

Esame per il Corso di MATEMATICA 2
Università di Studi di Cagliari, 2018/2019
Corso di Laurea in Chimica

25 febbraio 2020

Durata: 3 ore

Attenzione: Per ottenere il punteggio massimo in ogni domanda, la risposta deve essere dettagliatamente giustificata. Giustificazioni parziali potranno essere considerate per punteggi parziali. Risposte senza giustificazioni non verranno considerate. Le soluzioni ammissibili sono esclusivamente quelle nella bella. In ogni caso bisogna consegnare anche la brutta copia.

1. Siano v e w due vettori in $\mathbb{R}^3$ tali che $v \cdot w = 1$, $\|v\| = \|w\| = \sqrt{2}$, e tali che l'angolo θ fra v e w si trova nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$. Sia z la proiezione ortogonale di v in w .
 - (a) **(1,5 punti)** Si calcoli lo scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $z = \lambda w$.
 - (b) **(1 punto)** Si calcoli l'angolo θ .
 - (c) **(1,5 punti)** Si calcoli l'area del parallelogramma definito da v e w .
2. Si calcolino:
 - (a) **(3 punti)** il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x^3 + 1}{2x^3 - 2}$;
 - (b) **(3 punti)** la retta tangente al grafico di $f(x) = \ln(\sqrt{x-1})$ nel punto $x = 2$;
3. Si consideri la funzione definita in $\mathbb{R}$ dall'espressione $f(x) = \frac{x}{e^{2x}-1}$.
 - (a) **(3 punti)** Si trovino gli zeri, il segno e gli asintoti della funzione f in tutto il suo dominio.
 - (b) **(5 punti)** Si trovino gli intervalli dove f è crescente o decrescente e i punti massimi e minimi relativi (se ci sono) della funzione in $\mathbb{R}$. Per ogni massimo o minimo trovato, si indichi se sono massimi o minimi assoluti.
 - (c) **(3 punti)** Si trovino gli intervalli dove f è concava e dove f è convessa in $\mathbb{R}$ e si indichi se ci sono flessi.
 - (d) **(1 punto)** Si tracci il grafico di f .
 - (e) **(3 punti)** Si determini se l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ è convergente o divergente. In caso sia convergente, si calcoli il suo valore.
4. **(3 punti)** Si calcoli l'area della regione delimitata dai grafici di $f(x) = \cos(x)$ e $g(x) = \sin(x)$ e delle rette verticali $x = 0$ e $x = \pi/2$.
5. Siano f e g due funzioni continue in $[a, b]$ e derivabili in ogni punto di $]a, b[$. Supponiamo che $f(a) = f(b)$ e che $g(a) = g(b)$, e sia h la funzione definita in $[a, b]$ come $h(x) = f(x) - g(x)$.
 - (a) **(1 punto)** Si dimostri che la funzione h ammette almeno un punto stazionario $x = c$ nell'intervallo $]a, b[$.
 - (b) **(1 punto)** Si dimostri che per qualsiasi punto stazionario $x = c$ di h , la retta tangente al grafico di f nel punto c è parallela alla retta tangente al grafico di g nel punto c .

Esame di Matematica 2 - Appello 6
(25/02/2020) Corso di Laurea in Chimica

① $v \cdot w = 1$
 $\|v\| = \|w\| = \sqrt{2}$
 $\theta \in [0, \pi/2]$ — angolo fra v e w .

a) z proiezione ortogonale di v in w

La proiezione ortogonale di v in w è calcolata tramite la formula $p_w(v) = (\underbrace{\|v\| \cos \theta}_{\text{scalare } \lambda}) w$

Siccome $v \cdot w = \|v\| \|w\| \cos \theta$, allora

$$\frac{v \cdot w}{\|w\|} = \|v\| \cos \theta = \lambda.$$

$$\text{Quindi } \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

b) Per la stessa formula $\cos \theta = \frac{v \cdot w}{\|v\| \|w\|} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

Quindi l'angolo θ è uguale a $\frac{\pi}{3}$.

c) L'area del parallelogramma definito da v e w è uguale alla lunghezza del prodotto vettoriale $v \times w$.

