

Esame per il Corso di MATEMATICA 2
Università di Studi di Cagliari, 2018/2019
Corso di Laurea in Chimica

24 gennaio 2020

Durata: 3 ore

Attenzione: Per ottenere il punteggio massimo in ogni domanda, la risposta deve essere dettagliatamente giustificata. Giustificazioni parziali potranno essere considerate per punteggi parziali. Risposte senza giustificazioni non verranno considerate. Le soluzioni ammissibili sono esclusivamente quelle nella bella. In ogni caso bisogna consegnare anche la brutta copia.

1. Sia k un numero reale e si considerino il seguente sistema di tre equazioni lineari in tre variabili x, y e z :

$$\begin{cases} x - y - z = 2 \\ kx + y - z = 0 \\ -2x - y + 5z = 1. \end{cases}$$

- (a) **(1 punto)** Sia A la matrice dei coefficienti del sistema di equazioni. Si calcoli il determinante di A (come funzione dipendente di k).
- (b) **(1 punto)** Si usi il teorema di Rouché-Capelli per determinare per quali valori di k il sistema di equazioni non ha soluzioni.
- (c) **(2 punti)** Si usi il teorema di Cramer per calcolare la soluzione del sistema quando $k = \frac{1}{3}$.
2. Si calcolino:
- (a) **(3 punti)** il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+2x} - \sqrt{3-x}}{x}$;
- (b) **(3 punti)** la retta tangente al grafico di $f(x) = \sin(1 - e^x)$ nel punto $x = 0$;
3. Si consideri la funzione definita in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ dall'espressione $f(x) = \ln((x-1)^2)$.
- (a) **(3 punti)** Si trovino gli zeri, gli asintoti e il segno della funzione f in tutto il suo dominio.
- (b) **(5 punti)** Si trovino gli intervalli dove f è crescente o decrescente e i punti massimi e minimi relativi (se ci sono) della funzione in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Per ogni massimo o minimo trovato, si indichi se sono massimi o minimi assoluti.
- (c) **(2 punti)** Si trovino gli intervalli dove f è concava e dove f è convessa in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- (d) **(1 punto)** Si tracci il grafico di f .
- (e) **(3 punti)** L'integrale improprio $\int_0^1 f(x) dx$ è convergente o divergente? In caso sia convergente, si calcoli il suo valore. *
4. **(4 punti)** Si calcoli l'area della regione delimitata dai grafici di $f(x) = x^2 + 4$ e $g(x) = 5x$.
5. Sia f una funzione di dominio $\mathbb{R}$, derivabile in ogni punto del suo dominio. Supponiamo che $f(-5) = -3$ e che per ogni c nell'intervallo $[-5, 1]$ abbiamo $f'(c) \leq 3$.
- (a) **(1 punto)** Si dimostri che esiste c in $[-5, 1]$ tale che $f'(c) = \frac{f(1)}{6} + \frac{1}{2}$.
- (b) **(1 punto)** Si dimostri che $f(1) \leq 15$.

* Se necessario, si usi il fatto che $\lim_{y \rightarrow 0} y \ln(y^2) = 0$.

① a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ k & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{sviluppo di} \\ \text{Laplace lungo riga 1}}}{(-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}} + (-1)^{1+2} \cdot (-1) \det \begin{pmatrix} k & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot (-1) \det \begin{pmatrix} k & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= (5 - 1) + (5k - 2) - (-k + 2)$$

$$= 6k$$

b) Si consideri la matrice

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ k & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Il teorema di Rouché-Capelli dice che il Sistema ha soluzioni

se e solo se $\text{rk } A = \text{rk } \tilde{A}$. Quindi il sistema non ha soluzioni se $\text{rk } A \neq \text{rk } \tilde{A}$. Calcoliamo il rango di A e il rango di $\tilde{A}$.

$$\text{rk } A = \begin{cases} 3 & \text{se } k \neq 0 \quad (\text{in questo caso } \det(A) \neq 0 \text{ e quindi il rango è massimale}) \\ 2 & \text{se } k = 0 \quad (\text{in questo caso } \det(A) = 0 \text{ ma esiste una sottomatrice } \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ con determinante } \neq 0) \end{cases}$$

Invece si osservi che $\text{rk}(\tilde{A}) = 3$ per qualunque valore di k . Infatti la sottomatrice ottenuta cancellando la prima colonna di $\tilde{A}$: $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ ha per determinante (sviluppo di Laplace lungo seconda riga):

$$(-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = -(-1 - 10) - (-1 + 2) = 11 - 1 = \boxed{10}$$

(2)

e, quindi, $\tilde{A}$ ha rango 3.

