Lezione III

(Cinematica: grafici e alcuni esempi)

© A. Possenti & N. D'Amico

FRUIZIONE E UTILIZZO DEI MATERIALI DIDATTICI

- **E' vietata** la **copia**, la **rielaborazione**, la **riproduzione** dei contenuti e immagini presenti nelle lezioni in qualsiasi forma

- **E' inoltre vietata** la **diffusione**, la **redistribuzione** e la **pubblicazione** dei contenuti e immagini, incluse le registrazioni delle videolezioni con qualsiasi modalità e mezzo non autorizzati espressamente
dall'autore o da Unica

Velocità media

Se un punto materiale ad un dato istante t_1 si trova nella posizione $\mathbf{r_1}$ e ad un altro dato istante t_2 si trova nella posizione $\mathbf{r_2}$

$$\overline{\mathbf{v}} = (\mathbf{r_2} - \mathbf{r_1}) / (t_2 - t_1) = \mathbf{\Delta r} \;/\; \Delta t \qquad \mathrm{m/s}$$

Velocità istantanea

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} (\mathbf{\Delta r}/\Delta t) = \mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}$$

Accelerazione media

Se un punto materiale ad un dato istante t_1 si muove con velocità $\mathbf{v_1}$ e ad un altro dato istante t_2 si muove con velocità $\mathbf{v_2}$

$$\overline{\mathbf{a}} = (\mathbf{v_2} - \mathbf{v_1}) / (t_2 - t_1) = \overline{\mathbf{\Delta v}} \;/\; \Delta t \qquad \mathbf{m/s^2}$$

Accelerazione istantanea

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} (\mathbf{\Delta v}/\Delta t) = \mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$$

© A. Possenti & N. D'Amico

Dalle relazioni:

$a_x = dv_x/dt$ $a_y = dv_y/dt$ $a_z = dv_z/dt$

e dalle:

$v_x = dx/dt$ $v_y = dy/dt$ $v_z = dz/dt$

Risulta:

$$\mathbf{a} = \begin{matrix} a_x = dv_x/dt = d^2x/dt^2 \\ a_y = dv_y/dt = d^2y/dt^2 \\ a_z = dv_z/dt = d^2z/dt^2 \end{matrix} = d^2\mathbf{r}/dt^2$$

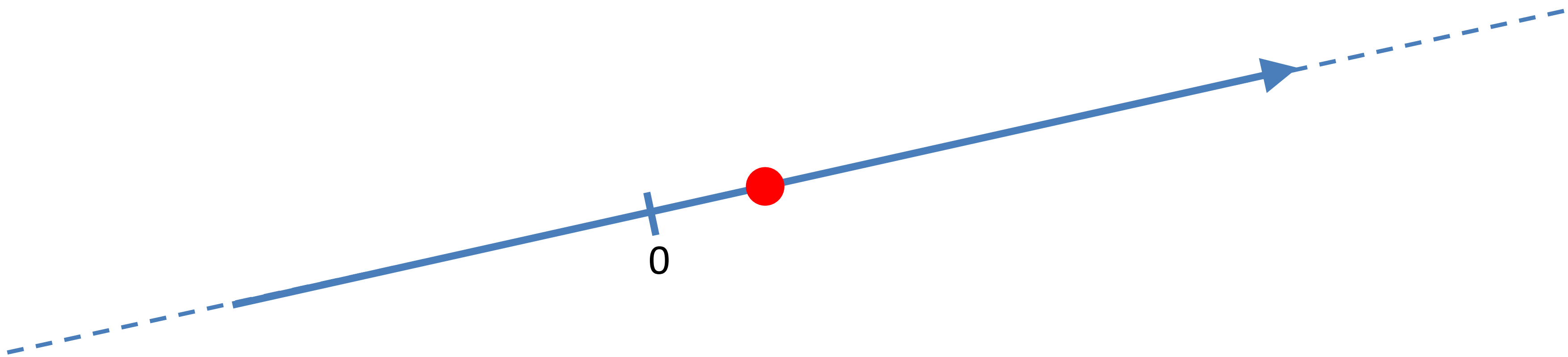
Risulta quindi che l'accelerazione è la derivata seconda della **posizione**

© A. Possenti & N. D'Amico

CINEMATICA UNIDIMENSIONALE

Formule e grafici

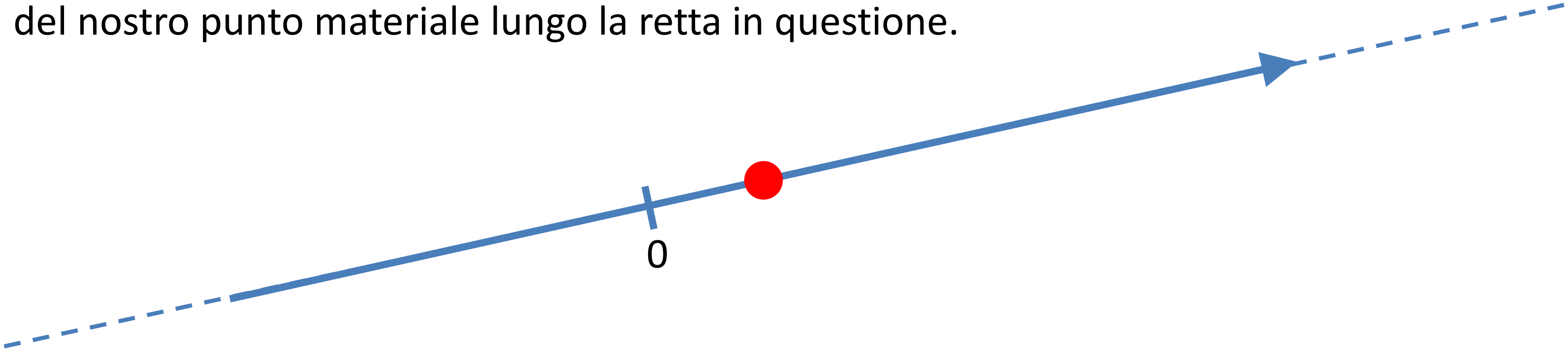
Ricapitolando: in cinematica unidimensionale, il nostro «universo» è costituito da una retta, nella quale sono definiti un punto zero arbitrario, origine, una direzione e un verso:



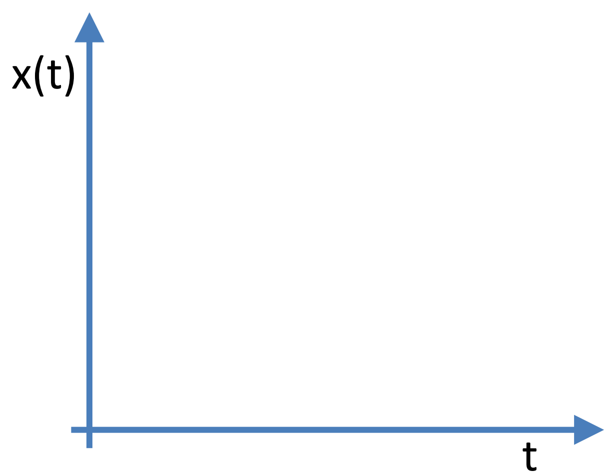
Il nostro punto si muove SOLO lungo questa retta: può variare la velocità, invertire il senso di marcia, ma comunque il suo moto avviene solo lungo la retta.

© A. Possenti & N. D'Amico

Possiamo quindi definire una variabile $x(t)$ che rappresenta ad ogni istante la posizione del nostro punto materiale lungo la retta in questione.

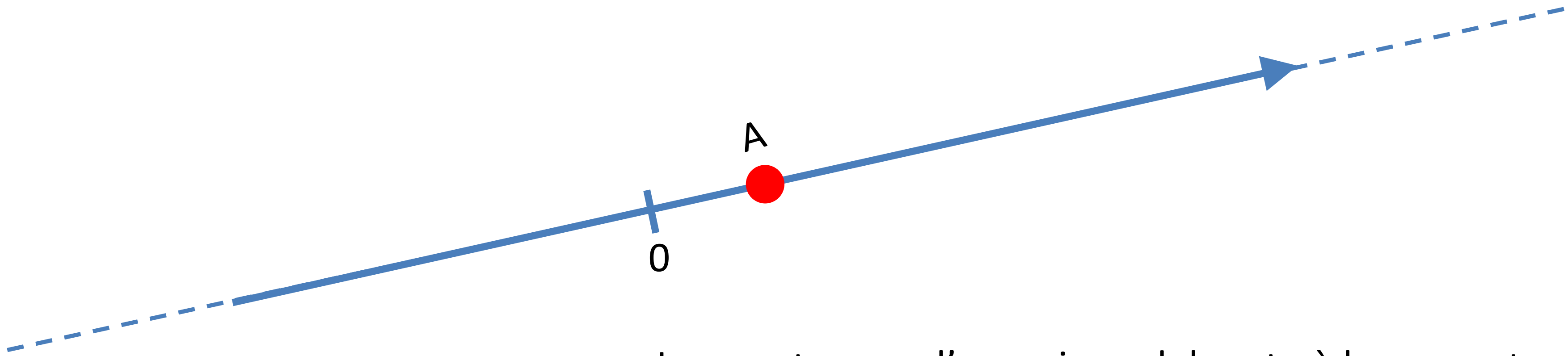


Adottiamo un sistema di assi cartesiani, ponendo $x(t)$ come variabile dipendente sull'asse delle ordinate, e t come variabile indipendente sull'asse delle ascisse.



