

Esame per il Corso di MATEMATICA DISCRETA (2019/2020)

Corso di Laurea in Informatica, Università di Studi di Cagliari

18 febbraio 2020

Durata: 3 ore

Attenzione: Per ottenere il punteggio massimo in ogni domanda, la risposta deve essere dettagliatamente giustificata. Giustificazioni parziali potranno essere considerate per punteggi parziali. Risposte senza giustificazioni non verranno considerate. Le soluzioni ammissibili sono esclusivamente quelle nella bella. In ogni caso bisogna consegnare anche la brutta copia.

Parte A

1. Sia $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ la funzione definita da $f(x) = 5x + 3$
 - (a) (2 punti) Si determini se f è iniettiva, suriettiva e/o biiettiva.
 - (b) (2 punti) Si determini se la funzione f ha un'inversa. In caso positivo, si trovi una tale funzione (indicando il suo dominio, codominio e espressione generale), e si giustifichi che la soluzione trovata è giusta.
2. (2 punti) Quanti sottoinsiemi con almeno 3 elementi esistono in un insieme con 10 elementi?
3. (3 punti) Si dimostri per induzione che per ogni $n \geq 1$, si ha $\sum_{k=1}^n 2^k = 2^{n+1} - 2$.
4. (3 punti) Si trovi la minima soluzione positiva dell'equazione $12x \equiv 15 \pmod{39}$.
5. (3 punti) Si trovi il resto della divisione di 9^{122} per 26.

Parte B

6. Siano $\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$ vettori nello spazio con coordinate (rispetto ad una base ortonormale B fissata):

$$\vec{OP} \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{OQ} \equiv \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) (2 punti) Si calcoli il prodotto vettoriale $\vec{OP} \times \vec{OQ}$.
 - (b) (1 punto) Si determini l'area del parallelogramma determinato dai vettori $\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$.
 - (c) (2 punti) Si determini l'equazione cartesiana del piano che contiene i punti O , P e Q .
7. Per ogni numero reale k si consideri il seguente sistema di tre equazioni lineari in tre incognite x , y e z :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 2y + kz = 0 \\ x + z = -1. \end{cases}$$

- (a) (2 punti) Sia A la matrice dei coefficienti del sistema di equazioni. Si calcoli il determinante di A (come funzione di k).
- (b) (1 punto) Si determini per quali valori di k il sistema ha un'unica soluzione.

L'esame continua sul verso!

(c) **(2 punti)** Si usi la regola di Cramer per determinare le soluzioni del sistema di equazioni per $k = -1$.

(d) **(2 punti)** Siano r e s le rette definite dall'equazioni cartesiane:

$$r : \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$s : \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 0 \\ x + z = -1. \end{cases}$$

Quale delle seguenti affermazioni descrive la posizione relativa delle rette r e s ?

- i. r e s si intersecano in un solo punto.
- ii. r e s coincidono.
- iii. r e s sono parallele, ma non coincidenti.
- iv. r e s sono sghembe.

8. **(2 punti)** Sia $z = 2 - 3i$ e $w = 3 + 4i$. Si calcolino numeri reali a e b tali che $\frac{z}{w} = a + bi$.

Parte C

9. Due matrici quadrate $n \times n$, A e B , si dicono simili se esiste una matrice invertibile X tale che

$$A = X^{-1}BX.$$

- (a) **(0,5 punti)** Si dimostri che due matrici simili hanno lo stesso determinante.
- (b) **(1 punto)** Si dimostri che la relazione di similitudine è una relazione di equivalenza.
- (c) **(0,5 punti)** Si determini la classe di equivalenza della matrice identica per la relazione di similitudine.

Esame di Matematica Discreta (cdL Informatica)
Appello 3 (18/02/2020)

PARTE A

① $f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$
 $x \longmapsto 5x+3$

a) f è iniettiva.

Per dimostrarlo, supponiamo $a, b \in \mathbb{Q}$ tali che $f(a) = f(b)$. Dimostriamo che $a = b$ e quindi $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$, cioè, f è iniettiva.

$$\begin{aligned}\text{Infatti } f(a) = f(b) &\Leftrightarrow 5a + 3 = 5b + 3 \\ &\Leftrightarrow 5a = 5b \\ &\Leftrightarrow a = b,\end{aligned}$$

f è suriettiva

Devo dimostrare che per ogni elemento y del codominio ($\mathbb{Q}$), esiste un elemento x del dominio (anche $\mathbb{Q}$) tale che $f(x) = y$.