In conclusione, il sistema non ha soluzioni precisamente quando $\text{rk}(A) \neq \text{rk}(\tilde{A})$ e questo succede solamente quando $k=0$ (dove $\text{rk}(A)=2$ e $\text{rk}(\tilde{A})=3$).

(c) Per il teorema di Cramer, siccome per $k=\frac{1}{3}$ il determinante di A è $6 \cdot \frac{1}{3} = 2$, il sistema ha un'unica soluzione:

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}}{\det(A)} \stackrel{\substack{\text{sviluppo di Laplace} \\ \downarrow \text{lungo riga 2}}}{=} \frac{(-1)^{2+2} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot (-1) \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}{2}$$

$$= \frac{(10 + 1) + (-2 + 1)}{2} = 5$$

$$y = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1/3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}}{\det(A)} \stackrel{\substack{\text{sviluppo} \\ \downarrow \text{lungo colonna 2}}}{=} \frac{(-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1/3 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1/3 & -1 \end{pmatrix}}{2}$$

sviluppo
lungo colonna 2

$$= \frac{-2(\frac{5}{3} - 2) - (-1 + \frac{1}{3})}{2}$$

$$= \frac{-\frac{10}{3} + 4 + 1 - \frac{1}{3}}{2} = \frac{\frac{15}{3} - \frac{11}{3}}{2} = \frac{4}{6}$$

$$z = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{\det(A)} \stackrel{\substack{\text{sviluppo} \\ \downarrow \text{lungo colonna 3}}}{=} \frac{(-1)^{1+3} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1/3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1/3 & 1 \end{pmatrix}}{2}$$

sviluppo
lungo colonna 3

$$= \frac{2(-\frac{1}{3} + 2) + (1 + \frac{1}{3})}{2} = \frac{2 \cdot \frac{5}{3} + \frac{4}{3}}{2} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

Quindi la soluzione del sistema è $x = 5$, $y = \frac{2}{3}$, $z = \frac{7}{3}$.

② a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+2x} - \sqrt{3-x}}{x} =$ ③

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{3+2x} - \sqrt{3-x})(\sqrt{3+2x} + \sqrt{3-x})}{x(\sqrt{3+2x} + \sqrt{3-x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3+2x - (3-x)}{x(\sqrt{3+2x} + \sqrt{3-x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x(\sqrt{3+2x} + \sqrt{3-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{\sqrt{3+2x} + \sqrt{3-x}}$$

Siccome $\sqrt{3+2x} + \sqrt{3-x}$ è continua in $x=0$, abbiamo
 $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{3+2x} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{3}$. Quindi, per il
 teorema delle operazioni sui limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{\sqrt{3+2x} + \sqrt{3-x}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) Siccome f è una composizione di funzioni
 derivabili nel punto $x=0$, la retta tangente al
 grafico di f è data dall'equazione

$$y = f(0) + f'(0)(x-0)$$

$$f(0) = \sin(1-e^0) = \sin(1-1) = \sin 0 = 0$$

$$f'(x) = \cos(1-e^x) \cdot (-e^x)$$

↓
 regola della
 catena

$$f'(0) = \cos(1-e^0) \cdot (-e^0) = -1$$

Quindi $y = 0 + (-1)(x-0)$ ~~$y = 0 + (-1)(x-0)$~~

($\Rightarrow$) $y = -x$ è la retta tangente al grafico
 di f nel punto $x=0$.