© A. Possenti & N. D'Amico

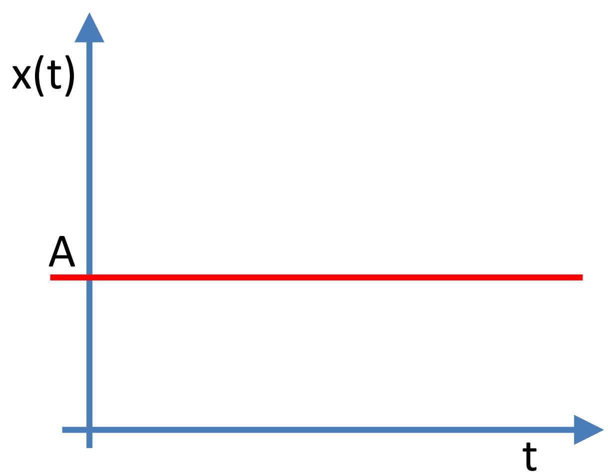
Primo esempio: il nostro punto materiale è **fermo** in una posizione A



In questo caso, l'equazione del moto è la seguente:

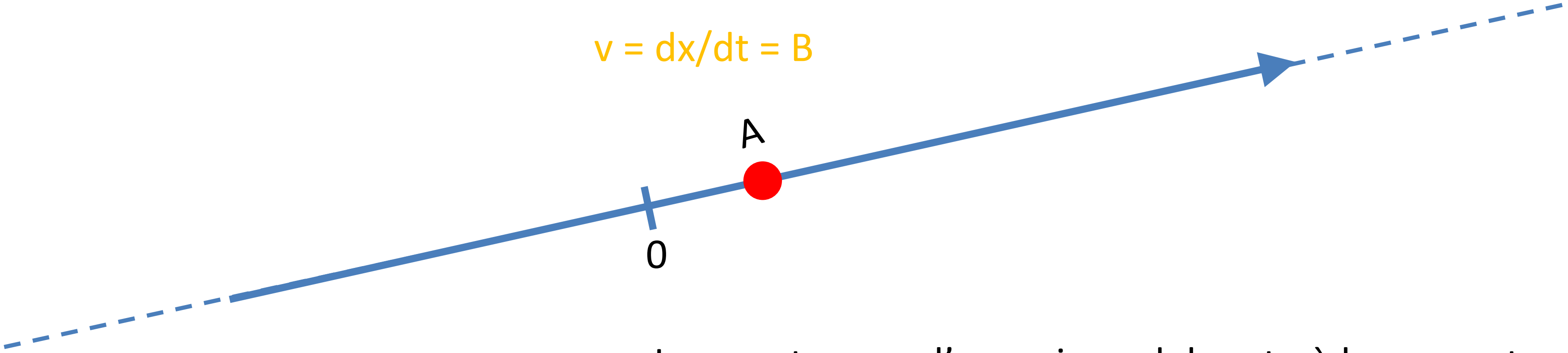
$$\mathbf{x(t) = A}$$

E la sua rappresentazione grafica è una retta orizzontale



© A. Possenti & N. D'Amico

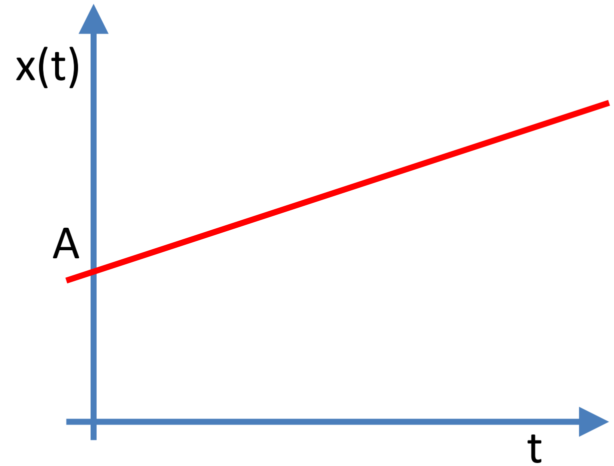
Secondo esempio: il nostro punto materiale si muove a **velocità costante**



In questo caso, l'equazione del moto è la seguente:

x(t) = A + Bt dove $\mathbf{v}_x$ **= dx/dt = B**

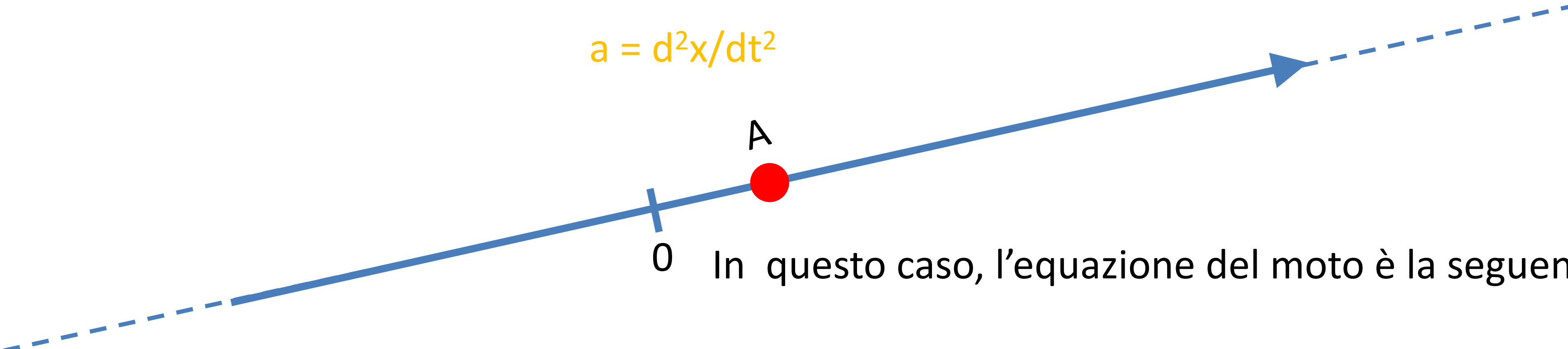
E la sua rappresentazione grafica è una retta con coefficiente angolare B



© A. Possenti & N. D'Amico

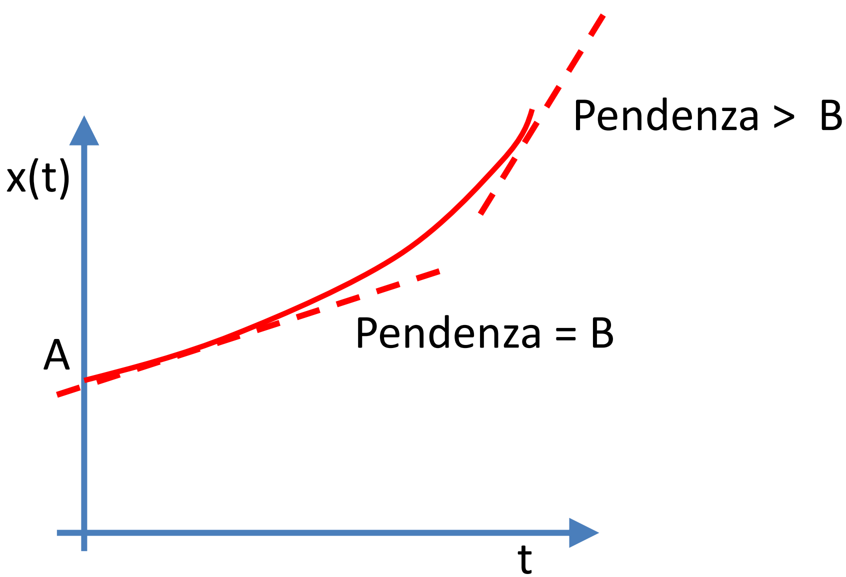
Terzo esempio: il nostro punto materiale si muove con **accelerazione costante**

$a = d^2x/dt^2$



In questo caso, l'equazione del moto è la seguente:

$$\mathbf{x(t) = A + Bt + Ct^2}$$



Dalle due definizioni:

$$v = dx/dt$$

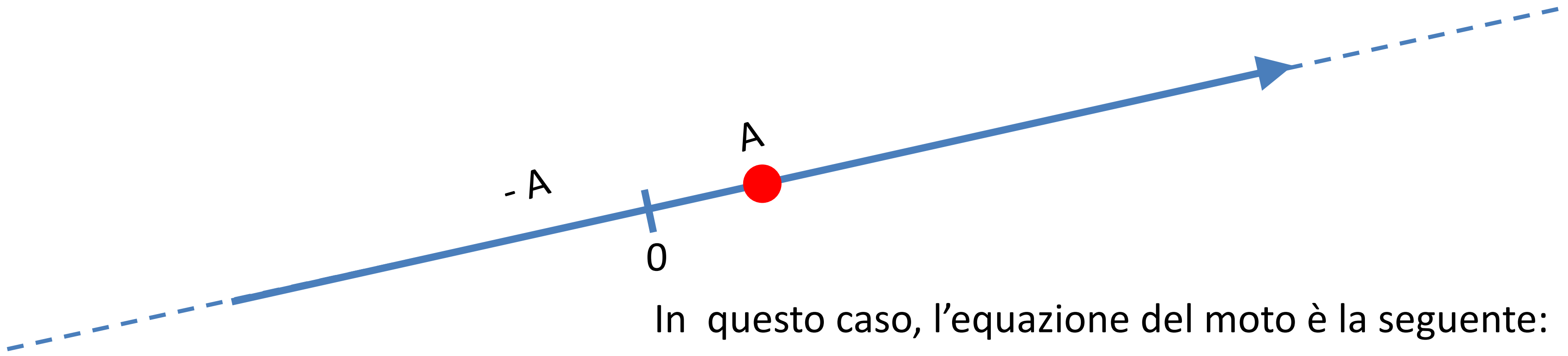
$$a = dv/dt$$

Si ha:

$$a = d^2x/dt^2 = 2C$$

$$x(t) = x_0 + v_0\, t + \tfrac{1}{2} at^2$$

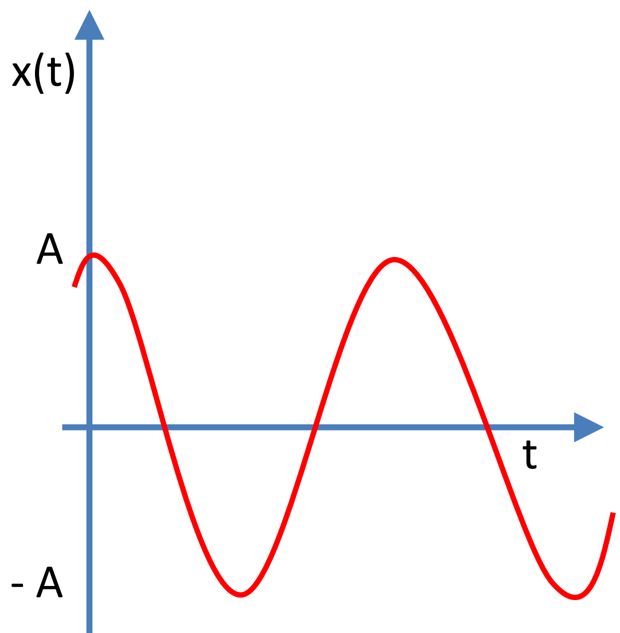
Quarto esempio: il nostro punto materiale si muove di **moto oscillante**



In questo caso, l'equazione del moto è la seguente:

$$\mathbf{x(t) = A \cos(\omega t)}$$

E la sua rappresentazione grafica è la corrispondente funzione trigonometrica



© A. Possenti & N. D'Amico

Moto di un corpo in caduta libera

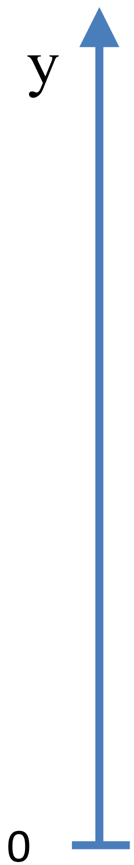
Un dato sperimentale: tutti i corpi, indipendentemente dalla loro forma, dimensione, sostanza, etc… cadono per terra con la medesima accelerazione. Apparentemente questo potrebbe sembrarci semplicemente falso, perché nel nostro immaginario, una foglia e una biglia acquisiscono accelerazioni differenti nella caduta a terra.

