Esame per il Corso di MATEMATICA DISCRETA (2019/2020)

Corso di Laurea in Informatica, Università di Studi di Cagliari

4 febbraio 2020

Durata: 3 ore

Attenzione: Per ottenere il punteggio massimo in ogni domanda, la risposta deve essere dettagliatamente giustificata. Giustificazioni parziali potranno essere considerate per punteggi parziali. Risposte senza giustificazioni non verrano considerate. Le soluzioni ammissibili sono esclusivamente quelle nella bella. In ogni caso bisogna consegnare anche la brutta copia.

Parte A

1. Sia $f\colon \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}$ definita da $f((a,b)) = a+b$.

   (a) (**2 punti**) Si determini se la funzione f è iniettiva, suriettiva e/o biiettiva.

   (b) Sia R la relazione su $\mathbb{Z}^2$ definita per

   $$R = \{((a,b),(c,d)) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 : a+b = c+d\}.$$

   i. (**2 punti**) Si dimostri che R è una relazione di equivalenza.

   ii. (**2 punti**) Si determinino tutti gli elementi della classe di equivalenza dell'elemento $(0,0)$ di $\mathbb{Z}^2$.

2. (**2 punti**) Quanti sottoinsiemi con almeno 3 e non piú di 5 elementi ci sono in un insieme con 11 elementi?

3. (**3 punti**) Si dimostri per induzione che per ogni $n \geq 1$ si ha $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2 = \frac{(-1)^n n(n+1)}{2}$.

4. (**3 punti**) Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione modulare $7x \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 17)$.

Parte B

5. Siano $\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$ vettori nello spazio tali che, rispetto ad una base ortonormale B fissata, soddisfano

   $$\vec{OP} \cdot \vec{OQ} = 3, \quad |\vec{OP}| = 2, \quad |\vec{OQ}| = \sqrt{3}$$

   (a) (**1 punto**) Si calcoli l'angolo fra questi due vettori.

   (b) (**2 punti**) Si usi il risultato di (a) per calcolare l'area del parallelogramma definito dai vettori $\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$.

6. Si fissi una base ortonormale B dello spazio, e si consideri la retta r con equazioni parametriche

   $$r\colon \begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = t+1 \end{cases}$$

   e la retta s con equazioni cartesiane

   $$s\colon \begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ -y + z = -1. \end{cases}$$

L'esame continua sul verso!

(a) (**1 punto**) Si determinino le coordinate di due punti della retta r.

(b) (**1 punto**) Si determinino gli equazioni cartesiane della retta r.

(c) (**3 punti**) Si dimostri che $r \cap s = \emptyset$. Le rette r e s sono parallele o sghembe?

7. Si consideri la seguenti matrice completa di un sistema di 3 equazioni a 3 incognite.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) (**2 punti**) Attraverso del metodo di eliminazione Gaussiana, si determini il rango di A e il numero di soluzioni del sistema di equazioni associato.

(b) (**1,5 punti**) Si usi la matrice a gradini ottenuta in (a) per determinare tutte le soluzioni del sistema di equazioni associato ad A.

(c) (**3 punti**) Sia B la matrice 3×3 dei coefficienti del sistema di equazioni di cui A è la matrice completa, cioè,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Si determini se B è invertibile e, in caso positivo, si trovi la matrice inversa di B.

(d) (**0,5 punti**) Si usi il risultato finale di (c) per determinare tutte le soluzioni del sistema di equazioni associato ad A.

Parte C

8. Sia $p \geq 5$ un numero primo.

(a) (**1 punto**) Si dimostri che $p^2 \equiv 1 \pmod 3$ e che $p^2 \equiv 1 \pmod 8$. (**Suggerimento:** si determinino i resti possibili della divisione di p per 3 e per 8).

(b) (**1 punto**) Si dimostri che 24 divide $p^2 - 1$.

MATEMATICA DISCRETA (CdL INFORMATICA)

Appello 2 04/02/2020 - Soluzioni

PARTE A

① $f: \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}$
$(a,b) \longmapsto a+b$

a) La funzione f non è iniettiva. Infatti ci sono elementi diversi del dominio con la stessa immagine, per esempio $f((0,1)) = f((1,0)) = 1$.

La funzione f è suriettiva. Dimostriamo che per ogni elemento y del codomino, esiste almeno un elemento x del dominio che abbia y per immagine, cioè, $f(x) = y$. Se $y \in \mathbb{Z}$, allora l'elemento $(0,y) \in \mathbb{Z}^2$ ha la proprietà desiderata, cioè, $f((0,y)) = 0 + y = y$. Quindi f è suriettiva.

