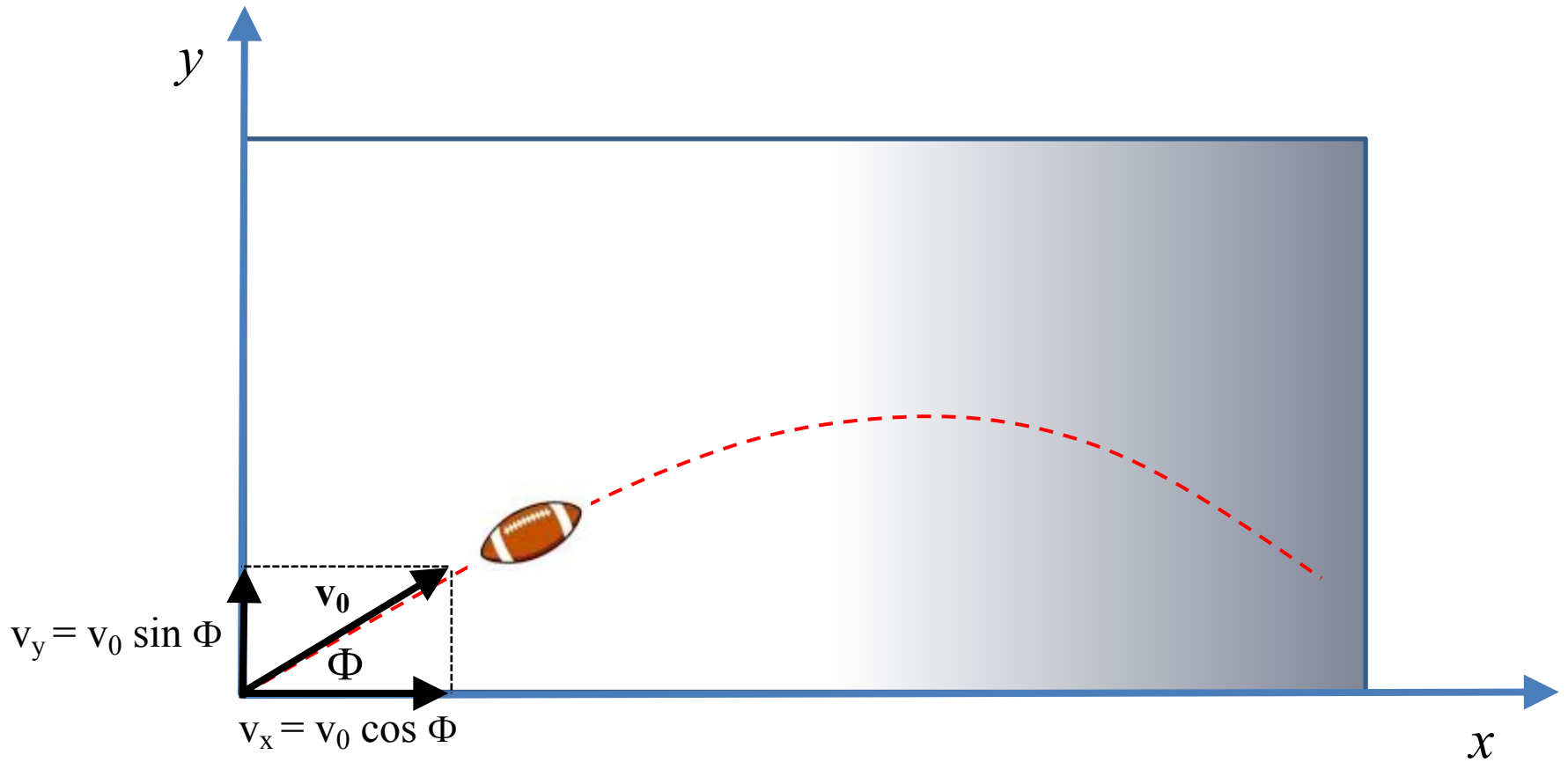
Un giocatore di calcio colpisce una palla ad un angolo di $30,0^\circ$ con l'orizzontale, imprimendo una velocità iniziale di $20,0 \text{ m/s}$.