In effetti normalmente nella nostra esperienza quotidiana, i corpi **NON** sono in caduta **libera**
L’aria è un fluido: la foglia in pratica galleggia in questo fluido, mentre la biglia, soprattutto se di piccole dimensioni, risente poco dell’attrito con l’aria.   Ma nel vuoto tutti i corpi in caduta libera acquisiscono la stessa accelerazione **g**

In prossimità della superficie terrestre, **$\mathbf{g}$ = 9.8 m / s^2**

Definiamo allora il nostro sistema di riferimento e applichiamo le equazioni del moto

Assumiamo come asse la direzione verticale y e fissiamone il verso positivo verso l'alto.



$\mathbf{a}$ = costante = **$-\mathbf{g}$**

In analogia con quanto abbiamo già discusso, le equazioni del moto saranno pertanto:

$$y = y_0 + v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

© A. Possenti & N. D'Amico

Nel Corso di Analisi Matematica imparerete a calcolare le derivate di alcune semplici funzioni:

Funzione y = f(x)	Derivata dy / dx
$y = k$	$dy/dx = 0$
$y = k\,x$	$dy/dx = k$
$y = kx^2$	$dy/dx = 2kx$

Come abbiamo visto, l'equazione dello spostamento x **in funzione** del tempo t è una

parabola: $x = v_0 t + \frac{1}{2}\, a\, t^2$ e applicando le regole sulle derivate, ricaviamo che:

$$v = dx/dt = d/dt\,(v_0 t) + d/dt\,(\tfrac{1}{2}\, a\, t^2) = v_o + at$$

Ed eseguendo la derivata su v:

$$dv/dt = a = \text{costante}$$

© A. Possenti & N. D'Amico

Nel Corso di Analisi Matematica imparerete a calcolare le derivate di alcune semplici funzioni:

Funzione y = f(x)	Derivata dy / dx
$y = k$	$dy/dx = 0$
$y = k\,x$	$dy/dx = k$
$y = kx^2$	$dy/dx = 2kx$

Come abbiamo visto, l'equazione dello spostamento x **in funzione** del tempo t è una parabola: $x = v_0 t + \frac{1}{2} a\, t^2$ e applicando le regole sulle derivate, ricaviamo che:

$$v = dx/dt = d/dt\,(v_0 t) + d/dt\,(\tfrac{1}{2} a\, t^2) = v_o + at$$

Ed eseguendo la derivata su v:

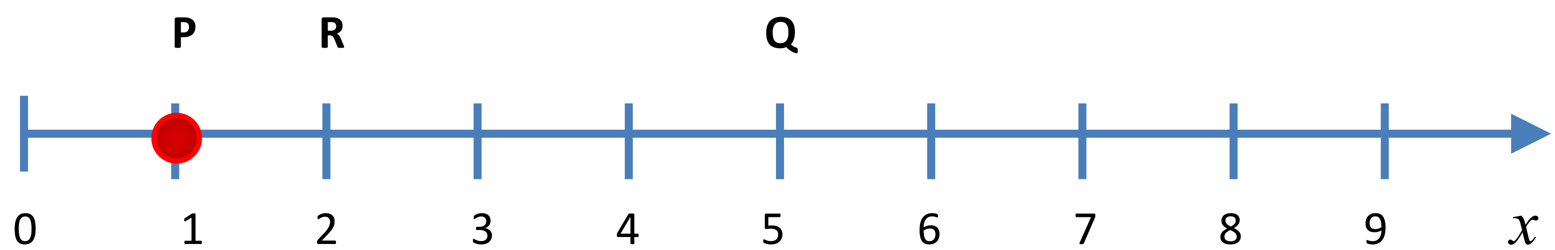
$$dv/dt = a = \text{costante}$$

© A. Possenti & N. D'Amico

Esempio 1

Consideriamo un punto materiale che effettua un moto particolare lungo l'asse x.

Supponiamo per esempio che la particella parta da un punto **P** localizzato a **1m** dall'origine e si sposti verso il punto **Q** localizzato a **5 m** dall'origine e quindi torni indietro al punto **R** a **2 m** dall'origine.   E supporremo che il tutto si concluda in **4 secondi**



Lo spostamento totale è di un metro nella direzione positiva dell'asse x:

$$\Delta S = 1{,}0 \text{ m}$$

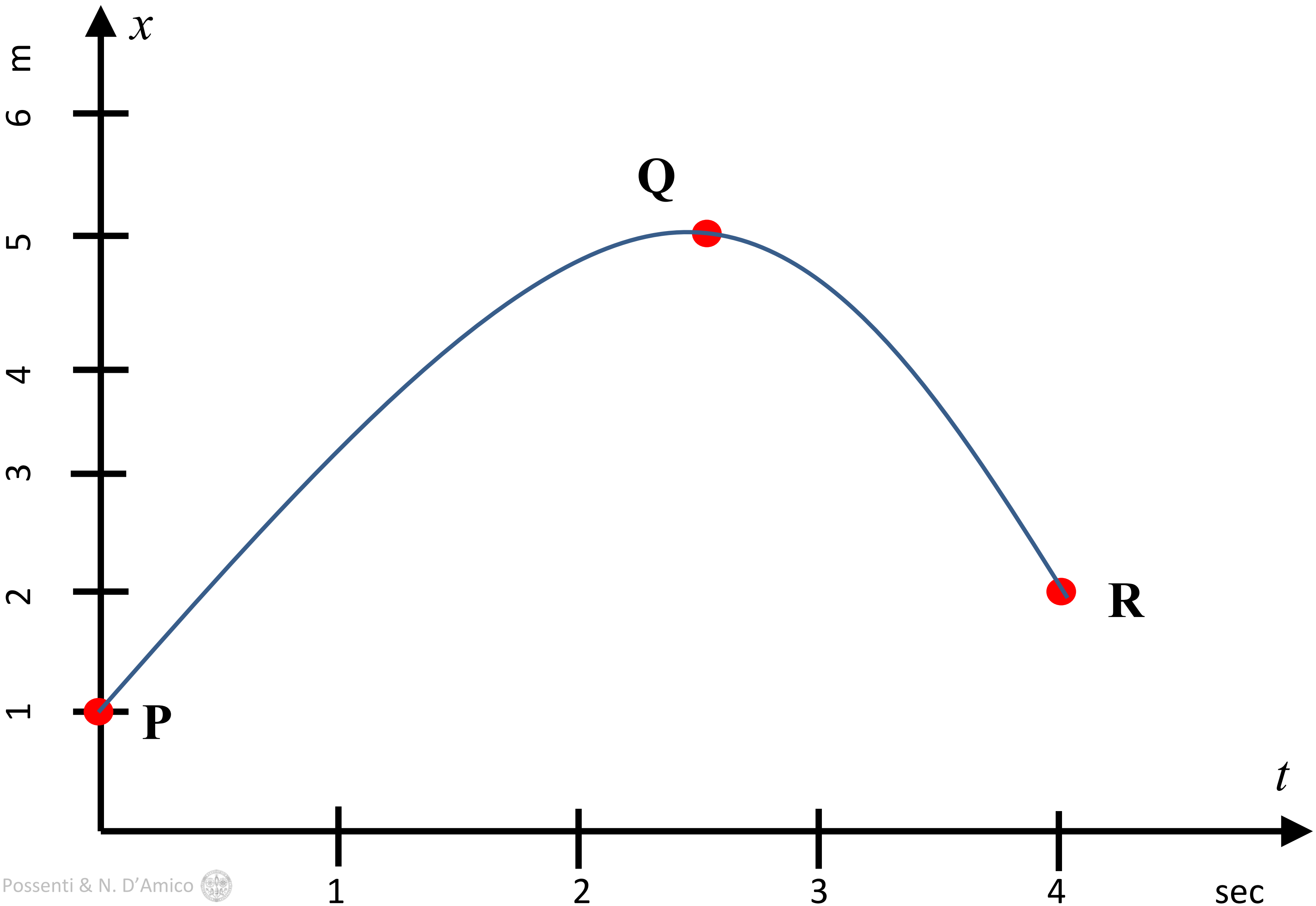
Il tempo impiegato è 4 secondi:

$$\Delta t = 4{,}0 \text{ s}$$

La velocità media è: $v = \Delta s / \Delta t$ = 0,25 m/s nella direzione positiva dell'asse x

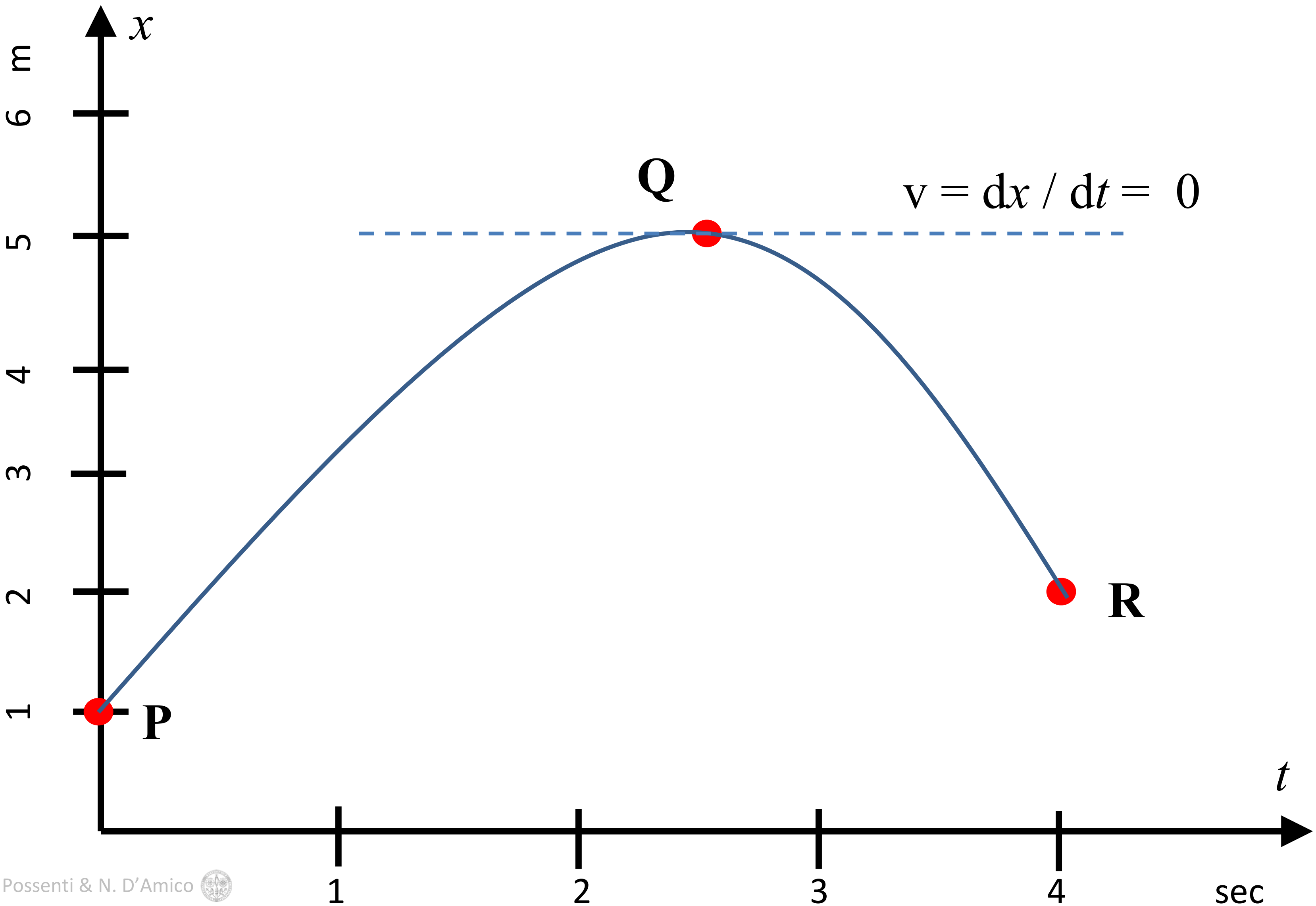
© A. Possenti & N. D'Amico

Per stimare la velocità **istantanea** dobbiamo procedere diversamente. Definiamo un sistema di assi cartesiani per x e t. Lo spostamento in questo sistema di assi sarà descritto da una curva così.