③ $f(x) = \ln((x-1)^2)$

④

a) zeri: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln((x-1)^2) = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = e^0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x-1 = 1 \vee x-1 = -1$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 0$$

Segno: $f(x) < 0 \Leftrightarrow \ln((x-1)^2) < 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 < 1$$

e^x è crescente

$$\Leftrightarrow -1 < x-1 < 1$$

$$y^2 < 1$$

$$\Leftrightarrow y \in]-1, 1[$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < 2$$

Quindi f è negativa fra 0 e 2 e positiva negli intervalli $] -\infty, 0[$ e $] 2, +\infty[$.

Asintoti:

- verticali $\lim_{x \rightarrow 1} \ln((x-1)^2) = -\infty$

(siccome $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0^+$, questo limite risulta dal teorema delle operazioni sui limiti)

Quindi $x=1$ è un asintoto verticale di f

- orizzontali: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln((1-x)^2) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln((1-x)^2) = -\infty$$

perchè $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)^2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)^2$ e ⑤

$\ln$ è continua in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Quindi non ci sono asintoti orizzontali.

Obliqui: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln((x-1)^2)}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x-1} = 0$$

Teorema di
De L'Hôpital

(numeratore e denominatore
sono derivabili e derivata
del denominatore $\neq 0$)

Quindi se ci fosse un asintoto obliquo, questo dovrebbe essere una retta del tipo
 $y = 0 \cdot x + b \quad (b \in \mathbb{R})$,

Cioè una retta orizzontale. Ma noi abbiamo già visto che non ci sono asintoti ~~obliqui~~ orizzontali, quindi non ci sono asintoti obliqui.

b) $f'(x) = \frac{2(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{2}{x-1}$

↓
regola della
catena

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x-1} = 0$, ma questo non succede mai.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x-1} > 0 \Leftrightarrow x > 1$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x-1} < 0 \Leftrightarrow x < 1$

Quindi f è crescente in $]1, +\infty[$ e f è decrescente in $] -\infty, 1[$. Non ci sono massimi o minimi perché $f'(x) \neq 0 \forall x$. ⑥

c) $f''(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$

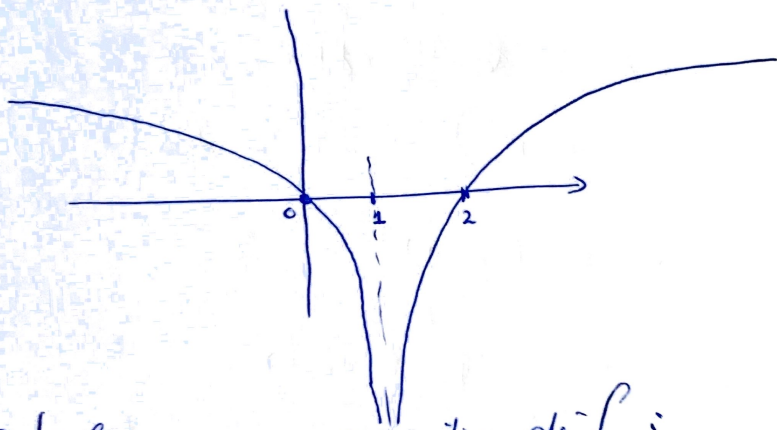
↓
regola della derivata
del quoziente.

Quindi $f''(x) \neq 0 \forall x$ e

$f''(x)$ è sempre negativa perché $(x-1)^2 > 0 \forall x \neq 1$.

Allora f è concava in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

d)



e) calcoliamo una primitiva di f :

$$\int x \ln((x-1)^2) dx = x \ln((x-1)^2) - \int x \cdot \frac{2}{x-1} dx$$

↓
integrazione
per parti

$$= x \ln((x-1)^2) - 2 \int \frac{x}{x-1} dx$$

Calcoliamo adesso

⑦

$$\int \frac{x}{x-1} dx = \int \frac{x+1-1}{x-1} dx$$

$$= \int \frac{x-1}{x-1} + \frac{1}{x-1} dx$$

$$= \int 1 + \frac{1}{x-1} dx = x + \ln|x-1| + C$$

$$\text{Quindi } \int \ln((x-1)^2) dx = x \ln((x-1)^2) - 2x - 2\ln|x-1| + C$$

~~non va bene~~
~~non va bene~~

~~non va bene~~

$$= x \ln((x-1)^2) - 2x - \ln((x-1)^2) + C$$

$$= (x-1) \ln(x-1)^2 - 2x + C$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{b \rightarrow 1^-} \int_0^b f(x) dx$$

$$= \lim_{b \rightarrow 1^-} \left[(b-1) \ln((b-1)^2) - 2b \right] - \left[(0-1) \ln((-1)^2) - 2 \cdot 0 \right]$$

