

Esame di Calcolo delle Probabilità (Soluzioni)

Esercizio 1 (10 punti). *Al gioco della roulette, in ogni giro esce un numero tra 0 e 36, ciascuno con la stessa probabilità $p = \frac{1}{37}$. Il numero 0 è “verde”, mentre i numeri da 1 a 36 sono divisi in due gruppi: metà sono “rossi” e metà sono “neri”. Gaia e Moira giocano contemporaneamente, per 10 giri consecutivi: a ogni giro, Gaia vince se esce un numero “rosso” mentre Moira vince se esce un numero “nero”. Indichiamo con G e M rispettivamente il numero di giri in cui Gaia e Moira vincono, e con N il numero di giri in cui esce il numero 0. Poniamo infine $X := G + M$ e $Y := G + M + N = X + N$.*

- (a) *Si determinino le distribuzioni marginali delle variabili aleatorie G , M , e N .*
- (b) *Si determinino le distribuzioni marginali delle variabili aleatorie X e Y . (Suggerimento: Non è necessario fare calcoli.)*
- (c) *Si spieghi perché $Var(Y) = 0$ e $Var(X) = Var(N)$.*
- (d) *Le variabili aleatorie G e M sono indipendenti? E le variabili aleatorie G , M , e N ?*

Soluzione. (a) Per costruzione si ha banalmente che

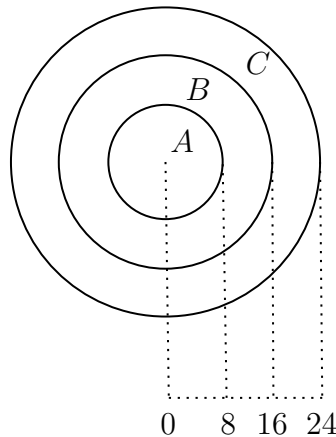
- $G \sim B(10, \frac{18}{37})$;
- $M \sim B(10, \frac{18}{37})$;
- $N \sim B(10, \frac{1}{37})$.

- (b) X è il numero di numeri diversi da 0 che escono in 10 giri, allora $X \sim B(10, \frac{36}{37})$. Ovviamente $G + M + N = 10$ sempre, allora $\mathbb{P}(Y = 10) = 1$ e $\mathbb{P}(Y \neq 10) = 0$.
- (c) Y è la variabile aleatoria costante, quindi la sua varianza è nulla. Sappiamo che, per $a \in \mathbb{R}$, $Var(X + a) = Var(X)$ e che $Var(-X) = Var(X)$, allora

$$Var(X) = Var(Y - N) = Var(10 - N) = Var(-N) = Var(N).$$

- (d) G ed M non sono indipendenti, $0 = \mathbb{P}(G = 10, M = 10) \neq \mathbb{P}(G = 10)\mathbb{P}(M = 10)$. A maggior ragione non sono indipendenti G , M , e N .

Esercizio 2 (15 punti). *Isacco lancia freccette contro un bersaglio circolare di raggio pari a 24cm, diviso in tre regioni A , B , e C da due circonferenze di raggio pari a 8cm e 16cm, come in figura.*



A ogni freccetta lanciata corrisponde un punteggio, determinato nel modo seguente:

- 15 punti se la freccetta colpisce la regione A;
- 5 punti se colpisce la regione B;
- 3 punti se colpisce la regione C;
- 0 punti se manca il bersaglio.

- (a) Quando Isacco è riposato, le sue frecce non mancano mai il bersaglio e finiscono in un punto scelto uniformemente dello stesso. Si determini la probabilità che una freccetta cada in ciascuna delle regioni A, B, e C.
- (b) Detto X il punteggio ottenuto in un lancio da Isacco quando è riposato, si determini la distribuzione di X , mostrando che $\mu = \mathbb{E}(X) = 5$ e $\text{Var}(X) = \frac{40}{3}$. (Suggerimento: Quali valori può assumere X ? Con quali probabilità?)
- (c) Oggi Isacco è riposato e si appresta a eseguire 100 lanci (durante i quali non si stancherà). Si stimi la probabilità che ottenga un punteggio totale maggiore di 573. Come si può verificare empiricamente questo risultato tramite il software R?