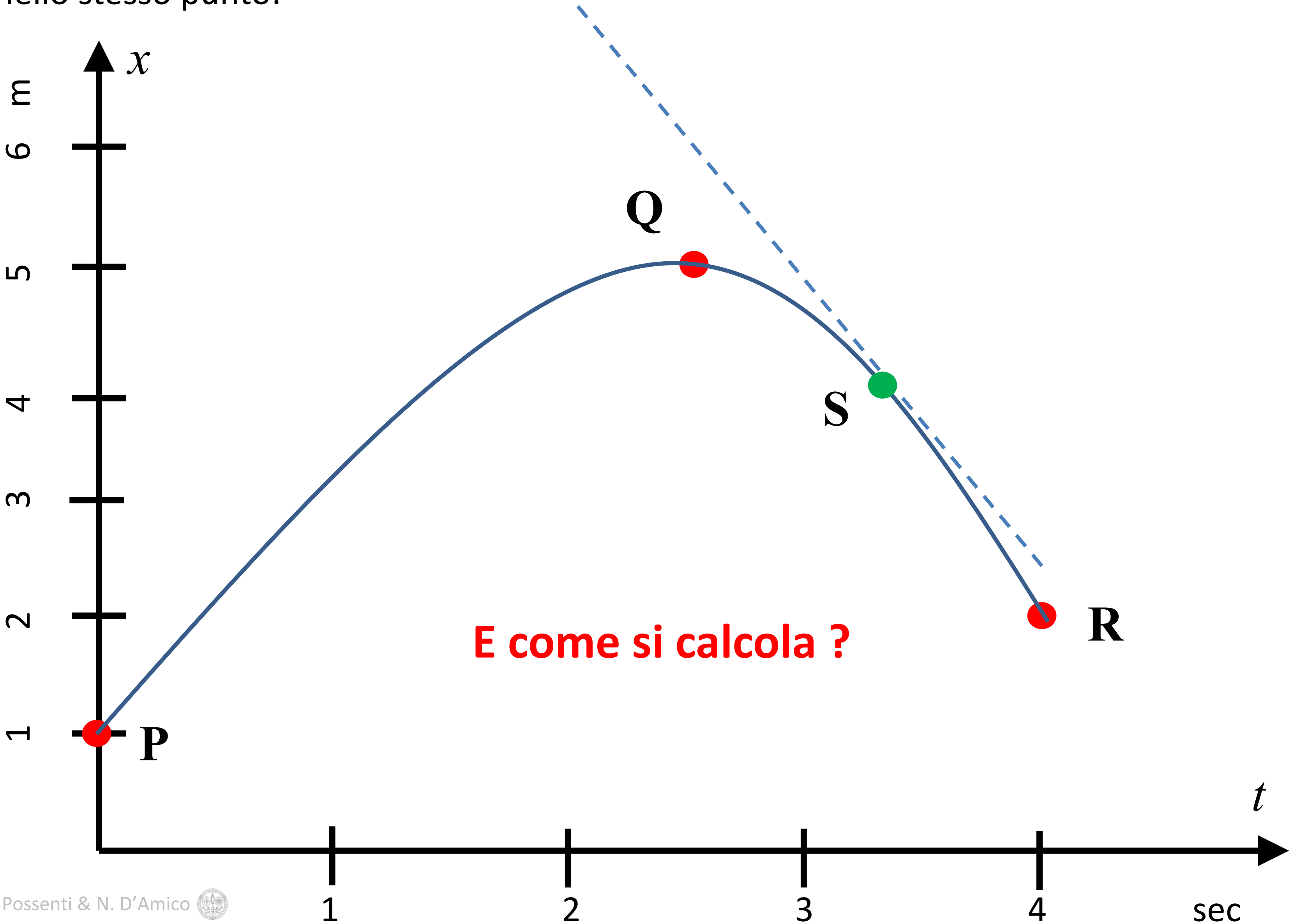
© A. Possenti & N. D'Amico

La velocità istantanea in ogni punto si ricava come la pendenza della retta tangente in quel dato punto.   Così per esempio nel punto **Q** la velocità istantanea è zero



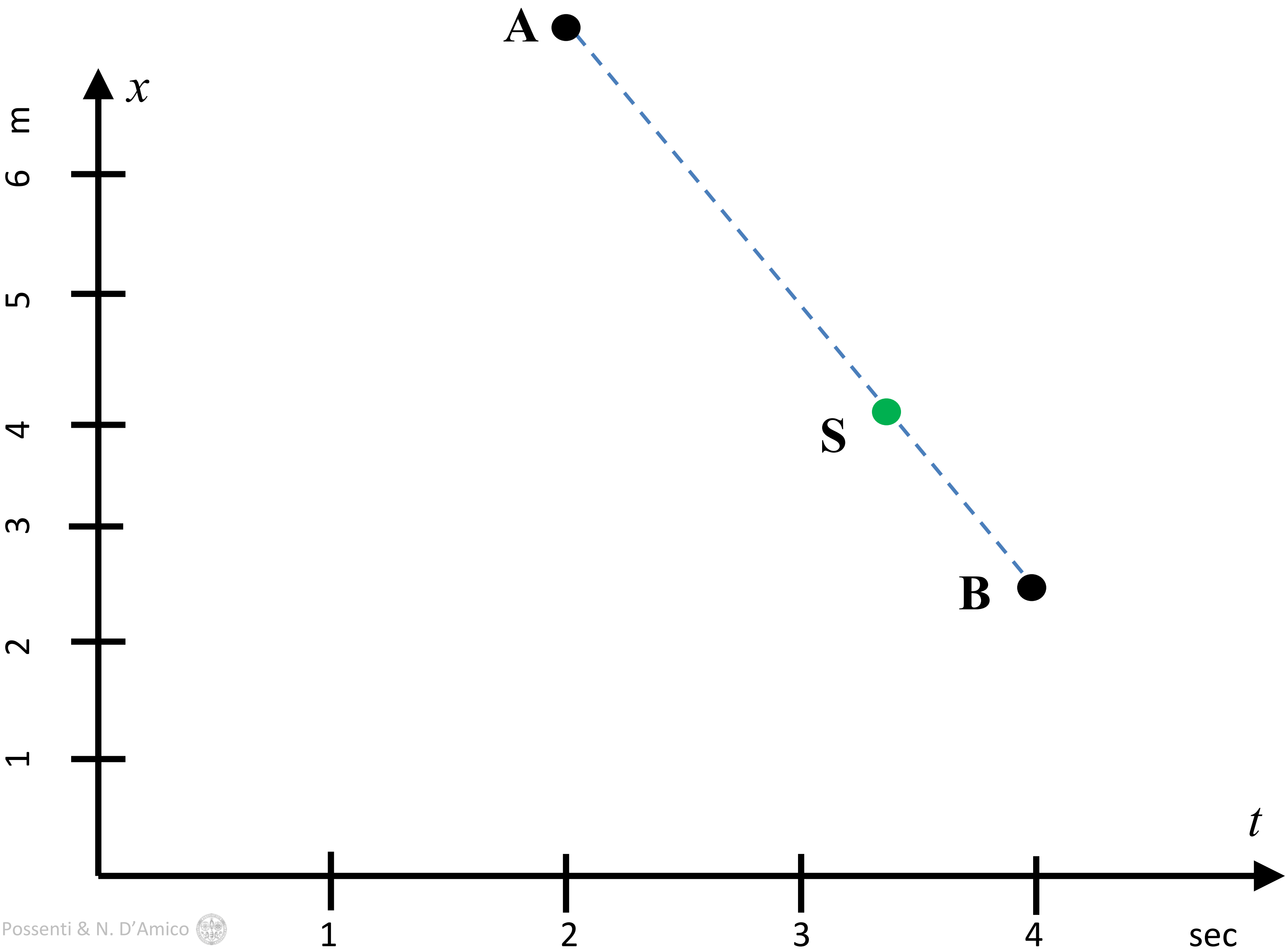
© A. Possenti & N. D'Amico

Nel punto **S,** indicato in verde, la velocità sarà la pendenza della tangente alla curva nello stesso punto:



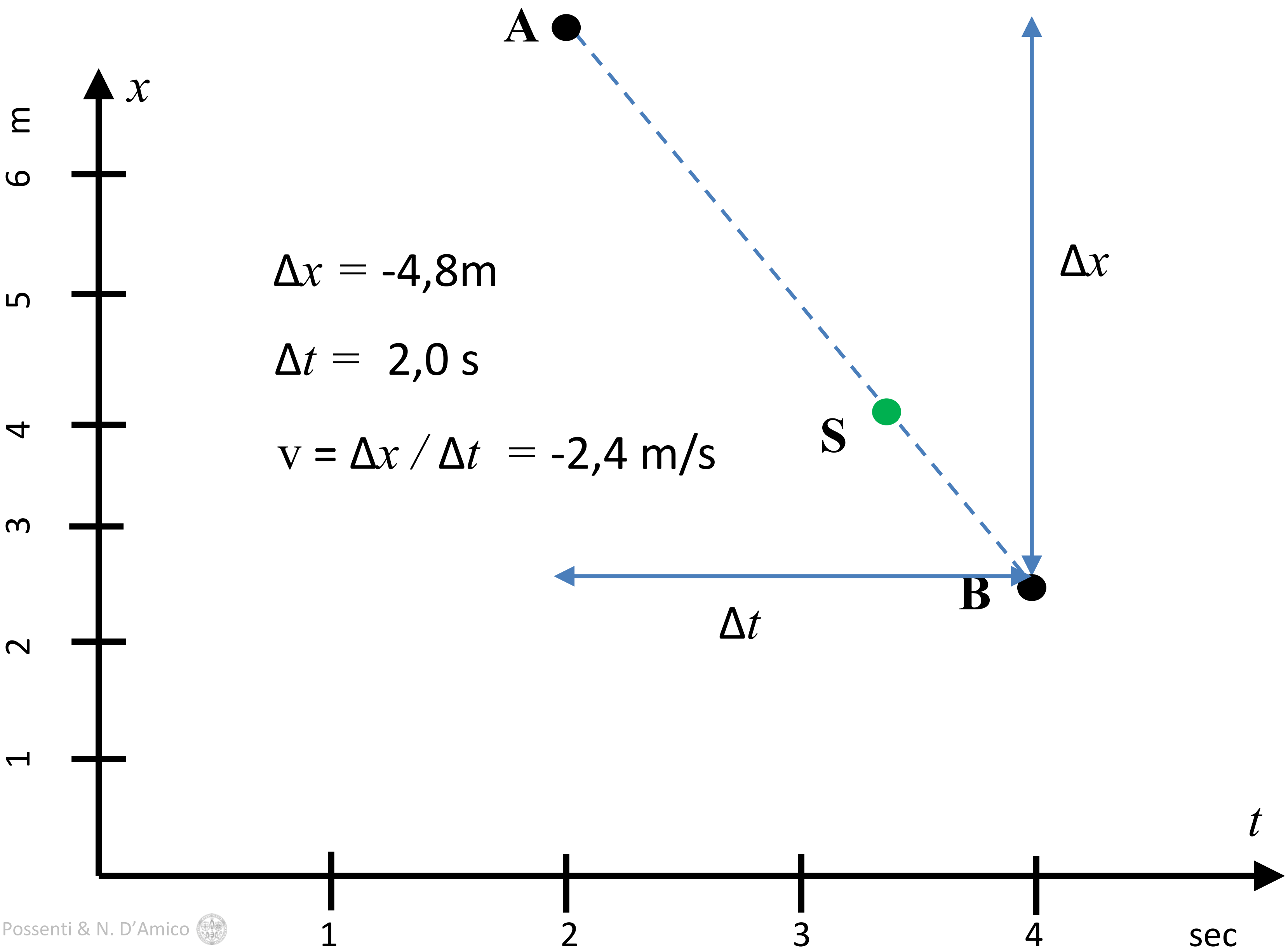
© A. Possenti & N. D'Amico

In questa retta, individuiamo due punti, per esempio **A** (t=2s ; x = 7,3m) e **B** (t=4s; x = 2,5m)



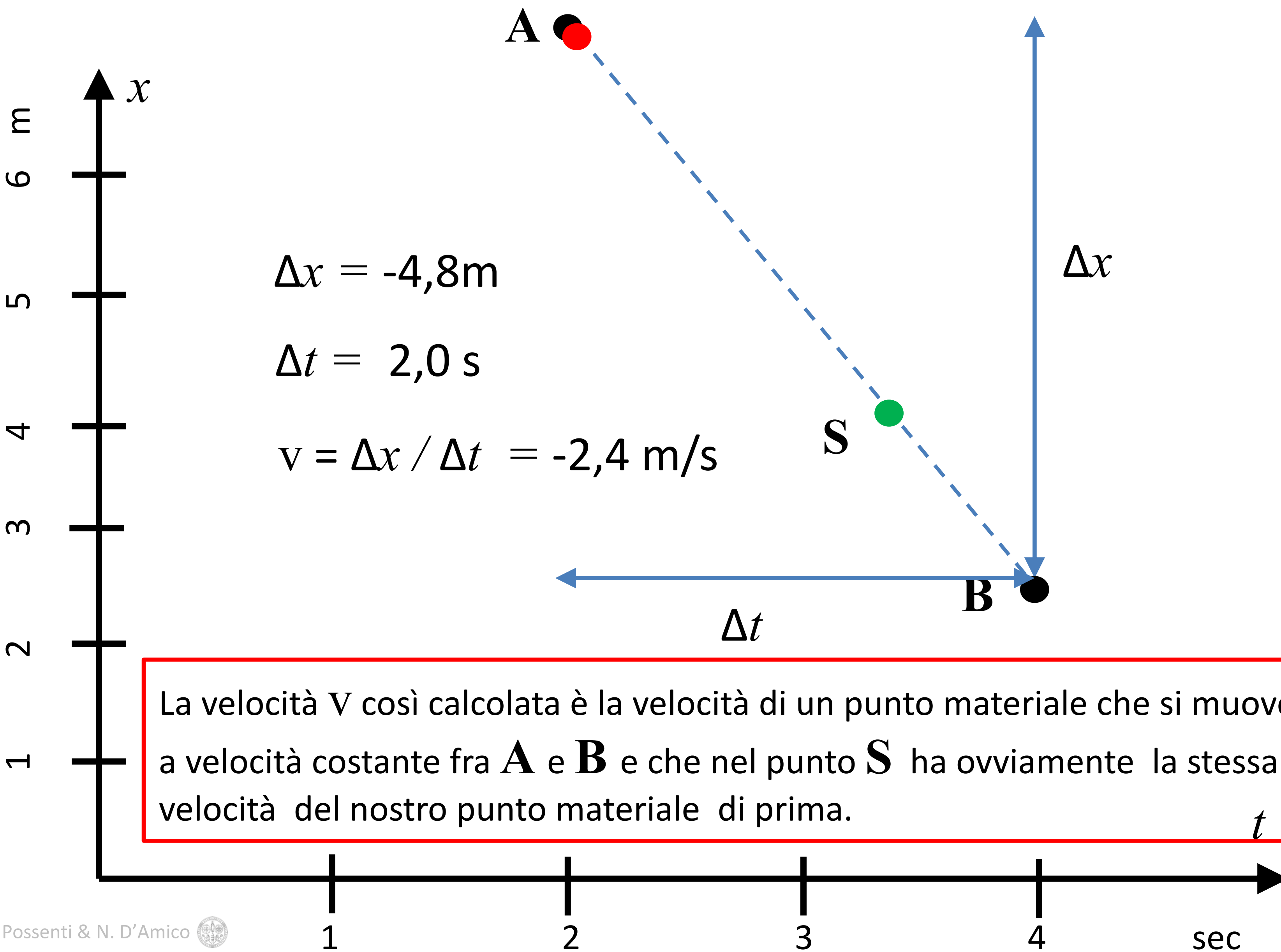
© A. Possenti & N. D'Amico

E calcoliamo la pendenza (coefficiente angolare) di questa retta:



© A. Possenti & N. D'Amico

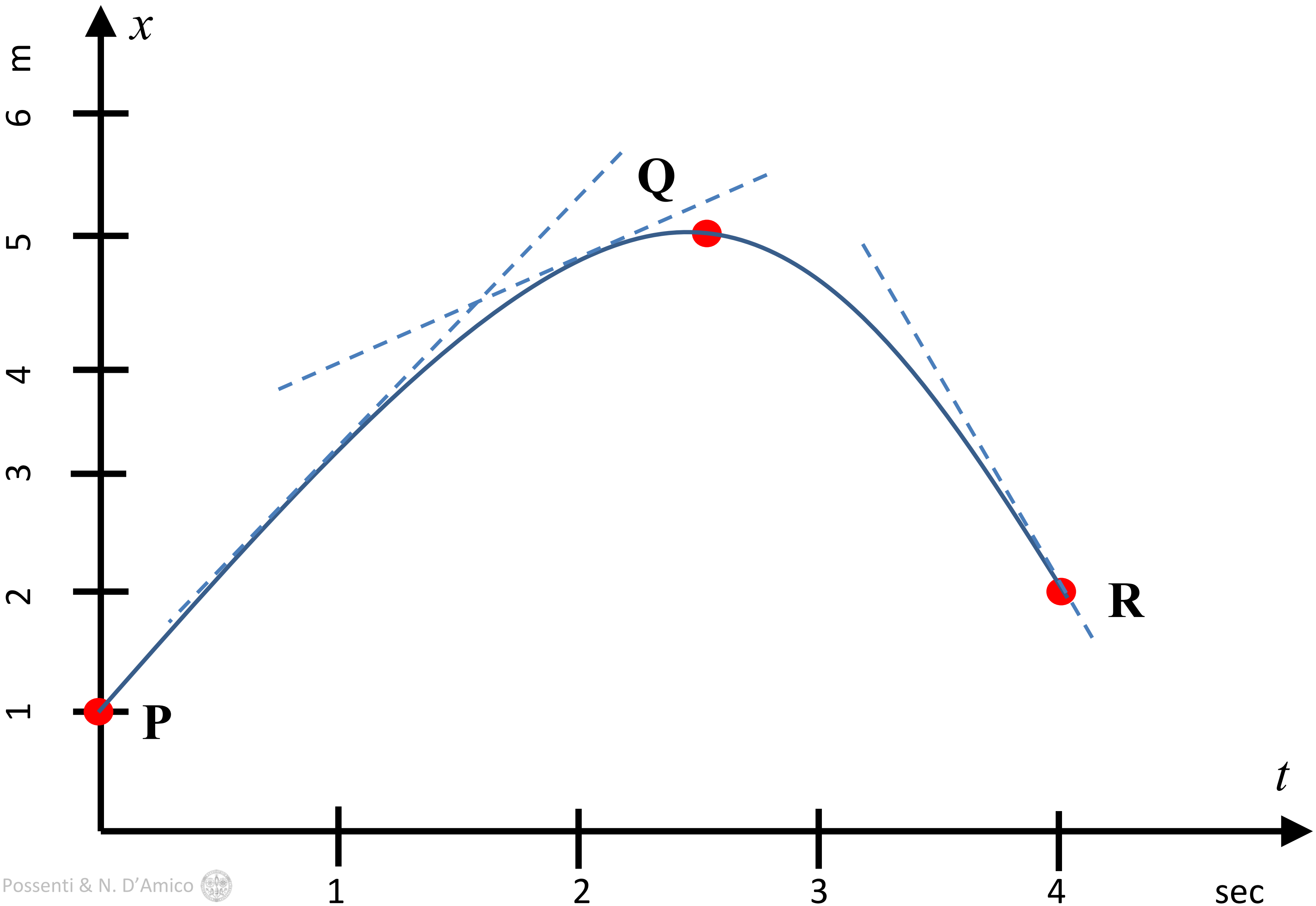
Che cosa è questa $v = \Delta x / \Delta t = -2,4$ m/s **?**



La velocità v così calcolata è la velocità di un punto materiale che si muove a velocità costante fra **A** e **B** e che nel punto **S** ha ovviamente la stessa velocità del nostro punto materiale di prima.

