# Soluzioni (Modello del quiz Moodle)

① $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \{0,2\}$
$n \longmapsto 1+(-1)^n$

La funzione $f$ invia $n$ pari in 2
$n$ dispari in 0

Quindi è suriettiva ma non iniettiva (c)

② $f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$
$x \longmapsto 2x+1$

Per calcolare la funzione inversa, prendo $y \in \mathbb{Q}$ tale che $2x+1 = y$ e risolvo l'equazione per $x$:

$$2x+1 = y$$
$$\Leftrightarrow \quad 2x = y-1$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{y-1}{2}$$

Quindi la funzione inversa è la (b)

③ $(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R$ ma $(a,c) \notin R$
Quindi $R$ non è transitiva (d)

(4) Siccome "Matematica" e "Materia" cominciano con la stessa lettera, le loro classi di equivalenza coincidono. (a)

(5) $\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!\,2!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4!\,2} = 15$ (b)

(6) N° del biglietto: "a b c" dove

$a, b, c \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$

e $a \neq b$, $b \neq c$, $a \neq c$. Allora per "a" ho 5 possibilità di scelta, 4 possibilità per "b" e 3 possibilità per "c". Quindi $5 \times 4 \times 3$ (d)

(7) $(x+y)^7 = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} x^k y^{7-k}$

Quindi, quando $k = 3$, abbiamo il coefficiente $\binom{7}{3}$ (a)

(8) Il metodo induttivo richiede la verifica di un caso base ($n=0$) e la dimostrazione di una implicazione (se il risultato vale per $n$, allora vale anche per $n+1$. (b)

ipotesi di induzione

(9) $[-2] = \{ n \in \mathbb{Z} : n \equiv -2 \pmod{11} \}$

Chiaramente, per l'algoritmo della divisione,

$-2 = 11 \cdot (-1) + 9$

Quindi, $-2 \equiv 9 \pmod{11}$ e, allora, $9 \in [-2]$. (d)

(10) Attenzione: Teorema

$[a] = [b] \iff a \sim b$

$\bigcup_{a \in X} [a] = X$ e $[a] \cap [b] = \phi$ se e solo se $a \not\sim b$

per ogni relazione su $X$

Quindi, c e d sono false e $[3] = [12] \iff 10 \mid 3-12 \iff 10 \mid -9$ falso

e $[-3] = [7] \iff 10 \mid -3-7 \iff 10 \mid -10$ vero! (a)

(11) $7 \cdot 5 = 35 \equiv 3 \pmod 8$.
Quindi, 5 è soluzione.
Allora tutte le soluzioni sono
$5 + \frac{8}{\mathrm{mcd}(7,8)} k = 5 + 8k, \quad k \in \mathbb{Z}$
(a)

(12) $\varphi(17) = 16$ (17 è primo)
Siccome $\mathrm{mcd}(2,17) = 1$, allora il Teorema di Euler ci garantisce che $2^{\varphi(17)} \equiv 1 \pmod{17}$ (b)

(13) $p \nmid n \Leftrightarrow \mathrm{mcd}(p,n) = 1$
Quindi cerchiamo $\varphi(p^n)$, che abbiamo dimostrato di essere $p^n - p^{n-1}$. (c)

(14) Si osservi che $v = -w$.
Allora la risposta è (c)

(15) $|v \times w|$ è l'area del parallelogrammo definito da $v$ e $w$. Siccome $\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 0$, allora l'area è zero e i vettori sono sulla stessa retta. (a)

(16) $$\det(A) = (-1)^{2+1}(-1)\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

↓ Sviluppo di Laplace lungo la prima riga

$$= 1 \cdot (1 - (-2)) = 3$$ (a)

(17) Una matrice con due righe uguali ha una ovvia relazione di dipendenza fra le righe. Quindi il determinante è zero. (a)

18) $\begin{cases} x = 2t \\ y = 2t + 3s \\ z = 2 - s \end{cases} \iff \begin{cases} y = x + 3s \\ s = 2 - z \end{cases}$

$\iff \begin{cases} y = x + 3(2-z) \\ \end{cases} \iff \begin{cases} y - x + 3z = 6 \end{cases}$

a

19) $x = y - 2z \iff x - y + 2z = 0.$

Allora il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ è perpendicolare al piano $\Pi$.

a

20) $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

A invertibile $\iff$ il sistema ha un'unica soluzione.

b

21

$$r: \begin{cases} x+y-z=2 \\ x+y+z=0 \end{cases} \quad (*)$$

$$s: \begin{cases} x+y-z=2 \\ x+y+z=3 \end{cases} \quad (**)$$

L'intersezione è l'insieme di soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x+y-z=2 \\ x+y+z=0 \\ x+y-z=2 \\ x+y+z=3 \end{cases}$$

Gli equazioni (*) e (**) sono incompatibili, quindi il sistema non ha soluzioni. Cioè le rette sono parallele o sghembe. Il sistema omogeneo

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y-z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

è chiaramente equivalente al sistema

$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ e quindi ci sono infinite soluzioni in questo sistema: le rette sono parallele.

(c)

(Alternativamente: si osservi che le rette non si intersecano, ma appartengono allo stesso piano $x+y-z=2$ - quindi devono essere parallele).

22 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 3\cdot 2 + 4\cdot 0 & 3\cdot(-1) + 4\cdot 1 \\ -1\cdot 2 + 0\cdot 0 & (-1)(-1) + 0\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

19 $\frac{z}{\bar{z}} = \frac{z^2}{z \cdot \bar{z}} = \frac{z^2}{|z|^2}$ (a)

20 $\frac{5}{2+i} = \frac{5(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{10-5i}{5}$

$= 2 - i$ (a)

Chiave finale:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. c | 7. a | 13. c | 19. a |
| 2. b | 8. b | 14. c | 20. b |
| 3. d | 9. d | 15. a | 21. c |
| 4. a | 10. a | 16. a | 22. b |
| 5. b | 11. a | 17. a | 23. a |
| 6. d | 12. b | 18. a | 24. a |