Prendiamo allora $y \in \mathbb{Q}$.

Se $y = 5x + 3$ per un certo x , allora abbiamo che x deve per forza essere uguale a $\frac{y-3}{5}$. Quindi, infatti abbiamo

$$\text{Che } f\left(\frac{y-3}{5}\right) = 5\left(\frac{y-3}{5}\right) + 3 = y \quad \text{e}$$

la funzione è suriettiva

Siccome f è iniettiva e suriettiva, allora f è anche biiettiva.

b) Siccome f è biiettiva, f ha una funzione inversa. Dalla dimostrazione della suriettività, abbiamo visto che la controimmagine di un elemento y è precisamente $\frac{y-3}{5}$.

Quindi dimostreremo che

$$g: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \quad \text{è la funzione inversa di } f.$$
$$y \longmapsto \frac{y-3}{5}$$

Infatti $f \circ g(y) = f\left(\frac{y-3}{5}\right) = 5\left(\frac{y-3}{5}\right) + 3 = y$
e quindi $f \circ g = \text{Id}_{\mathbb{Q}}$

e anche $g \circ f(x) = g(5x+3) = \frac{(5x+3)-3}{5} = x$

e quindi $g \circ f = \text{Id}_{\mathbb{Q}}$.

② Un insieme con 10 elementi ha 2^{10} sottoinsiemi.

Quindi:

$$\begin{aligned} \text{n° sottoinsiemi con almeno 3 elementi} &= 2^{10} - \left(\begin{array}{l} \text{n° sottoinsiemi} \\ \text{con 1 elemento} \end{array} \right) \\ &\quad - \left(\begin{array}{l} \text{n° sottoinsiemi} \\ \text{con 2 elementi} \end{array} \right) = \end{aligned}$$

$$= 2^{10} - \binom{10}{1} - \binom{10}{2} = 1024 - 10 - \frac{10!}{8!2!}$$

$$= 1024 - 10 - \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8!2!} = 1014 - 45 = 969.$$

$$\textcircled{3} \quad \forall n \geq 1 \quad \sum_{k=1}^n 2^k = 2^{n+1} - 2$$

Caso base $n=1$

$$\sum_{k=1}^1 2^k = 2 \quad \text{e} \quad 2^{1+1} - 2 = 4 - 2 = 2$$

Quindi per $n=1$ l'uguaglianza è verificata.

IPOTESI INDUTTIVA: PER UN CERTO $N \geq 1$, SUPPONIAMO CHE $\sum_{k=1}^N 2^k = 2^{N+1} - 2$.

TESI DA DIMOSTRARE: $\sum_{k=1}^{N+1} 2^k = 2^{N+2} - 2$

$$\sum_{k=1}^{N+1} 2^k = \sum_{k=1}^N 2^k + 2^{N+1} = (2^{N+1} - 2) + 2^{N+1}$$

↓
IPOTESI INDUTTIVA

$$= 2^{N+1} + 2^{N+1} - 2 = 2 \cdot 2^{N+1} - 2$$

$$= 2^{N+2} - 2, \text{ come}$$

volevamo dimostrare.

$$(4) \quad 12x \equiv 15 \pmod{39}$$

$$\text{med}(12, 39) = ?$$

$$(*) \quad 39 = 3 \cdot 12 + \boxed{3} \longrightarrow \text{med}(12, 39) = 3,$$

$$12 = 4 \cdot 3 + 0$$

Siccome $3 \mid 15$, l'equazione modulare ha soluzioni.

Scriviamo $\text{med}(12, 39) = 12 \cdot u + 39 \cdot v$ per interi u e v .