Siccome f non è iniettiva, allora f non è biiettiva (una funzione è biiettiva se e solo se è sia iniettiva che suriettiva).

b) i/ Osserviamo che $R = \{((a,b),(c,d)) : f((a,b)) = f((c,d))\}$

Allora chiaramente R è riflessiva poichè

$f((a,b)) = f((a,b))$ per ogni $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$

R è anche simmetrica:

Se $f((a,b)) = f((c,d))$ allora $f((c,d)) = f((a,b))$

Per fine osserviamo che f è transitiva:
Dati $(a,b), (c,d), (k,\ell) \in \mathbb{Z}^2$ abbiamo che se $f((a,b)) = f((c,d))$ e $f((c,d)) = f((k,\ell))$, allora $f((a,b)) = f((k,\ell))$.

ii) $[(0,0)] = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 : ((a,b),(0,0)) \in R\}$

↓ definizione di classe di equivalenza

Osserviamo adesso che $((a,b),(0,0)) \in R$ se e solo se $a+b = 0+0 = 0$.

Allora $[(0,0)] = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 : a+b = 0\}$

cioè, l'insieme di tutte le coppie ordinate della forma $(a,-a)$, dove $a \in \mathbb{Z}$.

② Per definizione di coefficiente binomiale, $\binom{11}{k}$ è il numero di sottoinsiemi con k elementi in un insieme con 11 elementi.
Allora la risposta alla domanda viene datta dal numero $\binom{11}{3} + \binom{11}{4} + \binom{11}{5}$.
Sapendo che $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ possiamo calcolare questo numero.

$$\binom{11}{3} = \frac{11!}{3!\,8!} = \frac{11\times10\times9\times\cancel{8!}}{3\times2\times\cancel{8!}} = 11\times5\times3 = 165$$

$$\binom{11}{4} = \frac{11!}{4!\,\cancel{7!}} = \frac{11\times10\times9\times\cancel{8}\times\cancel{7!}}{\cancel{4}\times3\times\cancel{2}\times\cancel{7!}} = 11\times10\times3 = 330$$

$$\binom{11}{5} = \frac{11!}{\cancel{5}!\,6!} = \frac{11\times\cancel{10}\times9\times8\times7\times\cancel{6!}}{\cancel{5}\times4\times3\times\cancel{2}\times\cancel{6!}} = 11\times3\times2\times7 = 462$$

Quindi il totale richiesto è $165 + 330 + 462 = 957$.

③ $\forall n \geq 1 \quad \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = \frac{(-1)^n n(n+1)}{2}$

Dimostriamo questa affermazione per induzione.

$n=1$ (caso base) $\quad \sum_{k=1}^{1} (-1)^k k^2 = (-1)^1 1^2 = -1$ ✓

$$\frac{(-1)^1 \cdot 1 \cdot (1+1)}{2} = -1$$

Supponiamo adesso che il risultato sia valido per un certo $N \geq 1$. Dimostriamo che il risultato vale anche per $N+1$.

IPOTESI INDUTIVA: $\sum_{k=1}^{N} (-1)^k k^2 = \frac{(-1)^N N(N+1)}{2}$

TESI: $\sum_{k=1}^{N+1} (-1)^k k^2 = \frac{(-1)^{N+1}(N+1)(N+2)}{2}$

Si osserva che $\sum_{k=1}^{N+1} (-1)^k k^2 = \left(\sum_{k=1}^{N} (-1)^k k^2\right) + (-1)^{N+1}(N+1)^2$

$$= \frac{(-1)^N N(N+1)}{2} + (-1)^{N+1}(N+1)^2 = \frac{(-1)^N N(N+1) + 2\cdot(-1)^{N+1}(N+1)^2}{2}$$

$$= \frac{(-1)(-1)^{N+1} N(N+1) + 2\cdot(-1)^{N+1}(N+1)^2}{2}$$

↑ IPOTESI INDUTIVA

↑ $(-1)^N = (-1)^{N+2}$

$$= \frac{(-1)^{N+1}(N+1)(-N+2(N+1))}{2}$$

$$= \frac{(-1)^{N+1}(N+1)(N+2)}{2}$$ come volevamo dimostrare.