Soluzione. (a) Visto che la probabilità è uniforme si ha che

$$\begin{aligned} \bullet \mathbb{P}(A) &= \frac{\text{Area di A}}{\text{Area totale}} = \frac{8^2\pi}{24^2\pi} = \frac{1}{9}; \\ \bullet \mathbb{P}(B) &= \frac{\text{Area di B}}{\text{Area totale}} = \frac{(16^2 - 8^2)\pi}{24^2\pi} = \frac{1}{3}; \\ \bullet \mathbb{P}(C) &= \frac{\text{Area di C}}{\text{Area totale}} = \frac{(24^2 - 16^2)\pi}{24^2\pi} = \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

(b) X prende valori in $\{15, 5, 3\}$ e si ha

$$\mathbb{P}(X = 15) = \frac{1}{9}; \quad \mathbb{P}(X = 5) = \frac{1}{3}; \quad \mathbb{P}(X = 3) = \frac{5}{9}.$$

Quindi

$$\mathbb{E}(X) = 15\frac{1}{9} + 5\frac{1}{3} + 3\frac{5}{9} = 5,$$

inoltre

$$\mathbb{E}(X^2) = 15^2\frac{1}{9} + 5^2\frac{1}{3} + 3^2\frac{5}{9} = 115/3,$$

da cui

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 115/3 - 5^2 = \frac{40}{3}.$$

- (c) Chiamiamo X_j la variabile aleatoria che contiene il punteggio del lancio j -esimo. Ovviamente le X_j sono i.i.d. e sono distribuite come X del punto sopra. Chiamiamo $Z \sim N(0, 1)$ e usiamo il teorema del limite centrale

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{100} X_j \geq 573\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{j=1}^{100} X_j - 100\mathbb{E}(X_j)}{10\sqrt{\text{Var}(X_j)}} \geq \frac{573 - 100\mathbb{E}(X_j)}{10\sqrt{\text{Var}(X_j)}}\right) \\ &\approx \mathbb{P}(Z \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(Z \leq 2) \approx 1 - 0.98 = 2\%. \end{aligned}$$

Questo risultato si può verificare in R simulando molti gruppi di 100 realizzazioni di v.a. con la stessa distribuzione di X e verificando quante volte in percentuale accade che la somma dei risultati sia maggiore di 100. Per esempio si può usare il codice

```
n=1000000
s=0;
punteggio=c(15,5,3);
for (i in 1:n){
ris=sample(punteggio,size=100,replace=TRUE,prob=c(1/9,1/3,5/9));
if (sum(ris)>573){
s=s+1;
}
}
p=s/n
```

Esercizio 3 (10 punti). *Si considerino due variabili aleatorie X e Y con densità congiunta*

$$f(x, y) = \begin{cases} c(x^2 + |y|) & \text{se } 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- (a) *Si determini c in modo che f sia una densità.*
 (b) *Si determinino le densità marginali di X e Y . X e Y sono indipendenti?*

Soluzione. (a) Affinché f sia una densità serve che $f \geq 0$ quasi ovunque e che $\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = 1$. La prima condizione è soddisfatta per $c \geq 0$. Passiamo alla seconda

$$1 = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = c \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + |y|) dx dy \quad (1)$$

$$= c \left[\int_0^1 \left(\int_0^1 x^2 dx \right) dy + \int_0^1 \left(\int_0^1 |y| dy \right) dx \right] \quad (2)$$

$$= c \left[\int_0^1 \frac{1}{3} dy + \int_0^1 \frac{1}{2} dx \right] \quad (3)$$

$$= \frac{5}{6} c \quad (4)$$

quindi $c = \frac{6}{5}$.

(b) Iniziamo da f_X

$$f_X(x) = \int_0^1 \frac{6}{5} (x^2 + |y|) dy = \frac{6}{5} x^2 + \frac{3}{5}.$$

Calcoliamo ora f_Y

$$f_Y(y) = \int_0^1 \frac{6}{5} (x^2 + |y|) dx = \frac{2}{5} + \frac{6}{5} |y|.$$

Ovviamente $f(x, y) \neq f_X(x) f_Y(y)$ quasi ovunque, quindi X e Y non sono indipendenti.