$$\begin{aligned} \|v \times w\| &= \|v\| \|w\| \sin \theta = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{3} \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{2} \quad a) \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x^3 + 1}{2x^3 - 2} = \\
 & = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{x^3} - \frac{x^3}{x^3} + \frac{1}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3} - \frac{2}{x^3}} \\
 & = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} - 1 + \frac{1}{x^3}}{2 - \frac{2}{x^3}} = \textcircled{*}
 \end{aligned}$$

Siccome $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$
 e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$ allora per il teorema delle
 operazioni sui limiti, abbiamo che

$$\textcircled{*} = \frac{0 - 1 + 0}{2 - 0} = -\frac{1}{2}$$

b) L'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x = 2$ è

$$\boxed{y = f(2) + f'(2)(x - 2)}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2(x-1)}$$

regola della catena

$$f(2) = \ln(\sqrt{2-1}) = \ln(1) = 0$$

$$f'(2) = \frac{1}{2(2-1)} = \frac{1}{2}$$

Quindi l'equazione della retta tangente è $y = 0 + \frac{1}{2}(x-2)$
 $\Leftrightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}x - 1}$

$$③ \quad f(x) = \frac{x}{e^{2x-1}}$$

$$a) \quad f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Siccome $e^{2x-1} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, abbiamo che
 $f(x) < 0$ per $x < 0$ e $f(x) > 0$ per $x > 0$.

Asintoti : Verticali : f continua di dominio $\mathbb{R} \Rightarrow$ non ci sono asintoti verticali.
Orizzontali :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{2x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2e^{2x-1}} = 0$$

Regola di De L'Hôpital
 (si può usare perché la derivata del
 numeratore e la derivata del denominatore
 non si annullano mai)

$\downarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2e^{2x-1}} = 0$ quindi $y=0$ è
 un asintoto orizzontale
 per $x \rightarrow +\infty$
 Teorema delle
 Operazioni sui limiti

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{2x-1}} = -\infty$$

Siccome $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$

e $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x-1} = 0^+$,

per il teorema delle operazioni sui
 limiti abbiamo il risultato

Vediamo allora se c'è un asintoto obliquo per

$$x \rightarrow -\infty :$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{2x-1}} = +\infty$$

Quindi non ci sono asintoti Obliqui (per $x \rightarrow +\infty$ ce n'è uno orizzontale!).

$$b) \quad f'(x) = \frac{1 \cdot (\cancel{e^{2x-1}}) - \cancel{2e^{2x-1}} \cdot x}{(\cancel{e^{2x-1}})^2}$$

↓
derivata del
quoziente
+
regola della catena

$$= \frac{1 - 2x}{e^{2x-1}}$$

punti stazionari: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2x = 0$
 $\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Segno della derivata:

Siccome $e^{2x-1} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$,

e $1 - 2x > 0$ per $x < \frac{1}{2}$

e $1 - 2x < 0$ per $x > \frac{1}{2}$

abbiamo che $f'(x) < 0$ per $x > \frac{1}{2}$
e $f'(x) > 0$ per $x < \frac{1}{2}$.

In altre parole, f è decrescente nell'intervallo $]\frac{1}{2}, +\infty[$ e crescente nell'intervallo $]-\infty, \frac{1}{2}[$. Allora $x = \frac{1}{2}$ è un punto di massimo relativo. Infatti, siccome è crescente fino a quel punto e decrescente dopo, questo è un massimo assoluto di f .

