

Prova Scritta di Calcolo Scientifico e Metodi Numerici
21 febbraio 2020

Numerare e scrivere il nome in tutti i fogli che si consegnano.
Risultati senza svolgimento non verranno presi in considerazione.

1. Assegnate le matrici

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha \\ -\alpha & \alpha & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} \gamma & -3 & -12 \\ -3 & \gamma - 8 & 4 \\ -12 & 4 & \gamma + 1 \end{bmatrix}$$

- a) trovare i valori del parametro reale α che rendono A ortogonale;
- b) trovare i valori del parametro reale γ che rendono C l'inversa di B ;
- c) assegnati ad α e γ i valori trovati:
 - c1) calcolare l'inversa di AC ;
 - c2) calcolare i numeri di condizionamento in norma 1, 2 e ∞ di A ;
 - c3) calcolare i numeri di condizionamento in norma 1, 2 e ∞ di B .

2. Costruire, utilizzando la rappresentazione di Lagrange, il polinomio che interpola la seguente tabella di dati

$$\begin{array}{c|ccccc} x_i & -1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1 \\ \hline y_i & -3 & -3/8 & 0 & -9/8 & -9 \end{array}$$

Calcolare inoltre il valore assunto dal polinomio nel punto di ascissa $x = -2$.

3. Determinare l'intervallo $[k, k + 1]$, con k intero, che contiene la radice positiva dell'equazione

$$f(x) = \sin(3x) - x^2 + 2x + 3 = 0.$$

Calcolare le prime due iterate del metodo di bisezione, a partire dall'intervallo trovato, e le prime due iterate del metodo di Newton, a partire dall'estremo sinistro dell'intervallo determinato. Qual è l'ordine di convergenza dei metodi utilizzati?

4. Assegnata la matrice dipendente dal parametro reale β

$$B = \begin{bmatrix} \beta & 1/6 & 0 \\ 1/6 & \beta & 1/6 \\ 0 & 1/6 & \beta \end{bmatrix}$$

- a) determinare i valori di β tali che:
 - a1) B sia invertibile;
 - a2) B sia definita positiva;
 - a3) il metodo di Jacobi applicato al sistema $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$ risulti convergente;
- b) assegnati $\beta = 1$, $\mathbf{b} = [1, 2, 3]^T$ e $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 1, 1]^T$, calcolare le prime due iterate del metodo di Jacobi per la risoluzione del sistema $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

5. Assegnata la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

- a) determinare le matrici P , L e U che la fattorizzano tramite l'algoritmo di Gauss con pivoting;
- b) tramite le matrici determinate al punto a):
 - b1) risolvere il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = [13, 5, 13]^T$;
 - b2) calcolare l'inversa di A e il suo determinante.