④ $7x \equiv 3 \pmod{17}$

$\text{mcd}(7,17) = ?$

$(*)\ 17 = 2 \cdot 7 + 3$

$(**)\ 7 = 2 \cdot 3 + \boxed{1}$ → $\text{mcd}(7,17)$

$3 = 1 \cdot 3 + 0$

Siccome $\text{mcd}(7,17) \mid 3$ allora l'equazione ha soluzioni. Scriviamo adesso il $\text{mcd}(7,17)$ come $7u + 17v$ per certi numeri u e v in $\mathbb{Z}$.

Da $(**)$ ottengo che $1 = 7 - 2 \cdot 3$

e da $(*)$ ottengo che $3 = 17 - 2 \cdot 7$.

Allora

$$1 = 7 - 2 \cdot 3 = 7 - 2 \cdot (17 - 2 \cdot 7)$$
$$= 7 - 2 \cdot 17 + 4 \cdot 7$$
$$= 5 \cdot 7 - 2 \cdot 17$$

Cioè, posso prendere $u = 5$ e $v = -2$.

Allora $1 = 5 \cdot 7 - 2 \cdot 17$

$$\Rightarrow 1 \equiv 5 \cdot 7 \pmod{17}$$

E quindi, $3 \equiv 15 \cdot 7 \pmod{17}$.

Allora $x = 15$ è una soluzione intera di quella equazione modulare e tutte soluzioni sono della forma $x = 15 + \frac{17}{\text{mcd}(17,7)} k = 15 + 17k$ dove $k \in \mathbb{Z}$.

PARTE B

(5) a) $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 3$

$|\overrightarrow{OP}| = 2$

$|\overrightarrow{OQ}| = \sqrt{3}$

Siccome $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = |\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}| \cos\theta$, dove θ è l'angolo fra i due vettori, allora otteniamo che $\cos\theta = \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Quindi $\theta = \frac{\pi}{6}$

b) L'area del parallelogrammo viene calcola come la lunghezza del prodotto vettoriale:

$$\text{Area} = |\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}| = |\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}| \sin\frac{\pi}{6}$$
$$= 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}$$
$$= \sqrt{3}.$$

(6) $r: \begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = t+1 \end{cases}$ $s: \begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ -y + z = -1 \end{cases}$

a) Per determinare due punti della retta r, basta sostituire t per due valori reali qualsiasi.

Per esempio $t = 0 \rightsquigarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in r$

$t = 1 \rightsquigarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in r$

b) Per determinare gli equazioni cartesiane della retta r basta sostituire t:

$$\begin{cases} y = t \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x = -2y \\ z = y + 1 \end{cases}$$

Quindi r è completamente determinata delle equazioni $\begin{cases} x = -2y \\ z = y + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y = 0 \\ z - y = 1 \end{cases}$

c) $r \cap s = ?$ Gli punti di $r \cap s$ sono quelli di coordinate $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ che soddisfano tutte equazioni

$$\begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ -y + z = -1 \end{cases} s$$
$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ z - y = 1 \end{cases} r$$

Guardiamo la matrice completa di questo sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Chiaramente facendo l'operazione elementare $R_4 \longrightarrow R_4 - R_2$ ottengo $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

e dall'ultima riga concludo che il sistema è incompatibile

Cioè $r \cap s = \phi$.

Per determinare se le rette sono parallele o sghembe dobbiamo metterle sullo stesso piano e vedere se hanno un solo punto di intersezione o se coincidono.
Quindi vediamo le soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ -y + z = 0 \\ x + 2y = 0 \\ z - y = 0 \end{cases}$$

matrice completa: $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$R_3 \to R_3 - 2R_1$
$R_4 \to R_4 - R_1$ ↓

$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ← Questa matrice ha rango 2 e, quindi, ci sono $3-2$ soluzioni

(3 = n° incognite
2 = rango matrice completa)

Cioè, la intersezione delle due rette traslate allo stesso piano è una retta - quindi r e s sono parallele.

⑦ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

a) $A \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 + 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & -5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to \frac{R_2}{5}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4/5 & -2/5 \\ 0 & -1 & -5 & -1 \end{pmatrix}$

$R_3 \to R_3 + R_2$ ↓

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & -\frac{21}{5} & -7/5 \end{pmatrix}$

Quindi rango di A = 3 e il sistema ha un'unica soluzione.