© A. Possenti & N. D'Amico

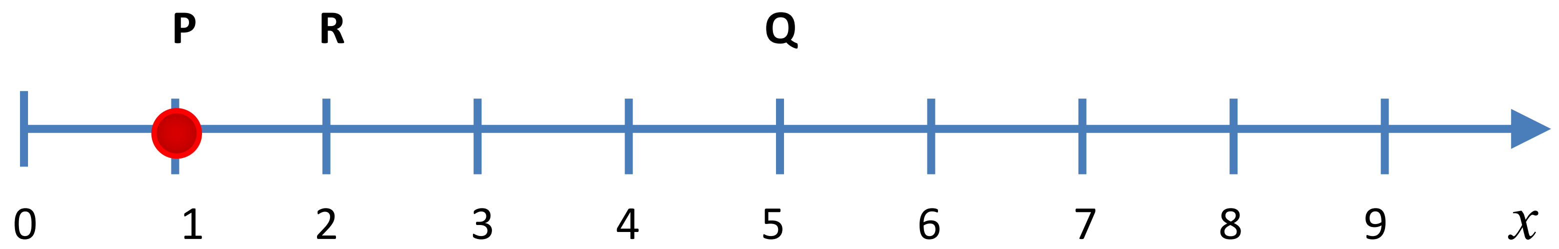
In modo del tutto analogo possiamo calcolare la velocità istantanea in qualsiasi punto !



© A. Possenti & N. D'Amico

Esempio 2

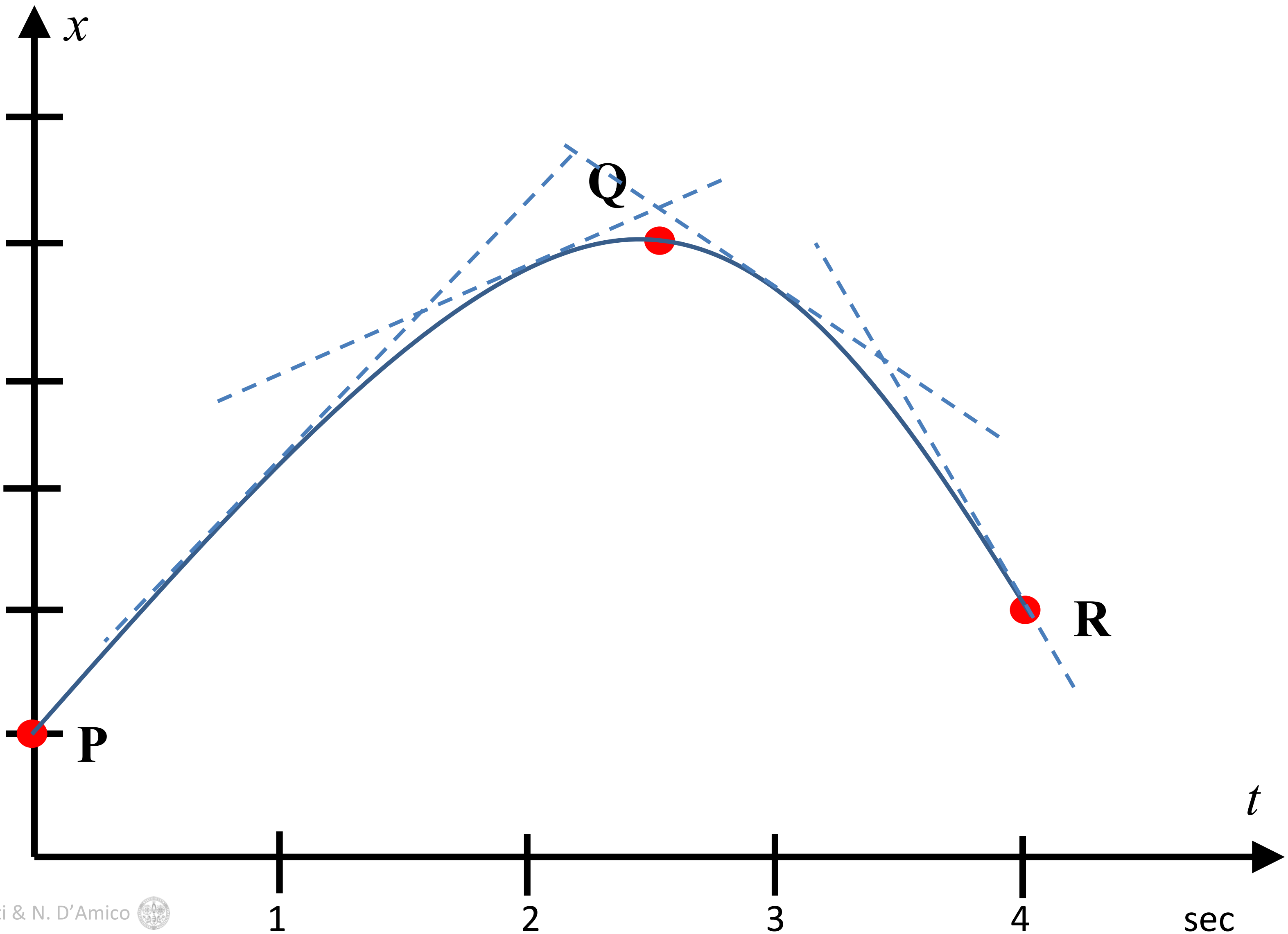
E facile intuire che il moto lungo l'asse x dell'esercizio precedente avviene con **accelerazione variabile**:



Si pone allora il problema di calcolare anche **l'accelerazione istantanea**.

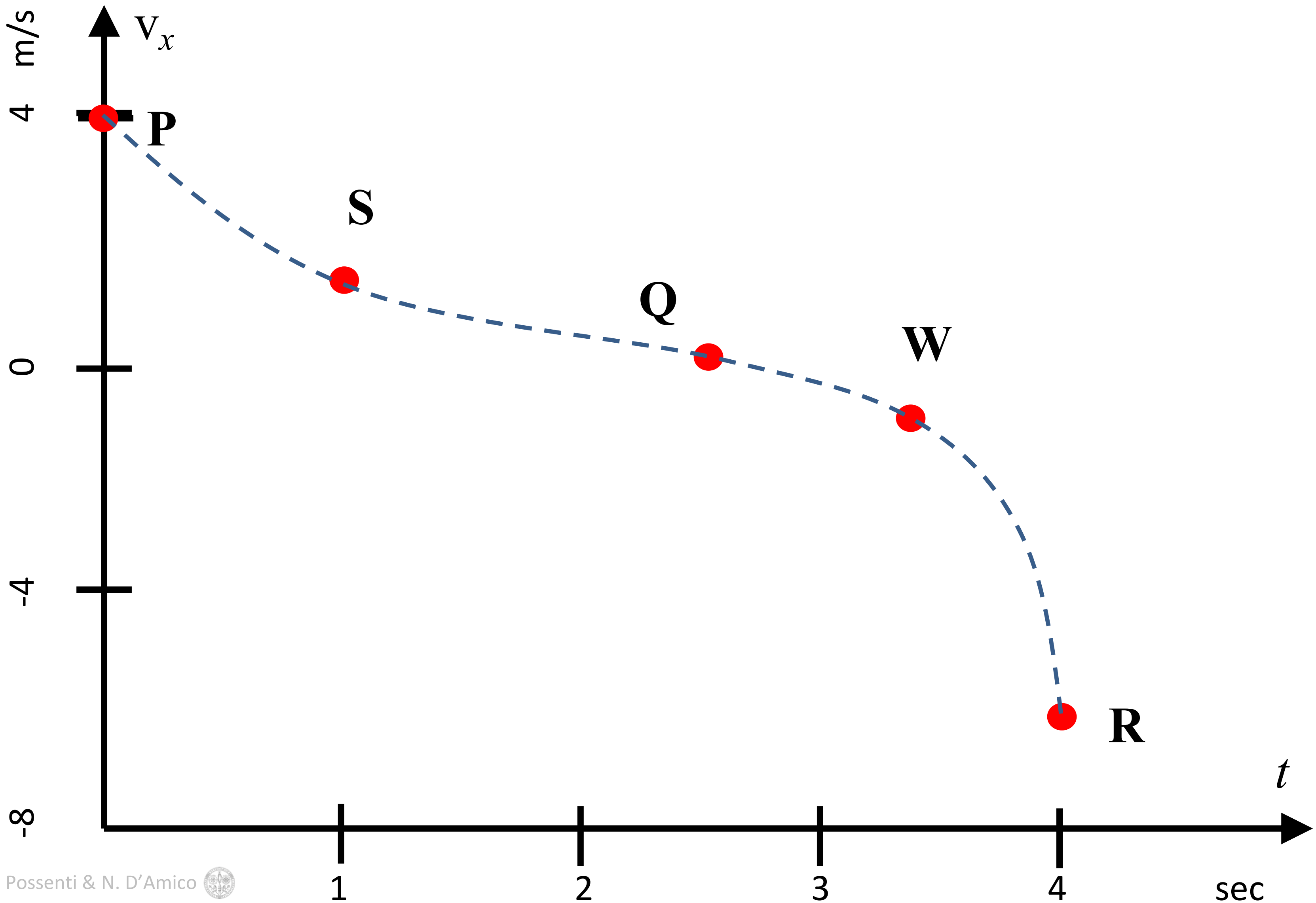
© A. Possenti & N. D'Amico

Poiché l'accelerazione istantanea è $a = dv / dt$, risulta intuitivo che dobbiamo prima ricavare la funzione $v(t)$. Per fare questo, calcoliamo la velocità istantanea $v_i\,(t_i)$ in numero di punti **sufficientemente** elevato.



