Esame per il Corso di MATEMATICA DISCRETA (2019/2020)
Corso di Laurea in Informatica, Università di Studi di Cagliari
21 gennaio 2020

Durata: 3 ore

Attenzione: **Per ottenere il punteggio massimo in ogni domanda, la risposta deve essere dettagliatamente giustificata. Giustificazioni parziali potranno essere considerate per punteggi parziali. Risposte senza giustificazioni non verrano considerate. Le soluzioni ammissibili sono esclusivamente quelle nella bella. In ogni caso bisogna consegnare anche la brutta copia.**

Parte A

1. Sia $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(n) = -2n$

   (a) (**1 punto**) Si determini la immagine di f.

   (b) (**2 punti**) Si determini se f è iniettiva, suriettiva e/o biiettiva.

   (c) (**2 punti**) Si determini se la funzione f ha un'inversa a sinistra. In caso positivo, si trovi una tale funzione (indicando il suo dominio, codominio e espressione generale).

   (d) (**1 punto**) Si determini se la funzione f ha un'inversa. In caso positivo, si trovi una tale funzione (indicando il suo dominio, codominio e espressione generale).

2. (**3 punti**) Si dimostri per induzione che per ogni $n \geq 1$ si ha $\sum_{k=1}^{n}(2k-3) = n(n-2)$.

3. (**2 punti**) Si trovi una soluzione dell'equazione $6x \equiv 16 (\mathrm{mod}\ 26)$.

4. (**3 punti**) Si trovi il resto della divisione di 4^{98} per 35.

Parte B

5. Siano $\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$ vettori nello spazio con coordinate (rispetto ad una base ortonormale B fissata):

$$\vec{OP} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{OQ} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) (**1 punto**) Si calcoli l'angolo fra questi due vettori.

   (b) (**2 punti**) Si calcoli il prodotto vettoriale $\vec{OP} \times \vec{OQ}$.

   (c) (**2 punti**) Si determini l'equazione cartesiana del piano che contiene i punti O, P e Q.

6. Sia k un numero reale e si considerino il seguente sistema di tre equazioni lineari in tre variabili x, y e z:

$$\begin{cases} -x+y+\ z=\ 0 \\ -2x-y+5z=-1 \\ \ kx+y-\ z=\ 1. \end{cases}$$

   (a) (**2 punti**) Sia A la matrice dei coefficienti del sistema di equazioni. Si calcoli il determinante di A (come funzione dipendente di k).

L'esame continua sul verso!

(b) **(3 punti)** Si determini se il sistema ha soluzioni per $k = 1$ e, in caso positivo, si usi il teorema di Cramer per calcolare la soluzione del sistema per $k = 1$.

(c) **(3 punti)** Si consideri la retta r definita dalle equazioni cartesiane

$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ y - z = 1. \end{cases}$$

e il piano π definito dall'equazione cartesiana $-2x - y + 5z = -1$. Si determini (con giustificazione!) quali delle seguenti affermazioni è vera.

i. La retta r intercetta il piano π in un solo punto.

ii. La retta r è contenuta nel piano π.

iii. La retta r è parallela al piano π.

7. **(2 punti)** Si trovino a e b numeri reali tali che il numero complesso $(2+i^3)^5$ sia uguale a $a+bi$.

Parte C

8. Siano X e Y due insiemi e $f\colon X \to Y$ una funzione. Sia $R = \{(a,b) \in X^2 : f(a) = f(b)\}$.

(a) **(1 punto)** Si dimostri che R è una relazione di equivalenza.

(b) **(1 punto)** Supponiamo che X sia un insieme finito con n elementi e che tutte le classi di equivalenza di X abbiano lo stesso numero di elementi. Si dimostri che il numero di elementi in $\mathrm{Im}(f)$ divide n.

Matematica Discreta (CdL Informatica)

Appello 1 21/01/2020 - Soluzioni

Parte A

① $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $n \longmapsto -2n$

a) $Im(f) = \{\text{numeri interi pari}\} = \{n \in \mathbb{Z} : 2 | n\}$

Infatti se $y = f(x)$, allora $y = -2x$ e quindi y è pari. Reciprocamente se y è un numero intero pari, allora $\frac{y}{-2}$ è ancora un numero intero e, infatti, $y = f\left(\frac{y}{-2}\right)$. Allora ogni numero pari è nell'immagine di f.

b) Siccome non tutti gli interi sono pari (per esempio 1 non è pari), $Im(f) \neq \mathbb{Z}$. Allora f non è suriettiva.

