

Esercizi per il Corso di MATEMATICA DISCRETA

Foglio 10

6 dicembre 2019

1. Per ognuna delle seguenti matrici si determini se la funzione lineare associata è iniettiva, suriettiva o biiettiva.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \\ -4 & -3 & -8 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad F = BC \quad G = CB \quad H = DB \quad J = BD \quad K = E^2$$

2. Si calcolino $\det(D)$, $\det(E)$ e $\det(E^2)$.
3. Si scrivano tutte le permutazioni di S_4 come prodotto di cicli disgiunti. Quali di queste permutazioni sono pari e quali sono dispari?
4. Siano k e m numeri **interi** e sia $A_{(m,k)}$ la matrice a due parametri

$$\begin{pmatrix} 5 & k & -4 \\ 7 & m & k - 2m \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

- (a) Si determinino tutte le coppie (m, k) tali che la matrice $A_{(m,k)}$ non è invertibile. In questi casi, qual è il rango di $A_{(m,k)}$?
- (b) Per $(m, k) = (-2, 5)$ si trovi la matrice inversa.
- (c) Si trovi l'espressione generale della funzione lineare inversa di quella associata alla matrice $A_{(-2,5)}$.
5. Una matrice $n \times n$ $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ si dice **triangolare superiore** se per ogni $i > j$ si ha $a_{ij} = 0$.
- (a) Qual è il numero massimo di entrate non nulle che A può avere?
- (b) Si dimostri per induzione su n che il determinante di A coincide col prodotto degli elementi sulla diagonale di A .

Alcuni risultati del Foglio 8

1. (a) Un'unica soluzione, $(-3, 3, 0)$. (b) Un'unica soluzione, $(5/2, 1/2, 0)$. (c) Impossibile. (d) Un'unica soluzione, $(-21/73, 190/73, 318/73)$. (e) Un piano di soluzioni, di equazione $x - 3y + 2z = 6$.
2. (a) 3. (b) 3. (c) 3. (d) 3. (e) 1.

3. (a) \emptyset . (b) $(21/2, 3/2, 15/2)$. (c) s . (d) $(19/2, 1/2, 13/2)$. (e) \emptyset (r è parallela a ψ). (f) $(-3/2, 1/2, -1/2)$. (g) \emptyset (il punto trovato in (f) non appartiene a η).
4. (a) $\psi: 4x + 3y = 6$. (b) No. (c) $r: \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$. (d) $s: \begin{cases} 3x - 4y = -8 \\ x + 4z = 12 \end{cases}$. (e) \emptyset (r e s sono sghembe). (f) $\pi_{a,b}: ax + by = 3a - 2b$, per $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. (g) Il punto S appartiene a r , e quindi a tutti i piani $\pi_{a,b}$ (che contengono r).
5. (a) $k = -7$; (b) Non esiste tale k ; (c) Per qualsiasi $k \neq -3$ le rette non si intersecano; (d) Per qualsiasi $k \neq -3$ le rette sono sghembe.