Per rispondere ai quesiti, supporremo che il moto della palla avviene in un piano verticale.



1° Quesito: Trovare l'istante t in cui la palla raggiunge il punto più alto della sua traiettoria



1° Quesito: Trovare l'istante t in cui la palla raggiunge il punto più alto della sua traiettoria

Nel punto più alto, la componente verticale della velocità (V_y) è zero. Scriveremo quindi:

$$v_y = v_0 \sin \Phi - gt \quad \rightarrow \quad v_0 \sin \Phi - gt = 0$$

Da cui ricaveremo:

$$t = v_0 \sin \Phi / g \quad \text{dove: } \Phi = 30^\circ \quad v_0 = 20,0 \text{ m/s} \quad g = 9,80 \text{ m/s}^2$$

$$t = [20,0 \times \frac{1}{2}] \text{ m/s} / 9,80 \text{ m/s}^2 = 1,02 \text{ s}$$

2° Quesito: Qual è l'altezza massima y_m raggiunta dalla palla ?

2° Quesito: Qual è l'altezza massima y_m raggiunta dalla palla ?

Scriveremo:

$$y = (v_0 \sin \Phi) t - \frac{1}{2} g t^2$$

L'altezza massima, come risulta dal 1° quesito, si raggiunge a $t = 1,02$ S

Quindi :
$$y_m = ([20,0 \times \frac{1}{2}] \text{ m/s}) \times 1,02 \text{ s} - \frac{1}{2} (9,80 \text{ m/s}^2) \times (1,02 \text{ s})^2 = 5,00 \text{ m}$$

3° Quesito: Qual è lo spostamento **orizzontale** della palla e per quanto tempo rimane in aria ?

3° Quesito: Qual è lo spostamento **orizzontale** della palla e per quanto tempo rimane in aria ?

Scriviamo nuovamente l'equazione per la componente **verticale** del moto con quota iniziale

$$y_0 = 0$$

$$y = (v_0 \sin \Phi) t - \frac{1}{2} g t^2$$

Riflettiamo sul fatto che lo spostamento in orizzontale richiesto si raggiunge quando la palla raggiunge una quota y uguale a quella iniziale e cioè $y(t) = 0$. La formula pertanto si riduce a:

$$(v_0 \sin \Phi) t - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \rightarrow (v_0 \sin \Phi) t = \frac{1}{2} g t^2$$

$$(v_0 \sin \Phi) = \frac{1}{2} g t$$

$$t = 2 (v_0 \sin \Phi) / g$$

$$t = (40,0 \text{ m/s} \times \frac{1}{2}) / 9,80 \text{ m/s}^2 = 2,04 \text{ s}$$

Per lo spostamento orizzontale scriveremo:

$$x = v_x t = (v_0 \cos \phi) t = 20,0 \text{ m/s} \times \frac{1}{2} \sqrt{3} \times 2,04 = 35,0 \text{ m}$$

4° Quesito: Qual è la velocità della palla quando tocca terra ?

In sostanza, per definire il **vettore** velocità in questione dobbiamo ricavare le sue componenti v_x e v_y per le quali potremo scrivere:

$$v_x = (v_0 \cos \phi)$$

$$v_y = v_0 \sin \phi - gt$$

Dove: $t = 2,04$ s, e quindi:

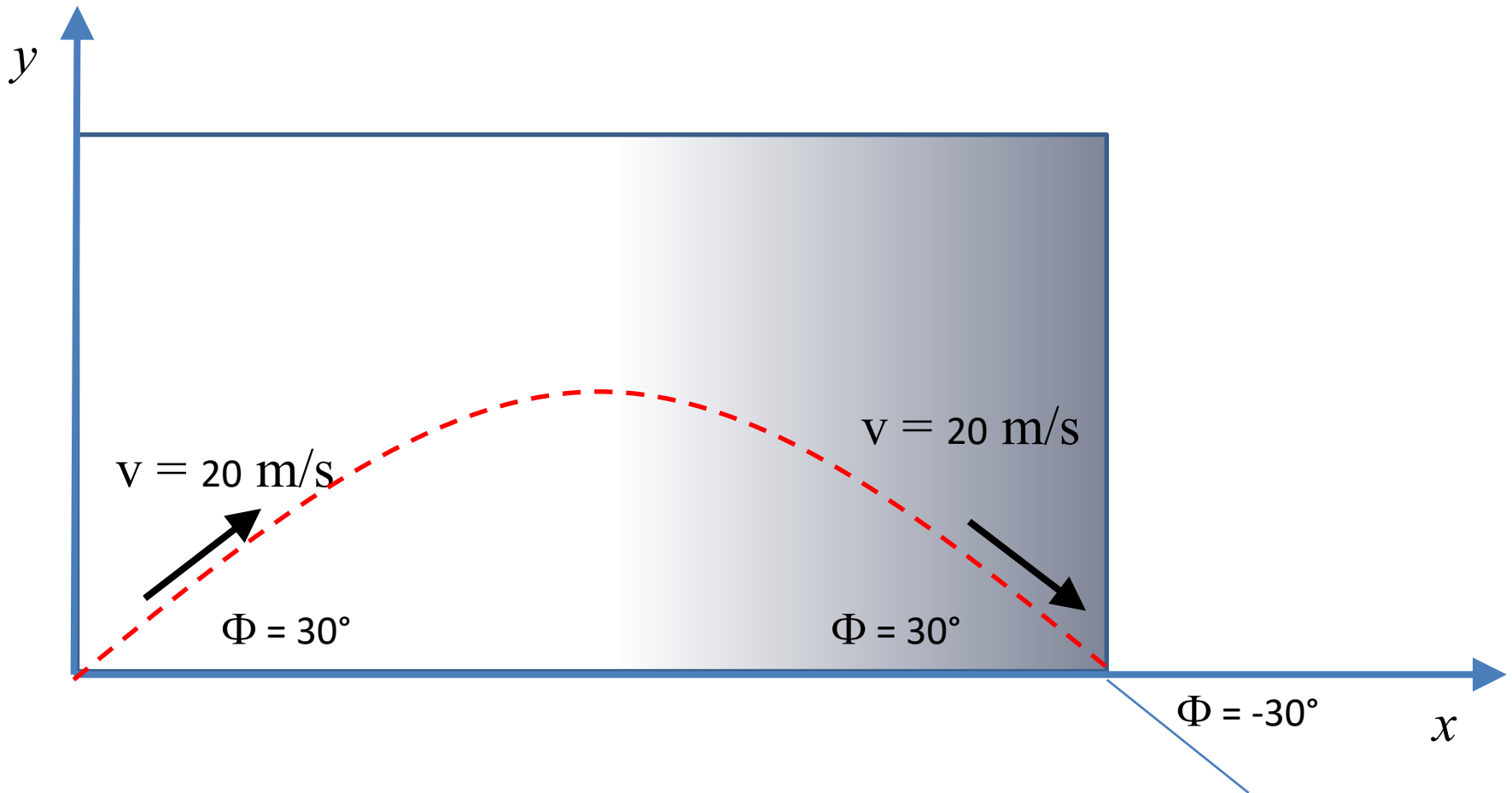
$$v_x = (v_0 \cos \phi) = 20,0 \text{ m/s} \times \frac{1}{2} \sqrt{3} = 17,3 \text{ m/s}$$

$$v_y = v_0 \sin \phi - gt = 20,0 \text{ m/s} \times \frac{1}{2} - (9,80 \text{ m/s}^2) \times 2,04 \text{ s} = -10,0 \text{ m/s}$$