f è iniettiva: infatti se $f(x) = f(z)$ allora

$$-2x = -2z \implies x = z$$

(dividendo per -2 i due lati)

f non è biiettiva perché, per definizione, una funzione è biiettiva se e solo se è iniettiva e suriettiva, e f non è suriettiva.

c) f ha un'inversa a sinistra se e solo se f è iniettiva. Siccome da b) sapiamo che f è iniettiva, allora f ha un'inversa a sinistra. (2)

Tale inversa g avrà per dominio $Im(f)$ e codominio il dominio di $f: \mathbb{Z}$ e deve soddisfare $g(f(n)) = n$. Allora $g(f(n)) = g(-2n)$

Quindi la funzione g deve inviare un numero pari k in $\frac{k}{-2}$, cioè

$$g : Im(f) \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$k \longmapsto \frac{k}{-2}$$

Infatti, così abbiamo

$$g(f(n)) = g(-2n) = \frac{-2n}{-2} = n.$$

d) f è invertibile se e solo se è biiettiva. Siccome abbiamo già stabilito che f non è biiettiva, allora f non è invertibile.

(2) Dimostriamo per induzione che $\forall n \geq 1 \sum_{k=1}^{n} (2k-3) = n(n-2)$

- $\boxed{n=1}$ $\quad \sum_{k=1}^{1} (2k-3) = 2 \cdot 1 - 3 = -1$

$1 \cdot (1-2) = -1$ ← sono uguali, quindi la uguaglianza viene verificata per $n=1$.

- Supponiamo adesso per ipotesi di induzione che $\sum_{k=1}^{n} (2k-3) = n(n-2)$. Dobbiamo dimostrare che

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-3) = (n+1)(n+1-2) = (n+1)(n-1).$$

Allora $\sum_{k=1}^{n+1}(2k-3) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n}(2k-3)}_{\text{primi } n \text{ addendi}} + \underbrace{2(n+1)-3}_{(n+1)\text{-ésimo addendo}}$ ③

$= n(n-2) + 2n + 2 - 3$

ipotesi d'induzione ↗

$= n^2 - 2n + 2n - 1 = n^2 - 1$

$= (n+1)(n-1)$, come volevamo dimostrare.

Allora, per induzione, il risultato vale per ogni $n \geq 1$.

③ $6x \equiv 16 \pmod{26}$

Primo passo: ci sono soluzioni se e solo se $\text{mcd}(26,6) \mid 16$

Calcoliamo il $\text{mcd}(26,6)$ attraverso l'algoritmo di divisione: ⊛ $26 = 6 \cdot 4 + \boxed{2}$ → $\text{mcd}(26,6)$

$6 = 3 \cdot 2 + 0$

Siccome $2 \mid 16$, allora l'equazione modulare ha soluzioni.

Secondo passo: Scrivere $\text{mcd}(6,26) = 6u + 26w$ per interi u e w

Dall'uguaglianza (*) si vede che $2 = 26 - 6 \cdot 4$, cioè $u = -4$ e $w = 1$ funziona.

Allora, questo vuole dire che $2 \equiv -6 \cdot 4 \pmod{26}$ ④

e, quindi $8 \cdot 2 \equiv 8 \cdot 6 \cdot (-4) \pmod{26}$

$\iff 16 \equiv 6 \cdot (-32) \pmod{26}$.

Allora -32 è una soluzione dell'equazione modulare. (Ma anche lo è qualsiasi numero della forma

$$-32 + \frac{26}{2} \cdot k \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

per esempi $x = 7$ è soluzione).

④ Si osservi prima che $\text{mcd}(4, 35) = 1$

(infatti $4 = 2^2$ e $35 = 5 \cdot 7$, come fattorizzazione in primi, e quindi 4 e 35 sono coprimi).

Dal teorema di Euler, segue che

$$4^{\varphi(35)} \equiv 1 \pmod{35}$$

$\varphi(35) = \varphi(5)\varphi(7) = 4 \cdot 6 = 24$

Quindi $4^{24} \equiv 1 \pmod{35}$.

Dividiamo 98 per 24.

Chiaramente, $98 = 24 \cdot 4 + 2$.

Quindi

$$4^{98} = 4^{24 \cdot 4 + 2} = \left(4^{24}\right)^4 \cdot 4^2 \equiv 1^4 \cdot 16 \pmod{35}$$

$$4^{98} \equiv 16 \pmod{35}$$

□

~~Allora questa~~ Parte B

(5) B base ortonormale

$$\overrightarrow{OP} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OQ} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Ricordiamo che

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = |\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OQ}| \cdot \cos\theta$$

dove θ è l'angolo fra i vettori.

