

Esame di Calcolo delle Probabilità (Soluzioni)

Esercizio 1 (15 punti). *Una scatola contiene 21 carte di cui 9 hanno entrambe le facce rosse, 7 le hanno entrambe nere mentre 5 hanno una faccia rossa e una nera.*

- (a) *Disponendo casualmente tutte le carte sul tavolo, qual è la probabilità che io veda più facce nere che rosse? (Suggerimento: chiama X la variabile aleatoria che conta il numero di carte bi-colori che mostrano la faccia nera e esprimi il numero di facce nere e rosse in vista in funzione di X .)*
- (b) *Pesco ora una sola carta dalla scatola e la dispongo casualmente sul tavolo e osservo che la faccia che vedo è rossa. Qual è la probabilità che la faccia nascosta sia nera?*

Soluzione. (a) Sia X la v.a. che conta il numero di carte bi-colori che mostrano la faccia nera. Ovviamente $X \sim B(5, \frac{1}{2})$. Abbiamo che il numero totale di carte che mostrano la faccia nera è $X + 7$ e il numero totale di carte che mostrano la faccia rossa è $9 + (5 - X)$. Vogliamo calcolare la probabilità che il primo sia più grande del secondo, quindi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X + 7 > 9 + (5 - X)) &= \mathbb{P}(X > 3.5) = \mathbb{P}(X \geq 4) = \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 5) \\ &= \binom{5}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right) + \binom{5}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{32} + \frac{1}{32} = \frac{3}{16} \approx 0.19. \end{aligned}$$

- (b) Chiamiamo N l'evento "la carta mostra la faccia nera" e R l'evento "la carta mostra la faccia rossa". Inoltre definiamo gli eventi b = "la carta scelta è bicolore", n = "la carta scelta è nera", e r = "la carta scelta è rossa". Possiamo avere che la faccia nascosta sia nera sapendo che la faccia che vedo è rossa solo se la carta scelta è bicolore, dunque vogliamo calcolare $\mathbb{P}(b|R)$. Dal teorema di Bayes abbiamo

$$\mathbb{P}(b|R) = \frac{\mathbb{P}(R|b)\mathbb{P}(b)}{\mathbb{P}(R)}.$$

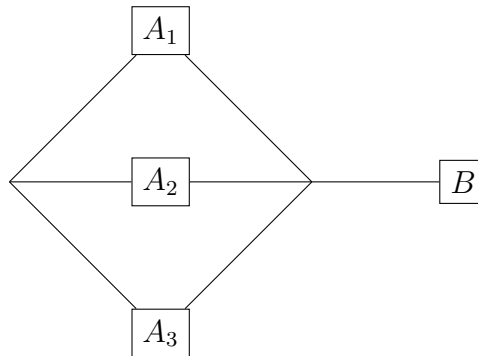
Ovviamente $\mathbb{P}(R|b) = \frac{1}{2}$ e $\mathbb{P}(b) = \frac{5}{21}$, resta da calcolare $\mathbb{P}(R)$. Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R) &= \mathbb{P}(R|b)\mathbb{P}(b) + \mathbb{P}(R|r)\mathbb{P}(r) + \mathbb{P}(R|n)\mathbb{P}(n) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{21} + 1 \cdot \frac{9}{21} + 0 \cdot \frac{7}{21} = \frac{23}{42}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\mathbb{P}(b|R) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{21}}{\frac{23}{42}} = \frac{5}{23} \approx 0.22.$$

Esercizio 2 (10 punti). *La macchina M è costituita da quattro componenti organizzati come segue*



La macchina M smette di funzionare se B si guasta e/o se tutti gli A_j $j = 1, 2, 3$ si guastano. Siano T_{A_1} , T_{A_2} , T_{A_3} e T_B le variabili aleatorie che misurano il tempo di vita (in anni) dei vari componenti. Assumiamo che $T_{A_j} \sim \text{Esp}(\lambda_A)$ per $j = 1, 2, 3$ e $T_B \sim \text{Esp}(\lambda_B)$ e che queste variabili aleatorie siano indipendenti. Inoltre, sia T la variabile aleatoria che misura il tempo di vita (in anni) della macchina M . Calcola la funzione di ripartizione di T (non serve semplificare la funzione).

Soluzione. Chiamiamo $T_A = \max(T_{A_1}, T_{A_2}, T_{A_3})$, allora T_A misura il tempo di vita del “blocco” della macchina M formato dai componenti A_1 , A_2 , e A_3 . Calcoliamo ora la funzione di ripartizione di T

$$\begin{aligned}
 F_T(t) &= \mathbb{P}(T \leq t) \\
 &= \mathbb{P}(\min(T_A, T_B) \leq t) \\
 &= 1 - \mathbb{P}(\min(T_A, T_B) > t) \\
 &= 1 - \mathbb{P}(T_A > t, T_B > t) \\
 &= 1 - \mathbb{P}(T_A > t)\mathbb{P}(T_B > t) \\
 &= 1 - \mathbb{P}(\max(T_{A_1}, T_{A_2}, T_{A_3}) > t)(1 - \mathbb{P}(T_B \leq t)) \\
 &= 1 - [1 - \mathbb{P}(\max(T_{A_1}, T_{A_2}, T_{A_3}) \leq t)][1 - F_{T_B}(t)] \\
 &= 1 - [1 - \mathbb{P}(T_{A_1} \leq t)\mathbb{P}(T_{A_2} \leq t)\mathbb{P}(T_{A_3} \leq t)][1 - F_{T_B}(t)] \\
 &= 1 - [1 - F_{T_{A_1}}(t)F_{T_{A_2}}(t)F_{T_{A_3}}(t)][1 - F_{T_B}(t)] \\
 &= 1 - [1 - (1 - e^{-\lambda_A t})^3]e^{-\lambda_B t}.
 \end{aligned}$$