$$v = (v_x^2 + v_y^2)^{1/2} = 20,0 \text{ m/s}$$

$$\phi = \arctan (v_y / v_x) = \arctan (-10,0 / 17,3) = -30,0^\circ$$

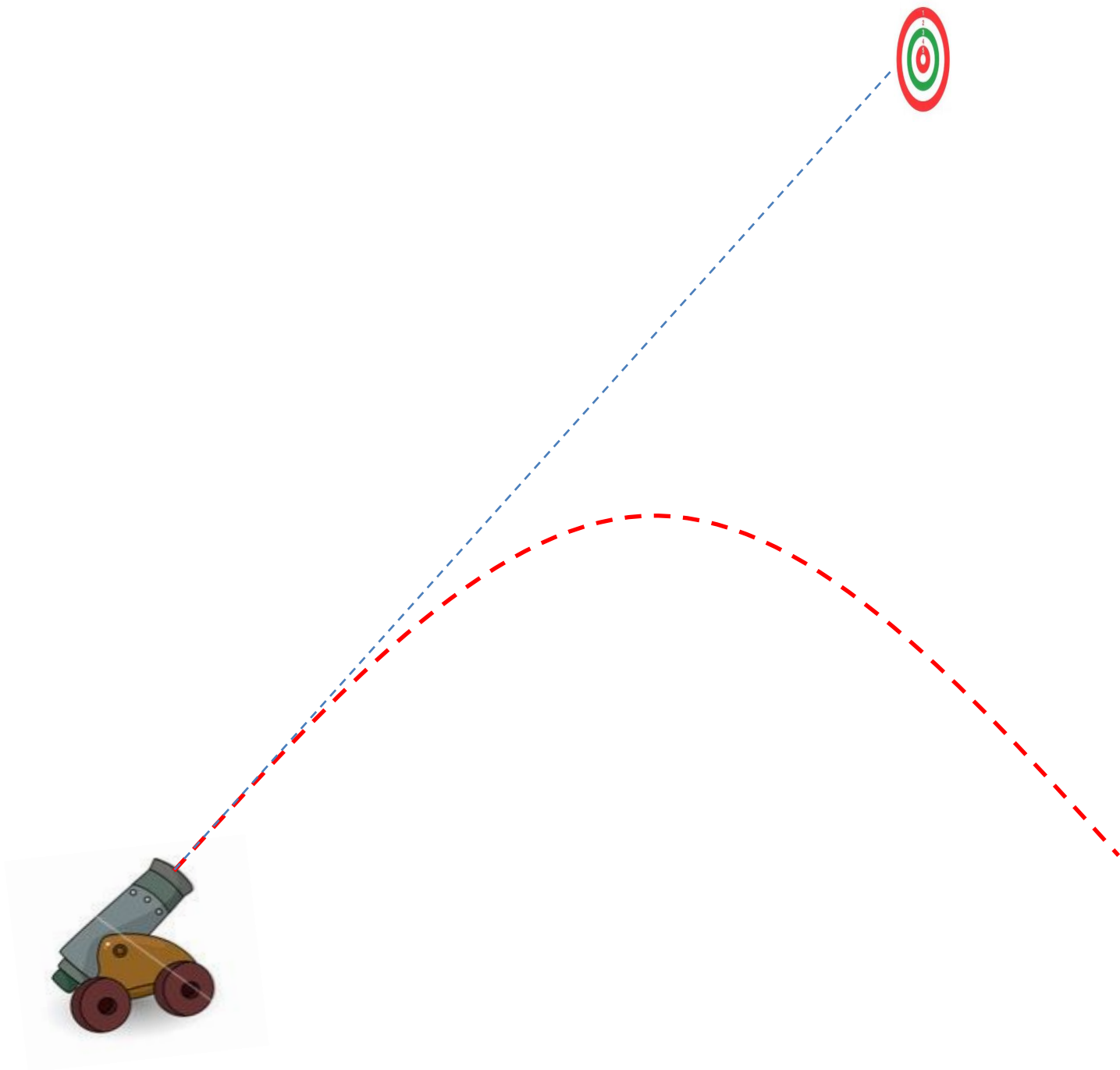
Risultato prevedibile in base a semplici considerazioni di **simmetria** .