Infatti, da (*) si conclude subito che

$3 = 39 - 3 \cdot 12$ e quindi, tenendo in conto che $39 \equiv 0 \pmod{39}$ otteniamo

$$3 \equiv -3 \cdot 12 \pmod{39}.$$

Moltiplicando entrambi le parti per $\frac{15}{3} = 5$,

$$\text{otteniamo} \quad 15 \equiv -15 \cdot 12 \pmod{39}$$

e quindi $x = -15$ è una soluzione dell'equazione.

la soluzione generale è $x = -15 + \frac{39}{\text{med}(12, 39)} \cdot k$ dove $k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Cioè, } x = -15 + \frac{39}{3} k = -15 + 13k.$$

Allora per ottenere la più piccola soluzione positiva devo sostituire k adeguatamente.

Per $k=1$ ottengo $x = -15 + 13 \cdot 1 = -2$
che non è ancora positiva.

Per $k=2$ ottengo $x = -15 + 13 \cdot 2 = 11$
che sarà la più piccola soluzione positiva.

(per $k \leq 1$ la soluzione è negativa, per $k > 2$ la soluzione è maggiore di 11).

⑤ $\text{med}(26, 9) = ?$

$$26 = 2 \cdot 9 + 8$$

$$9 = 1 \cdot 8 + \boxed{1}$$

$$8 = 8 \cdot 1 + 0$$

$$\rightarrow \text{med}(26, 9) = 1$$

Quindi, per il teorema di Euler,

$$a^{\varphi(26)} \equiv 1 \pmod{26}.$$

$$\varphi(26) = 26 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{13}\right) = 26 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{13} = 12.$$

$$\downarrow$$
$$26 = 2 \cdot 13$$

Quindi $a^{12} \equiv 1 \pmod{26}.$

Per l'algoritmo della divisione, abbiamo che

$$122 = 12 \cdot 10 + 2$$

e, quindi

$$9^{122} = (9^{12})^{10} \cdot 9^2 \equiv 1^{10} \cdot 9^2 \pmod{26}$$

Cioè $9^{122} \equiv 81 \pmod{26}$

Adesso, osserviamo che di nuovo per l'algoritmo di divisione

$$81 = 3 \cdot 26 + 3$$

e quindi $9^{122} \equiv 3 \pmod{26}$.

PARTI B

⑥ a) $\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ} = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \stackrel{\substack{\text{sviluppo} \\ \text{di Laplace lungo} \\ \text{prima} \\ \text{riga}}}{=} \downarrow$

dove $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= (-1)^{1+1} e_1 \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2} e_2 \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3} e_3 \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= e_1 (-2) - e_2 (-2-3) + e_3 \cdot 4$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b) Area del parallelogramma $= |\vec{OP'} \times \vec{OQ}|$
 $= \sqrt{(-2)^2 + 5^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 25 + 16} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

c) Siccome $\vec{OP'} \times \vec{OQ}$ è perpendicolare sia a $\vec{OP'}$ che a $\vec{OQ}$, è anche perpendicolare al piano che li contiene, cioè, $\vec{OP'} \times \vec{OQ}$ è un vettore normale al piano che contiene $\vec{OP'}$ e $\vec{OQ}$. L'equazione cartesiana di un tale piano è allora data da

$$\underbrace{-2x + 5y + 4z = 0}$$

Coordinate di $\vec{OP'} \times \vec{OQ}$.

⑦
$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 2y + kz = 0 \\ x + z = -1 \end{cases}$$

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & k \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\det(A) = (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & k \end{pmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
 ↓
 sviluppo di Laplace lungo riga 3

$$= (2k - 2) + (2 - 4) = 2k - 4$$

b) Il sistema ha un'unica soluzione precisamente quando il rango della matrice dei coefficienti è massimo. Questo accade se e solo se il determinante di A è diverso da zero. Quindi il sistema ha un'unica soluzione se e solo se $2k - 4 \neq 0$
 $(\Rightarrow) k \neq 2$.

c) Per $k = -1$, da (b) si conclude che il sistema ha un'unica soluzione e da (a) che $\det(A) = 2(-1) - 4 = -6$. Per la regola di Cramer, la soluzione del sistema è determinata da:

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{\begin{matrix} \text{sviluppo lungo} \\ \text{colonna 1} \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix}}{-6}$$

$$y = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{\begin{matrix} \text{sviluppo di} \\ \text{Laplace lungo colonna 2} \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix}}{-6}$$

$$= \frac{(-1)(2+1) + (-1)(-1)(-1-2)}{-6} = -1$$

$$= \frac{-3 - 3}{-6} = 1$$

$$z = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}{\det(A)} \quad \begin{array}{l} \text{sviluppo lungo} \\ \text{colonna 3} \end{array} \quad = \frac{(-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}{-6}$$

$$= \frac{-2 - (2 - 4)}{-6} = 0$$

Quindi la soluzione è $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

d) r n s è determinata dal sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ x + z = -1 \end{cases} \quad \text{equazioni ripetute}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ x + z = -1 \end{cases} \quad \leftarrow \text{questo è il nostro sistema per } k = 2.$$

Quindi ci sarà più di una soluzione $\emptyset$ nessuna soluzione...

Matrice completa messa a gradini (eliminazione Gaussiana)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi questo sistema ha $\infty^{n-r} = \infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni

(dove $n = n^\circ$ incognite

$r =$ rango della matrice

completa $= n^\circ$ righe non
nulle della
matrice messa
a gradini)

Quindi $r \wedge s$ è un insieme infinito e
allora, per forza, le rette devono
essere coincidenti, cioè, $r = s$.

$$\textcircled{8} \quad \frac{2-3i}{3+4i} = \frac{(2-3i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} =$$

moltiplico
per $\overline{w} = 3-4i$
nel numeratore
e nel denominatore

$$= \frac{6 - 9i - 8i + 12i^2}{9 - 16i^2} = \frac{-6 - 17i}{25}$$

$i^2 = -1$

$$\text{Quindi } a = \frac{-6}{25} \quad \text{e} \quad b = \frac{-17}{25}$$

PARTE C

$$\textcircled{9} \quad \text{a) Se } A = X^{-1} B X \text{ per una matrice invertibile } X$$

allora per il teorema di Binet

$$\det(A) = \det(x^{-1}) \det(B) \det(x)$$

$$= \frac{1}{\det(x)} \det(B) \cancel{\det(x)} = \det(B).$$

$\swarrow$
 $\det(x^{-1}) = \frac{1}{\det(x)}$

b). A è simile a A perché

$$A = I_n^{-1} A I_n \quad \text{per la matrice identica } I_n$$

(si osserva che $I_n^{-1} = I_n$).

• Se A è simile a B , allora esiste X invertibile tale che $A = X^{-1} B X$.
Moltiplicando a sinistra per X e a destra per X^{-1} , si ha che

$$X A X^{-1} = \underbrace{X X^{-1}}_{I_n} B \underbrace{X X^{-1}}_{I_n} = I_n B I_n = B.$$

Siccome $(X^{-1})^{-1} = X$, allora per $Y = X^{-1}$ si ha che $B = Y^{-1} A Y$ e B è simile a A .

• Se A è simile a B e B è simile a C allora esiste X invertibile tale che $A = X^{-1} B X$ e Y invertibile tale che

$$B = Y^{-1} C Y.$$

$$\begin{aligned} \text{Allora } A &= X^{-1} B X = X^{-1} (Y^{-1} C Y) X \\ &= X^{-1} Y^{-1} C Y X \end{aligned}$$

Se prendo $Z = XY$, Z è invertibile e la sua inversa è $Y^{-1} X^{-1}$ e quindi

$$A = Z^{-1} C Z.$$

Quindi la relazione di similitudine è una relazione di equivalenza

$$\begin{aligned} e) [I_n] &= \{ A \in M_n(\mathbb{R}) : A \text{ è simile a } I_n \} \\ &= \left\{ A \in M_n(\mathbb{R}) : \exists x \text{ invertibile : } \right. \\ &\quad \left. A = X^{-1} I_n X \right\} \end{aligned}$$

~~$$= \{ A \in M_n(\mathbb{R}) : \exists x \text{ invertibile : } A = X^{-1} I_n X \}$$~~

$$\text{Ma } X^{-1} I_n X = X^{-1} \cdot X = I_n$$

↓
 I_n è elemento
neutro per il prodotto
di matrici

Quindi $[I_n] = \{ I_n \}$, cioè, la classe di equivalenza ha un'unico elemento.