Esercizio 3 (10 punti). *Definiamo*

$$f(x, y) = \begin{cases} cxy & \text{se } 0 \leq x, y \leq 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases},$$

con $c \in \mathbb{R}$ costante

- Determina c in modo che f sia una densità bi-dimensionale;
- Siano X e Y variabili aleatorie con densità congiunta f . Determina le densità marginali di X e Y . X e Y sono indipendenti?
- Calcola la speranza matematica di $X + Y$ e di XY .

Soluzione. (a) Dobbiamo scegliere c in modo che $f \geq 0$ e $\int_{\mathbb{R}^2} f = 1$. La prima condizione è soddisfatta se $c \geq 0$. Passiamo alla seconda

$$1 = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 cxy dx dy = c \int_0^1 x dx \int_0^1 y dy = \frac{c}{4},$$

allora $c = 4$.

(b) Calcoliamo $f_X(x)$. Se $0 \leq x \leq 1$

$$f_X(x) = \int_0^1 4xy dy = 2x,$$

altrimenti $f_X(x) = 0$. Similmente

$$f_Y(y) \begin{cases} 2y & \text{se } 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ovviamente $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$, quindi X e Y sono indipendenti.

(c) Calcoliamo $\mathbb{E}(X + Y)$

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 2 \int_0^1 x^2 dx + 2 \int_0^1 y^2 dy = \frac{4}{3}.$$

Osserviamo che X e Y sono indipendenti, quindi $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$, ne segue

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{4}{9}.$$

Esercizio 4 (5 punti). Sia X_n una successione di variabili aleatorie indipendenti tali che per ogni n $X_n \sim G\left(\frac{1}{4}\right)$. Sia

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_n,$$

calcola una stima della probabilità che S_{100} sia maggiore di 300. Descrivi come potresti verificare empiricamente questo risultato utilizzando R (o un altro software a tua scelta).

Soluzione. Calcoliamo valore atteso e varianza di X_n .

$$\mathbb{E}(X_n) = n \frac{1-p}{p} = 3,$$

$$\text{Var}(X_n) = \frac{1-p}{p^2} = 12.$$

Usando il teorema del limite centrale e chiamando $Z \sim N(0, 1)$ abbiamo

$$\mathbb{P}(S_{100} > 300) = \mathbb{P}\left(\frac{S_{100} - 100 \cdot 3}{10\sqrt{12}} > \frac{300 - 100 \cdot 3}{10\sqrt{12}}\right) \approx \mathbb{P}(Z > 0) = 0.5.$$

Questo risultato si può verificare in R simulando molti gruppi di 100 realizzazioni di v.a. $G\left(\frac{1}{4}\right)$ e verificando quante volte in percentuale accade che la somma dei risultati sia maggiore di 300. Per esempio si può usare il codice

```
n=1000000
s=0;
for (i in 1:n){
ris=rgeom(100, 0.25)
if (sum(ris)>300){
s=s+1;
}
}
p=s/n
```

Esercizio 5 (10 punti). Sia $(X_n)_n$ una successione di variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite tali che $X_1 \sim U(0, 1)$. Definiamo

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(X_i).$$

Dimostra che $Y_n \xrightarrow{P} -1$.

(Suggerimento: Ricorda la legge dei grandi numeri...)

Soluzione. Chiamiamo $Z_i = \log(X_i)$, sappiamo che le Z_i sono i.i.d. in quanto funzione di v.a. i.i.d.. Per la legge dei grandi numeri sappiamo che

$$Y_n \xrightarrow{P} \mathbb{E}(Z_i).$$

Se mostriamo che $\mathbb{E}(Z_i) = -1$ abbiamo finito

$$\mathbb{E}(Z_i) = \mathbb{E}(\log(X_i)) = \int_0^1 \log(x) dx = [x(\log(x) - 1)]_0^1 = 1(0 - 1) = -1.$$

Tabella 2: Legge, funzione di ripartizione, media, e varianza più importanti distribuzioni.

	Densità	F. di rip.	Media	Varianza
$B(n, p)$	$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$		np	$np(1-p)$
Ipergeometrica	$p_k = \frac{\binom{r}{k} \binom{b}{n-k}}{\binom{b+r}{n}}$		$\frac{nr}{b+r}$	$\frac{nr b(b+r-n)}{(b+r)^2(b+r-1)}$
$P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$		λ	λ
$G(p)$	$p_k = p(1-p)^k$	$1 - (1-p)^{k+1}$	$\frac{1-p}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$Exp(\lambda)$	$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$N(\mu, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$		μ	σ^2
$\Gamma(\alpha, \lambda)$	$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$		$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$