$$c) f''(x) = \frac{-2 \cdot e^{2x-1} - 2e^{2x-1}(1-2x)}{(e^{2x-1})^2}$$

↓
derivata del
quotiente +
+ regola della
catena

$$= \frac{-2 - 2(1-2x)}{e^{2x-1}} = \frac{-4 + 4x}{e^{2x-1}}$$

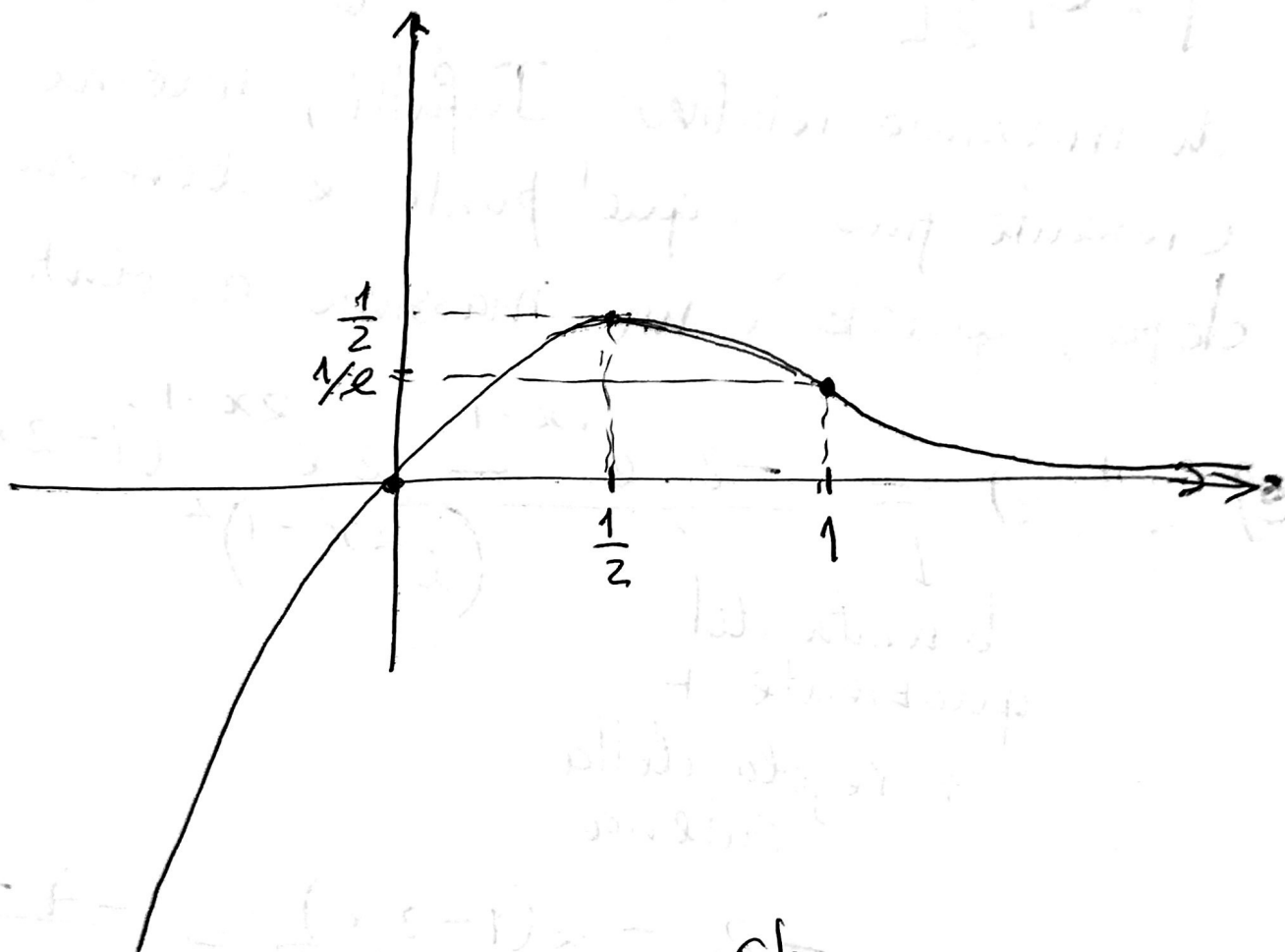
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -4 + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 4x > 4 \Leftrightarrow x > 1$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow 4x < 4 \Leftrightarrow x < 1$$

Quindi f è concava nell'intervallo $]-\infty, 1[$
e convessa nell'intervallo $]1, +\infty[$.
In particolare $x = 1$ è un flesso.