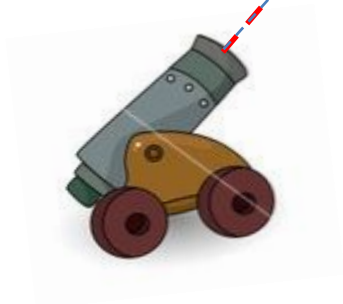


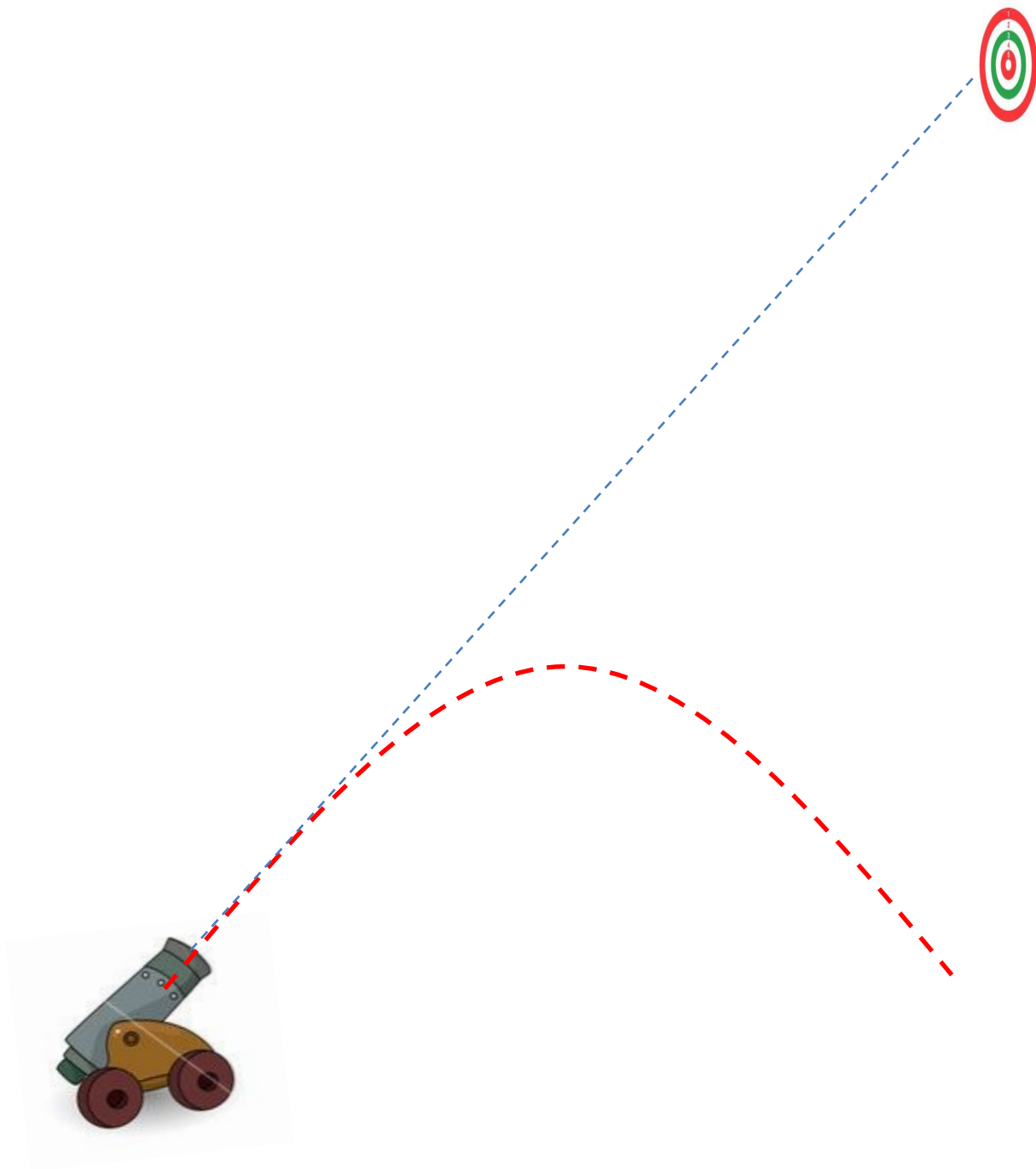
Esempio 3

Un cannone viene puntato verso un bersaglio posto ad una altezza h che, attraverso un semplice meccanismo, viene abbandonato in caduta libera **esattamente quando il proiettile lascia la bocca del cannone.**