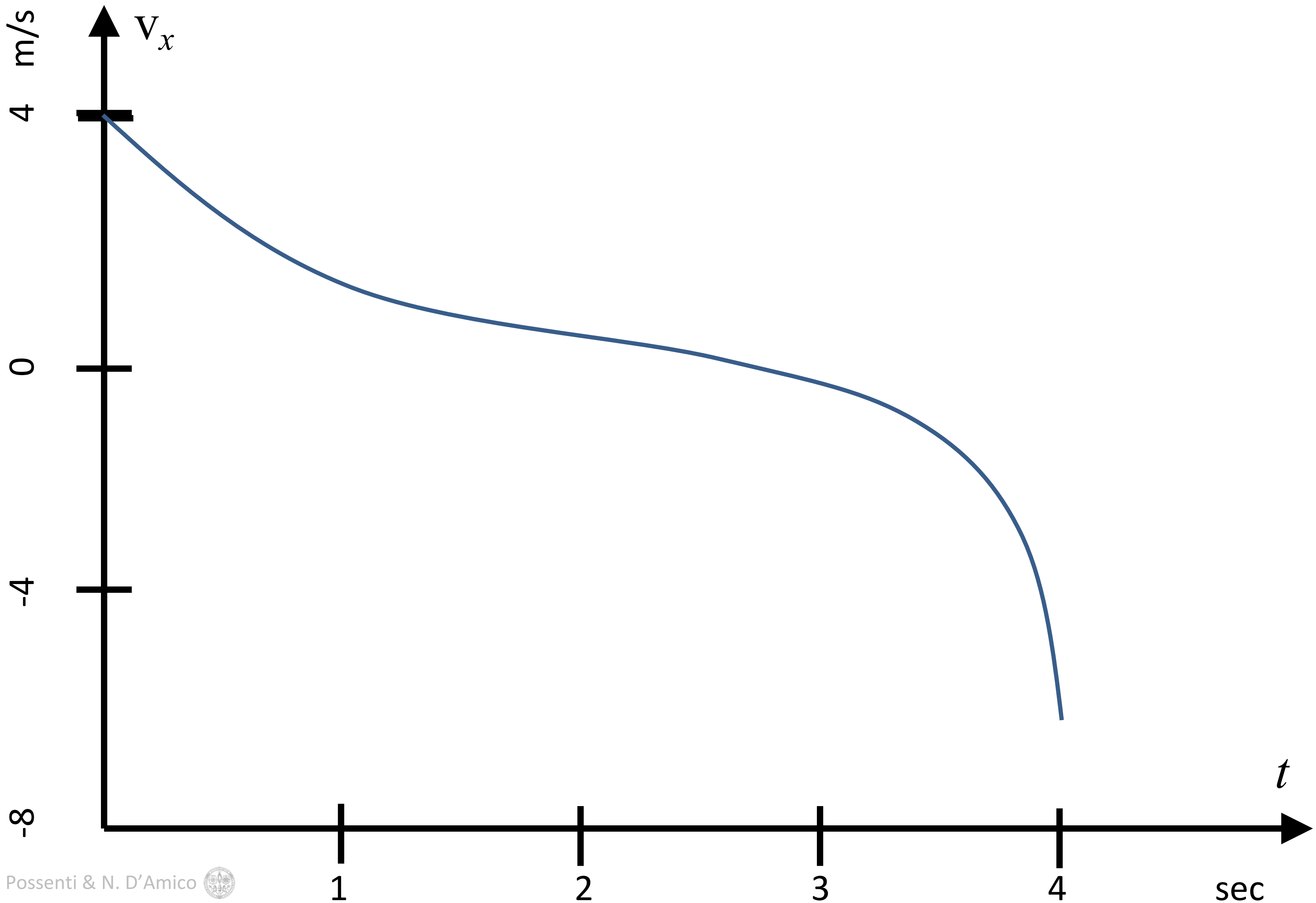
© A. Possenti & N. D'Amico

Definiamo un sistema di assi cartesiani per V_x e t, e riportiamo i valori delle velocità istantanee calcolate nei vari punti e operiamo una **interpolazione grafica**



© A. Possenti & N. D'Amico

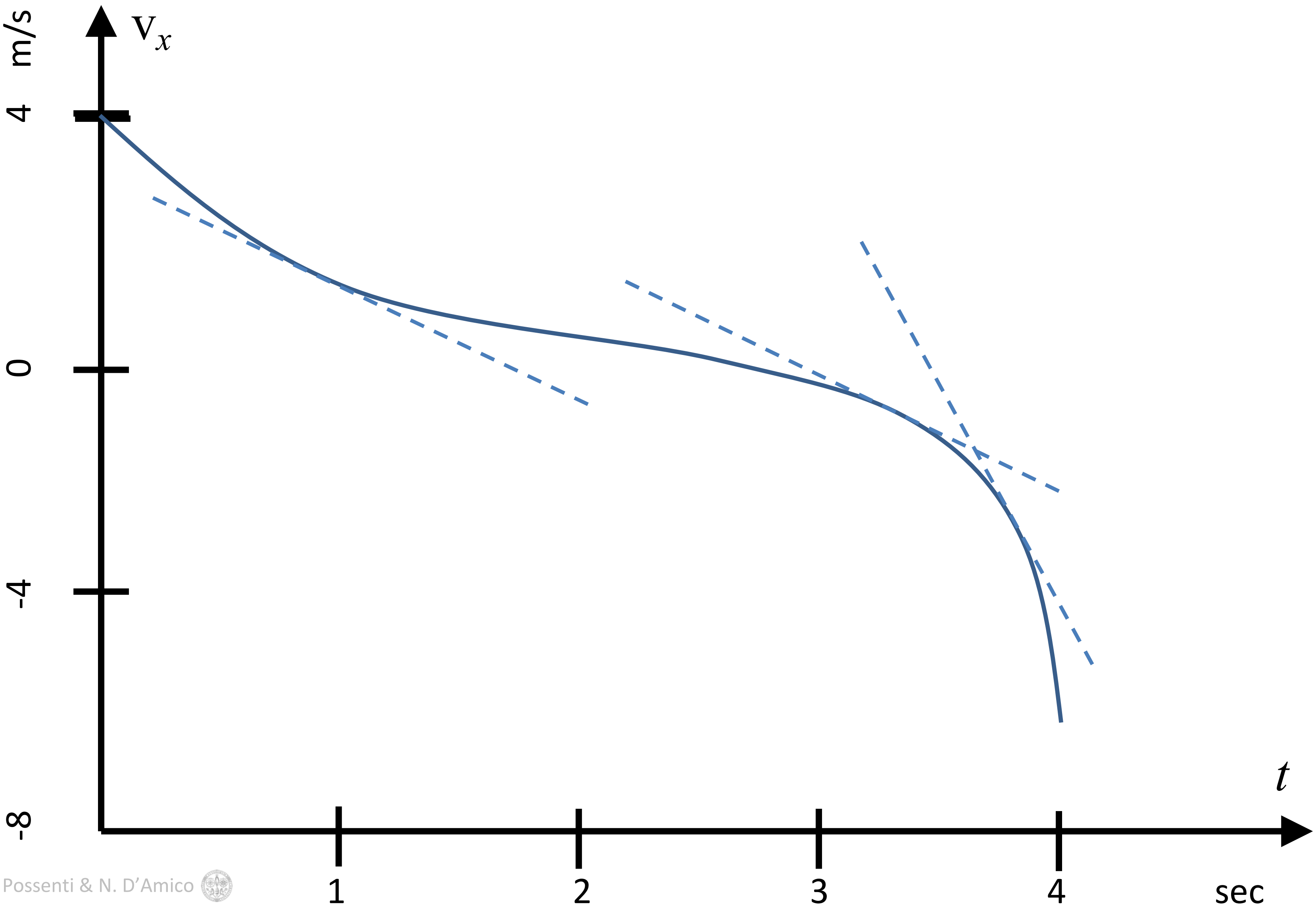
La linea curva che abbiamo individuato nel piano (v_x, t) altro non è che la rappresentazione grafica della **velocita** del punto materiale in **funzione** del tempo $v_x(t)$.



© A. Possenti & N. D'Amico

Di questa funzione $\mathrm{v_x}(t)$ potremo calcolare l'accelerazione istantanea punto per punto

ricordando che $\mathrm{a} = \mathrm{dv}/\mathrm{d}t$ è la pendenza della retta tangente in ogni punto



© A. Possenti & N. D'Amico

Esempio 3

Consideriamo un moto unidimensionale (trattabile quindi con formalismo puramente scalare) con accelerazione **a = costante**

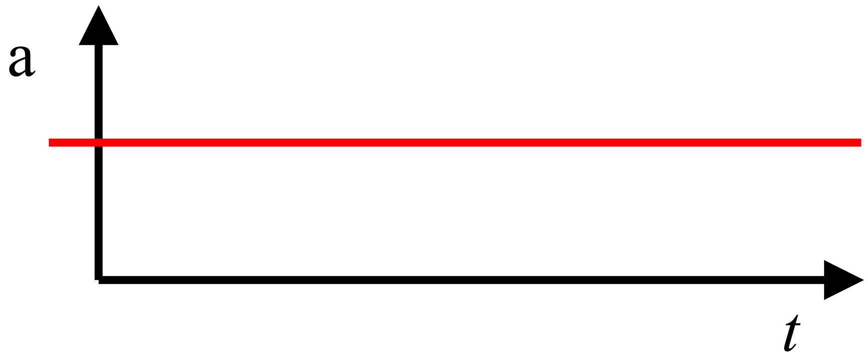
Abbiamo imparato che se **a = costante**:

a) La velocità v cresce linearmente col tempo t: $\mathrm{v} = \mathrm{v}_0 + \mathrm{a}t$

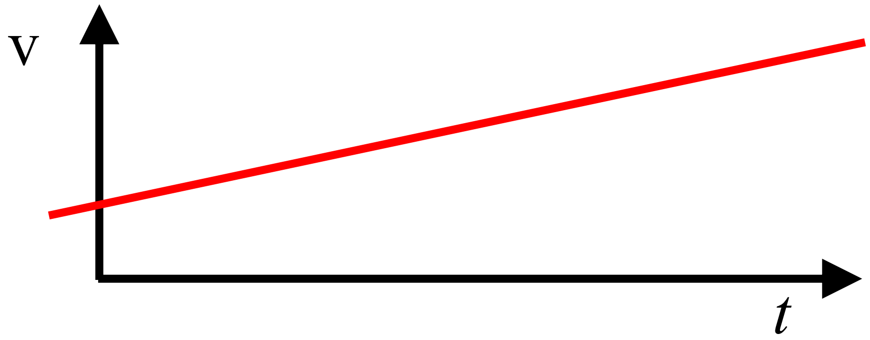
b) Lo spostamento x cresce quadraticamente col tempo t: $x = \mathrm{v}_0 t + \frac{1}{2}\, a\, t^2$

© A. Possenti & N. D'Amico

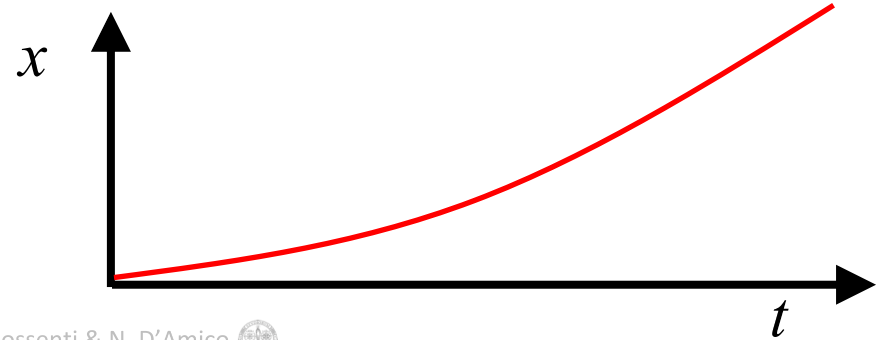
Quindi se definiamo dei piani cartesiani in cui raffigurare graficamente l'andamento delle tre grandezze fisiche in questione in funzione del tempo , otterremo quanto segue:



a = costante (pendenza della curva = 0)



v cresce linearmente col tempo (pendenza della curva = costante)



x cresce quadraticamente col tempo, la pendenza della curva cresce uniformemente col tempo

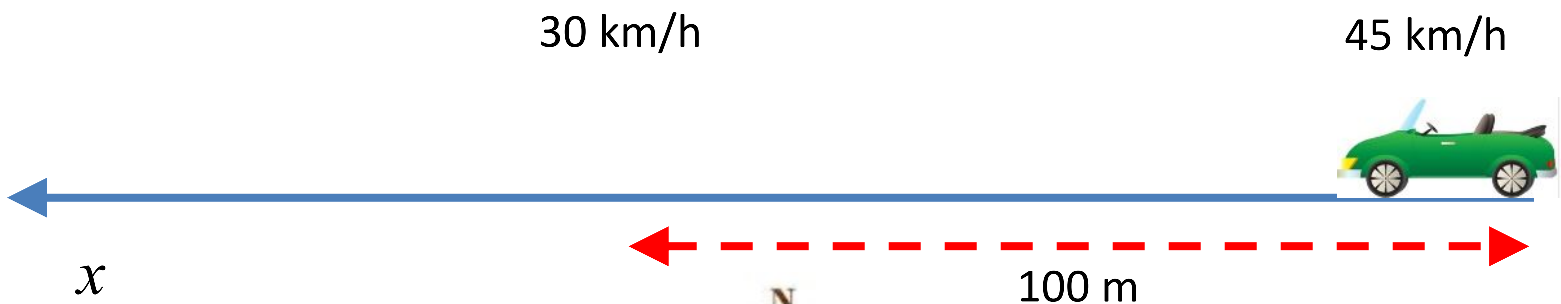
© A. Possenti & N. D'Amico

Esempio 4

La velocità di una automobile che viaggia in direzione ovest si riduce uniformemente da 45 km/h a 30 km/h in una distanza di 100 m.