d) $f(0) = \cancel{0} 0$ $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{e^0} = \frac{1}{2}$
 $f(1) = \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$



e) $\int_0^{+\infty} f(x) dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^b f(x) dx$

calcoliamo $\int_0^b f(x) dx = \int_0^b \frac{x}{e^{2x-1}} dx$

$= \int_0^b x \cdot \frac{1}{e^{2x-1}} dx = \int_0^b \underbrace{x}_f \cdot \underbrace{\frac{1}{e^{2x-1}}}_{g'} dx$

$= \left[x \cdot \frac{e^{1-2x}}{-2} \right]_0^b - \int_0^b 1 \cdot \frac{e^{1-2x}}{-2} dx =$

↓
 integrazione per parti

$$= \left[x \cdot \frac{e^{1-2x}}{-2} \right]_0^b - \left[\frac{e^{1-2x}}{4} \right]_0^b$$

$$= \left(\frac{b e^{1-2b}}{-2} - 0 \right) - \left(\frac{e^{1-2b}}{4} - \frac{e}{4} \right)$$

$$= -\frac{b e^{1-2b}}{2} - \frac{e^{1-2b}}{4} + \frac{e}{4}$$

$$= e^{1-2b} \left(-\frac{b}{2} - \frac{1}{4} \right) + \frac{e}{4}$$

$$= \frac{-2b-1}{4 e^{2b-1}} + \frac{e}{4}$$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{-2b-1}{4 e^{2b-1}} + \frac{e}{4} = \left(\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{-2}{8 e^{2b-1}} \right) + \frac{e}{4}$$

Regola di
De L'Hôpital

$$= 0 + \frac{e}{4} = \frac{e}{4}$$

Operazioni sui
limiti

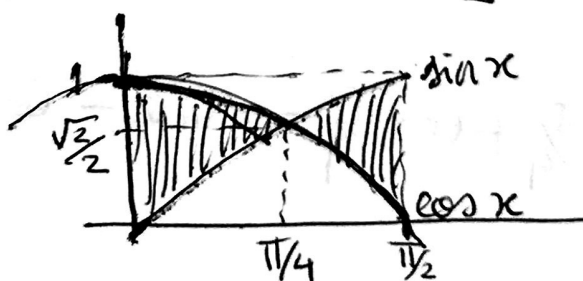
Quindi l'integrale è convergente e vale $\frac{e}{4}$,

④ $f(x) = \cos x$
 $g(x) = \sin x$

Nell'intervallo $[0, \pi/2]$

$$\cos x = \sin x \Leftrightarrow x = \pi/4$$

$$x \in [0, \pi/2]$$



Allora, nell'intervallo $]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$, abbiamo che $\sin x > \cos x$ e nell'intervallo $]0, \frac{\pi}{4}[$ abbiamo che $\cos x > \sin x$. Questo può essere giustificato sapendo che

$\tan x$ è crescente in $]0, \frac{\pi}{2}[$ e

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{e} \quad \tan \frac{\pi}{4} = 1.$$

Quindi per $x > \frac{\pi}{4}$ $\tan x > 1$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} > 1$$

$$\Rightarrow \sin x > \cos x.$$

e vice-versa.

Allora l'area viene calcolata tramite:

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x) - g(x)| dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x - \sin x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x - \cos x dx \\ &= \left[\sin x + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[-\cos x - \sin x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left[\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} - \sin 0 - \cos 0 \right] + \left[-\cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 1 + \left(-0 - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= 2\sqrt{2} - 2 \end{aligned}$$

⑤

a) Sia $h(x) = f'(x) - g'(x)$

- $h(x)$ è continua in $[a, b]$ perchè f e g sono continue in $[a, b]$

- $h(x)$ è derivabile in $]a, b[$ perchè f e g sono derivabili in $]a, b[$

- $h(a) = f'(a) - g'(a) = f'(b) - g'(b) = h(b)$

Quindi, per il teorema di Rolle, esiste $c \in]a, b[$ tale che $h'(c) = 0$

b) Allora, $h'(c) = f''(c) - g''(c) = 0$

Quindi $f''(c) = g''(c)$. Siccome $f'(c)$ è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel punto $x = c$ e $g'(c)$ è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di g nel punto $x = c$, le rette sono parallele.