Problema 1.

Sia X un insieme e si considerino le seguenti affermazioni:

a) esiste una funzione iniettiva dai numeri naturali in X;

b) esiste una funzione iniettiva ma non suriettiva da X in se stesso.

Dimostrare che a) implica b).

Problema 2.

Dato un intero $p \in \mathbb{Z}$, $p \neq 0, 1, -1$, sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione

$$n \mapsto \begin{cases} n\,p & \text{se } p \text{ non divide } n \\ n & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dire, giustificando la risposta, se f è iniettiva e/o suriettiva.

Problema 3.

Usando il principio di induzione mostrare che

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4i^2 - 1} = \frac{n}{2n+1}$$

Problema 4.

Si definisca nei numeri complessi $\mathbb{C}$ la seguente relazione ($z, w \in \mathbb{C}$):

$$z\,R\,w \quad \Leftrightarrow \quad |z| \leq |w|$$

- Verificare se la relazione R è di preordine.
- Verificare se la relazione R è d'ordine parziale.

Problema 5.

Sia p un numero intero, $p \neq 0, 1, -1$. Si considerino le seguenti affermazioni:

a) se $p = ab$, $a, b \in \mathbb{Z}$, allora a o b è un'unità

b) se $p|ab$, allora $p|a$ o $p|b$

Dimostrare che a) e b) sono equivalenti.

Problema 6.

Determinare, calcolando la soluzione particolare come nella dimostrazione del Teorema Cinese del Resto, tutte le soluzioni intere del seguente sistema di congruenze

$$\begin{cases} x \equiv_7 2 \\ x \equiv_{23} 2^{22} \end{cases}$$