$= 0$

$$= \lim_{b \rightarrow 1^-} (b-1) \ln((b-1)^2) - 2b$$

$$= -2 \quad \text{perché } \lim_{b \rightarrow 1^-} (b-1) \ln(b-1)^2 = \lim_{y \rightarrow 0^+} y \ln y^2 = 1$$

sostituzione

④ $f(x) = x^2 + 4$
 $g(x) = 5x$

$$f(x) = g(x) \quad (\Rightarrow) \quad x^2 + 4 = 5x$$

$$(\Rightarrow) \quad x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(\Rightarrow) \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2}$$

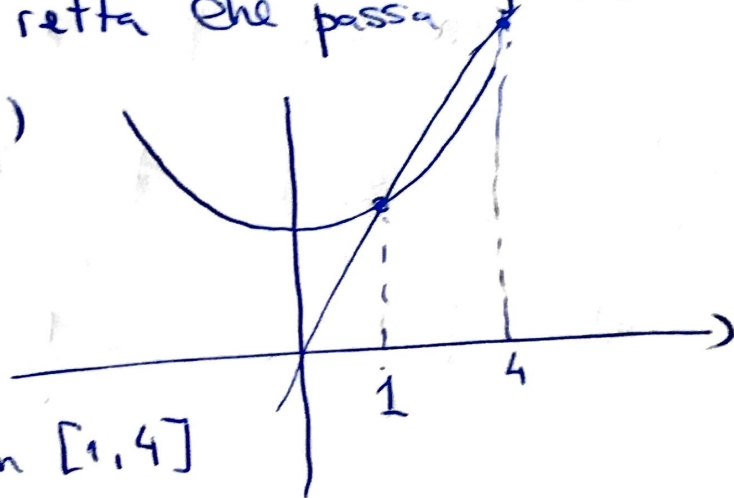
$$(\Rightarrow) \quad x = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$(\Rightarrow) \quad x = 4 \quad \vee \quad x = 1$$

$f(x)$ è una parabola convessa ($f''(x) = 2 > 0$)

con minimo per $x = 0$ ($f'(x) = 2x$)

e $g(x)$ è una retta che passa nel punto $(0, 0)$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$



Infatti, per x in $[1, 4]$

abbiamo $g(x) - f(x) = \cancel{5x - x^2 - 4} \quad 5x - x^2 - 4$

≥ 0 (parabola concava con zeri in 1 e 4)

Allora l'area desiderata è

$$A = \int_1^4 g(x) - f(x) dx = \int_1^4 5x - x^2 - 4 dx$$

$$= \left[\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 4x \right]_1^4 = \left(\frac{5 \cdot 16}{2} - \frac{4^3}{3} - 16 \right) - \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{3} - 4 \right)$$

$$= \left(\frac{72}{3} - \frac{64}{3} \right) - \left(\frac{15 - 2 - 24}{6} \right)$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{11}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

⑤ f derivabile in $\mathbb{R}$.

$$f(-5) = -3 \quad f'(x) \leq 3 \quad \forall x \in [-5, 1]$$

a) Dal teorema di Lagrange abbiamo che esiste $c \in [-5, 1]$ tale che

$$\begin{aligned} f'(c) &= \frac{f(1) - f(-5)}{1 - (-5)} = \frac{f(1) - (-3)}{6} \\ &= \frac{f(1)}{6} + \frac{1}{2} \quad \text{come volevamo dimostrare.} \end{aligned}$$

b) Siccome $f'(x) \leq 3$ per $x \in [-5, 1]$, allora

$$f'(c) = \frac{f(1)}{6} + \frac{1}{2} \leq 3 \quad \text{per il } c \text{ trovato in a)}$$

$$\text{e quindi } \frac{f(1)}{6} \leq 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow f(1) \leq \frac{30}{2} = 15$$

come volevamo dimostrare.