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\det(B) = (-1)^{1+3} \cdot 2 \det\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{3+3}(-1)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

↓ Sviluppo di Laplace lungo terza colonna

$$= 2(-2-6) - (3+2) = -21$$

Quindi, siccome $\det(B) \neq 0$, B è invertibile.
Per calcolare la matrice inversa, dobbiamo calcolare tutti i cofattori $C_{ij} = (-1)^{(i+j)} \det B_{ij}$ dove B_{ij} è la matrice ottenuta da B eliminando la riga i e colonna j.

$C_{11} = (-1)^{1+1}\det\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -3$ $\quad C_{12} = (-1)^{1+2}\det\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -2$

$C_{13} = (-1)^{1+3}\det\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -8$ $\quad C_{21} = (-1)^{2+1}\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 3$

$C_{22} = (-1)^{2+2}\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -5$ $\quad C_{23} = (-1)^{2+3}\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1$

$C_{31} = (-1)^{3+1}\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = -6$ $\quad C_{32} = (-1)^{3+2}\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = -4$

$C_{33} = (-1)^{3+3}\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = 5$.

Quindi $B^{-1} = \frac{1}{-21}\begin{pmatrix} -3 & 3 & -6 \\ -2 & -5 & -4 \\ -8 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/7 & -1/7 & 2/7 \\ 2/21 & 5/21 & 4/21 \\ 8/21 & -1/21 & -5/21 \end{pmatrix}$

(c) Il sistema di equazioni è

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{B}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Se moltiplichiamo per B^{-1} nei due lati dell'uguaglianza

otteniamo $\underbrace{B^{-1}B}_{Id_3}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = B^{-1}\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix}$

$Id_3 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

Quindi, siccome $Id_3\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, ottengo

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = B^{-1}\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix}$$ e quindi,

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/7 & -1/7 & 2/7\\ 2/21 & 5/21 & 4/21\\ 8/21 & -1/21 & -5/21\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2/7 - 2/7\\ -\frac{10}{21} - \frac{4}{21}\\ 2/21 + 5/21\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

Cioè la soluzione del sistema è $\begin{cases}x = 0\\ y = -2/3\\ z = 1/3\end{cases}$

Parte C

(8) a) Siccome p non è divisibile per 3, abbiamo che $p \equiv 1 \pmod 3$ oppure $p \equiv 2 \pmod 3$ ($p \equiv 0 \pmod 3$ significherebbe che p è divisibile per 3).

Quindi $p^2 \equiv 1^2 \pmod 3$ oppure $p^2 \equiv 2^2 \pmod 3$

$\Downarrow$

$p^2 \equiv 1 \pmod 3$ $\vee$ $p^2 \equiv 4 \equiv 1 \pmod 3$

Siccome p è dispari, allora $p^2 \equiv 1 \pmod 8$

(Se p fosse congruente a 0, 2, 4 o 6, allora $p-0$, $p-2$, $p-4$, $p-6$ sarebbe divisibile per 8 e quindi p sarebbe pari)

$\vee\ p \equiv 3 \pmod 8$

$\vee\ p \equiv 5 \pmod 8$

$\vee\ p \equiv 7 \pmod 8$

Quindi, $p^2 \equiv 1^2 \pmod 8$ $\vee$ $p^2 \equiv 3^2 \pmod 8$

$\vee$ $p^2 \equiv 5^2 \pmod 8$ $\vee$ $p^2 \equiv 7^2 \pmod 8$

ma $1 \equiv 1 \pmod 8$

$25 \equiv 1 \pmod 8$ Quindi $p^2 \equiv 1 \pmod 8$.

e $49 \equiv 1 \pmod 8$

b) Siccome $p^2 \equiv 1 \pmod 3 \iff 3 \mid p^2-1$

$\iff \exists k \in \mathbb{Z} : p^2-1 = 3k$

$p^2 \equiv 1 \pmod 8 \iff 8 \mid p^2-1$

$\iff \exists \ell \in \mathbb{Z} : p^2-1 = 8\ell$

Allora $3k = 8\ell$

$\Longrightarrow 8 \mid k \wedge 3 \mid \ell$, cioè,

Teorema fondamentale dall'aritmetica

$p^2-1 = 3 \cdot 8 \cdot m$ per un certo m

(dove $k = 8 \cdot m$, $\ell = 3 \cdot m$)

Quindi $24 \mid p^2-1$

---

④ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & -21/5 & -7/5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to -\frac{5}{21}R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 7/21 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[R_1 \to R_1 - 2R_3]{R_2 \to R_2 - \frac{4}{5}R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{array}\right)$

Quindi la soluzione è $x = 0$, $y = -2/3$, $z = 1/3$.