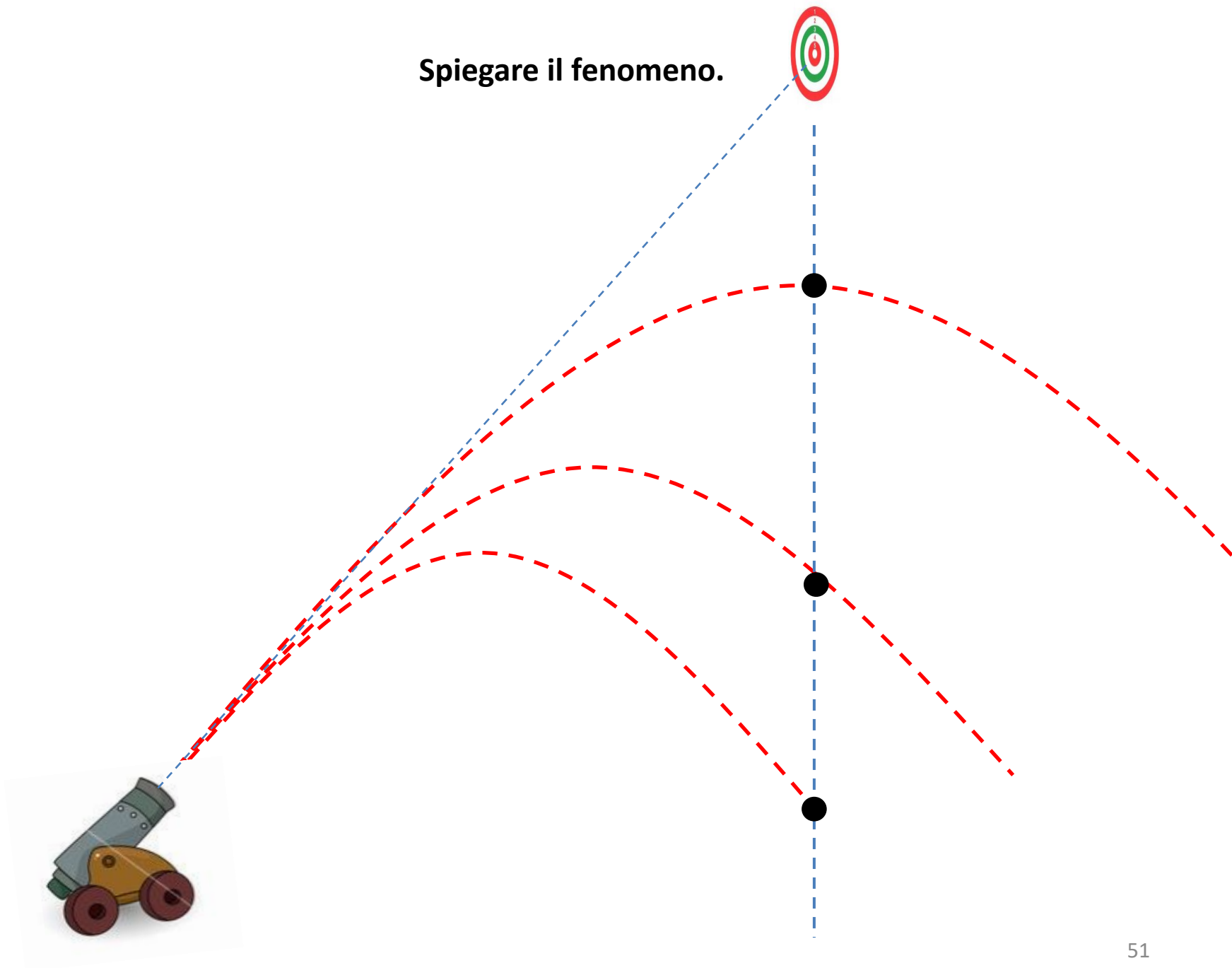
Si osserva che: qualunque sia la velocità iniziale del proiettile, esso colpisce sempre il bersaglio.







Spiegare il fenomeno.



Come spiegare il fenomeno ?



Faremo le seguenti considerazioni: se **non** intervenisse

l'accelerazione dovuta alla **gravità**:

- a) Il bersaglio non cadrebbe
- b) Il proiettile si muoverebbe in linea
retta verso il bersaglio



In un dato tempo t , il proiettile cade verso il basso
di una distanza $-\frac{1}{2}gt^2$ dalla posizione che
avrebbe avuto lungo la linea retta di volo