1° Quesito: qual è il valore della accelerazione costante ?

Possiamo ridurre il calcolo al caso **scalare**: una autovettura che si muove lungo l'asse x



© A. Possenti & N. D'Amico

Sappiamo che:

$$v = v_0 + at$$

Conosciamo $v = 30$ km/h, e conosciamo $v_0 = 45$ km/h, tuttavia il dato che ci viene fornito **NON** è il tempo t in cui avviene la variazione di velocità, ma lo spostamento x = 100 m = 0,100 km.

Risolviamo la relazione $v = v_0 + at$ rispetto a t e otteniamo :

$$t = (v - v_0) / a \quad [**]$$

Definiamo adesso la **media delle velocità** fra t e t_0 come

$$\langle v \rangle = (v_0 + v) / 2$$

Nel caso specifico di un moto uniformemente accelerato, e in generale **SOLO** per questo

Possiamo quindi scrivere $x = \langle v \rangle t \rightarrow t = x / \langle v \rangle = 2x / (v_0 + v)$

che eguagliata alla [**] risulta nella relazione:

$$(v - v_0)/a = 2x/(v_0+v) \rightarrow a = (v - v_0)/(2x/(v_0+v)) = (v^2 - v_0^2)/2x$$

© A. Possenti & N. D'Amico

2° Quesito: Quanto tempo è trascorso durante la decelerazione ?

© A. Possenti & N. D'Amico

2° Quesito: Quanto tempo è trascorso durante la decelerazione ?

Scriveremo:

$t = (v - v_0)/a =$ (30 – 45) km/h / -5,6 x 10^3 km/h^2 = 0,0027 h = 9,6 s

© A. Possenti & N. D’Amico

3° **Quesito**: Se si suppone che l'automobile continui a decelerare con la medesima legge, quanto tempo dovrà trascorrere affinché si fermi, essendo partita con una velocità di 45 km/h ?

Scriveremo di nuovo:

© A. Possenti & N. D'Amico

3° **Quesito**: Se si suppone che l'automobile continui a decelerare con la medesima legge, quanto tempo dovrà trascorrere affinché si fermi, essendo partita con una velocità di 45 km/h ?

Scriveremo di nuovo:

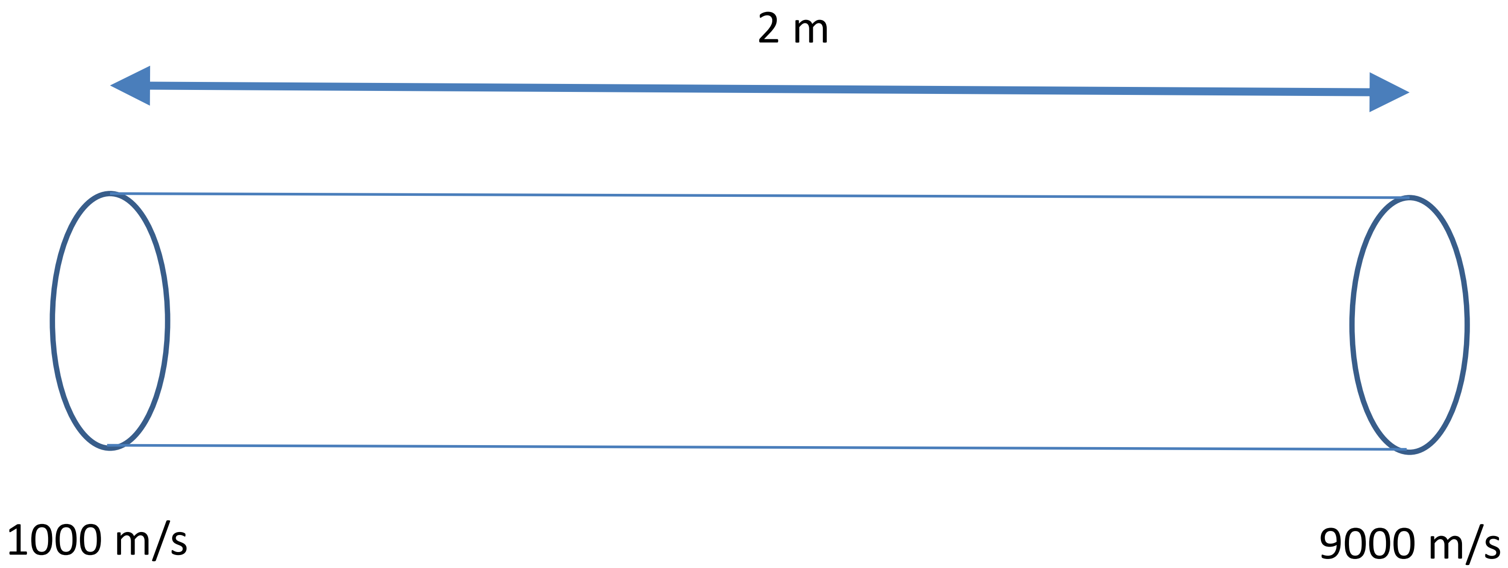
$t = (v - v_0)/a =$ (0 – 45) km/h / -5,62 x 10^3 km/h^2 = 0.0080 h =   29 s

© A. Possenti & N. D'Amico

Esempio 5

Una particella si muove all'interno di un tubo rettilineo sotto vuoto lungo 2 m

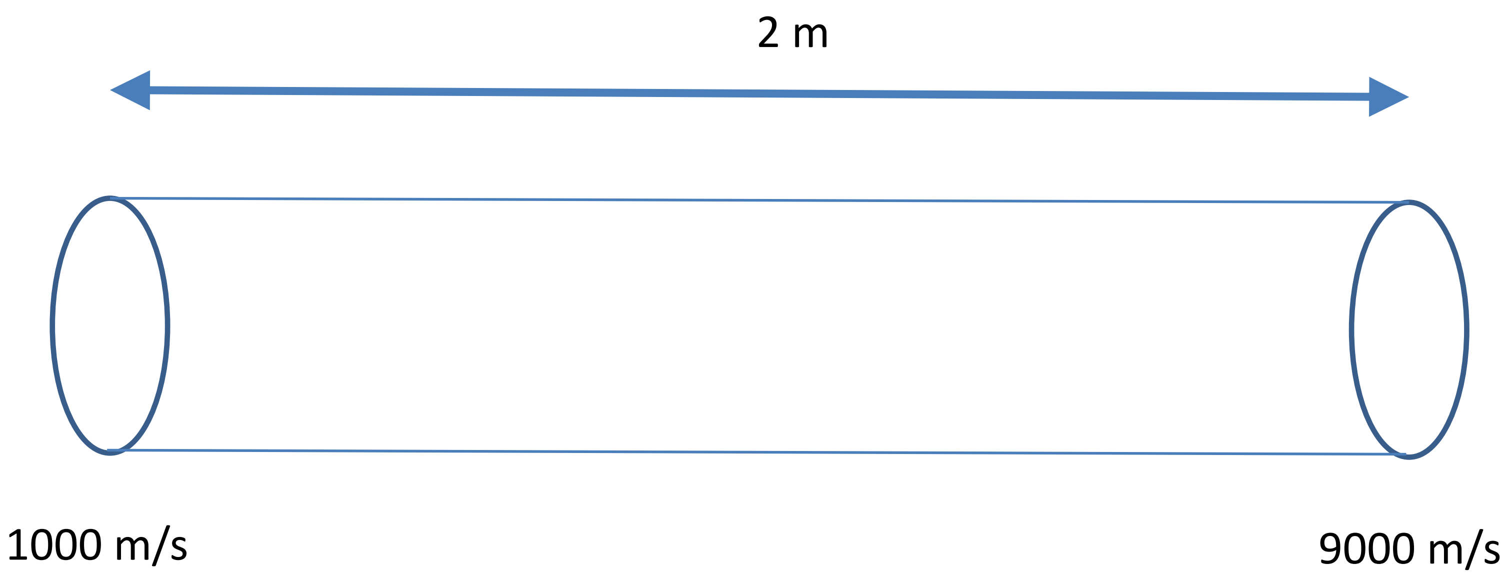
1° Quesito: Supponendo **costante** l'accelerazione, quanto tempo rimane la particella nel tubo, se vi entra con una velocità di 1000 m/s e ne esce con velocità 9000 m/s ?



Esempio 5

Una particella si muove all'interno di un tubo rettilineo sotto vuoto lungo 2 m

1° Quesito: Supponendo **costante** l'accelerazione, quanto tempo rimane la particella nel tubo, se vi entra con una velocità di 1000 m/s e ne esce con velocità 9000 m/s ?



Di nuovo, scriveremo: $x = \langle v \rangle \; t$

dove $\langle v \rangle = (v_1 + v_2)/2$ = (9000+1000)/2 = 5000 m/s

Da cui $t = x \,/\, \langle v \rangle$ = 2 m / 5000 m/s $=$ 0,0004 s

© A. Possenti & N. D'Amico

2° Quesito: Determinare l’accelerazione

© A. Possenti & N. D’Amico

2° Quesito: Determinare l'accelerazione

Dalla relazione: $v_2 = v_1 + at$ ricaviamo $a = (v_2 - v_1) / t$ cioè:

a = (9000 -1000) m/s / 0.0004 s = 2 x 10^7 m/s^2

Che si legge: 20 milioni di metri al secondo quadrato

© A. Possenti & N. D'Amico