Esercizio 4 (10 punti). Siano $(X_n)_n$ variabili aleatorie i.i.d. con densità marginali

$$f_{X_n}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} 1_{(0,1)}(x).$$

(a) Si mostri che per ogni $\varepsilon \in (0, 1)$ e $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\mathbb{P}(X_n \leq \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}.$$

(b) Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si calcoli la funzione di ripartizione $F_{M_n}(\cdot)$ della variabile aleatoria

$$M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}.$$

(c) Si mostri che la successione di variabili aleatorie $(M_n)_n$ converge in legge verso una variabile aleatoria costante.

(d) Definendo per $n \in \mathbb{N}$

$$Z_n = n(1 - M_n),$$

si mostri che per $n \rightarrow \infty$ si ha che Z_n converge a $Z \sim \text{Esp}(1/2)$ in legge.

Soluzione. (a)

$$\mathbb{P}(X_n \leq \varepsilon) = \int_0^\varepsilon \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} \Big|_0^\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}.$$

(b) Sia $0 \leq t \leq 1$, allora

$$\begin{aligned} F_{M_n}(t) &= \mathbb{P}(\max\{X_1, \dots, X_n\} \leq t) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq t, \dots, X_n \leq t) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq t) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(X_n \leq t) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq t)^n \\ &= t^{n/2}. \end{aligned}$$

Quindi

$$F_{M_n}(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0, \\ t^{n/2} & 0 < t < 1, \\ 1 & t \geq 1. \end{cases}$$

(c) Calcoliamo il limite puntuale di $F_{M_n}(t)$ per $n \rightarrow \infty$ e per ogni t .

Caso $t \leq 0$. $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{M_n}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$;

Caso $0 < t < 1$. $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{M_n}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} t^{n/2} = 0$;

Caso $t \geq 1$. $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{M_n}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$.

Quindi F_{M_n} converge puntualmente alla funzione di ripartizione di una variabile aleatoria costante pari a 1, da cui

$$M_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 1.$$

(d) Calcoliamo la funzione di ripartizione di Z_n .

$$\begin{aligned} F_{Z_n}(t) &= \mathbb{P}(Z_n \leq t) \\ &= \mathbb{P}(n(1 - M_n) \leq t) \\ &= \mathbb{P}(M_n \geq 1 - t/n) \\ &= 1 - \mathbb{P}(M_n \leq 1 - t/n) \\ &= 1 - F_{M_n}(1 - t/n) \\ &= \begin{cases} 1 & 1 - t/n \leq 0 \\ 1 - (1 - t/n)^{n/2} & 0 < 1 - t/n < 1 \\ 0 & 1 - t/n \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi

$$F_{Z_n}(t) = \begin{cases} 1 & t \geq n \\ 1 - (1 - t/n)^{n/2} & 0 < t < n \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

Facendo il limite per $n \rightarrow \infty$ otteniamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{Z_n}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 1 & t \geq n \\ 1 - (1 - t/n)^{n/2} & 0 < t < n \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 - e^{-t/2} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

Questa è la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria $Z \sim Esp(1/2)$, quindi

$$Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z.$$

Tabella 2: Legge, funzione di ripartizione, media, e varianza più importanti distribuzioni.

	Densità	F. di rip.	Media	Varianza
$B(n, p)$	$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$		np	$np(1-p)$
Ipergeometrica	$p_k = \frac{\binom{r}{k} \binom{b}{n-k}}{\binom{b+r}{n}}$		$\frac{nr}{b+r}$	$\frac{nr b(b+r-n)}{(b+r)^2(b+r-1)}$
$P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$		λ	λ
$G(p)$	$p_k = p(1-p)^k$	$1 - (1-p)^{k+1}$	$\frac{1-p}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$Exp(\lambda)$	$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$N(\mu, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$		μ	σ^2
$\Gamma(\alpha, \lambda)$	$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$		$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$