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 1 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 1 = 1$$

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

$$|\overrightarrow{OQ}| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Allora abbiamo

$$1 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\theta$$

$$\iff \cos\theta = \frac{1}{2} \implies \theta = \frac{\pi}{3}$$

b) Sia $u \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $w \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

e usiamo l'espressione

$$\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ} = \det \begin{pmatrix} u & v & w \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

"Sviluppo di Laplace lungo riga 1"

$$= u \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - v \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + w \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= -u - v - w \equiv \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(c) il vettore $\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}$ è perpendicolare ai vettori $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ}$ e, quindi, è perpendicolare al piano che li contiene. Quindi, l'equazione richiesta è quella del piano che contiene $O \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e è perpendicolare a $\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ} \equiv \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, cioè

$$(-1).(x-0) + (-1)(y-0) + (-1)(z-0) = 0$$

$$(=) \quad -x - y - z = 0$$

$$(=) \quad x + y + z = 0$$

(6)

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 5 \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\det A = (-1)(-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 1.(-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ k & -1 \end{pmatrix}$$

↓ Sviluppo di Laplace lungo riga 1.

$$+ 1.(-1)^{1+3} \det \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ k & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (-1).(1-5) - 1.(2-5k) + 1.(-2+k)$$

$$= 4 - 2 + 5k - 2 + k = 6k$$

b) Per $k = 1$, $\det(A) \neq 0$ e quindi il sistema ha un'unica soluzione. Usiamo il teorema di Cramer per calcolarla.

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{1\cdot(-1)^{1+2}\cdot\det\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+3}\det\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{6} \quad (7)$$

↓ sviluppo lungo prima riga

$$= \frac{-(1-5)+0}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{\det(A)}$$ sviluppo lungo prima riga ↑

$$= \frac{(-1)(-1)^{1+1}\det\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+3}\det\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{6}$$

$$= \frac{-(1-5)+(-2+1)}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$z = \frac{\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{6} = \frac{(-1)(-1)^{1+1}\det\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\det\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{6}$$

↓ sviluppo lungo prima riga

$$= \frac{0+(-1)(-2+1)}{6} = \frac{1}{6}$$

Quindi $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{1}{2}$ e $z = \frac{1}{6}$ è l'unica soluzione del sistema.

c) $r: \begin{cases} -x+y+z=0 \\ y-z=1 \end{cases}$ $\quad \pi: -2x-y+5z=-1$

$\pi \cap r$ è l'insieme dei punti di coordinate $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ che soddisfano $\begin{cases} -x+y+z=0 \\ y-z=1 \\ -2x-y+5z=-1 \end{cases}$, cioè, che sono soluzioni del sistema per $k=0$.

Siccome per $k=0$ $\det(A)=0$, allora o il sistema ha infinite soluzioni (r è contenuta in Π) o il sistema non ha soluzioni (e r è parallela a Π).

Matrice completa del sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Procediamo per eliminazione Gaussiana.

$$\xrightarrow[R_1 \to -R_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2+2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3+\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right) \longrightarrow \text{questa equazione non ha soluzioni.}$$

Quindi r e Π sono parallele.

⑦ $(2-i^3)^5 = z(1-2i)$

Binomio di Newton:

$$(2+i^3)^5 = 2^5 + \binom{5}{1}2^4 i^3 + \binom{5}{2}2^3 \cdot (i^3)^2 + \binom{5}{3}2^2 (i^3)^3 + \binom{5}{4}2\cdot(i^3)^4 + (i^3)^5$$

$$= 2^5 + 5\cdot 2^4(-i) + 10\cdot 2^3\cdot(-i)^2 + 10\cdot 2^2\cdot(-i)^3 + 5\cdot 2\cdot(-i)^4 + (-i)^5$$

$i^3 = -i$

$\binom{5}{2} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5\times 4}{2} = 10$

$\binom{5}{3} = 10$

$= 32 - 80i - 80 + 40i + 10 - i$

$= -38 - 41i$.

Parte C

X, Y insiemi

$f: X \to Y$ funzione

$R = \{(a,b) \in X^2 : f(a) = f(b)\}$

a) R è una relazione di equivalenza:

- R è riflessiva: $\forall a \in X$, $f(a) = f(a)$ e quindi $(a,a) \in R$.
- R è simmetrica: Se $(a,b) \in R$, allora $f(a) = f(b)$ e quindi anche $f(b) = f(a)$ e $(b,a) \in R$.
- R è transitiva: Se $(a,b) \in R$ e $(b,c) \in R$ allora $f(a) = f(b)$ e $f(b) = f(c)$. Quindi $f(a) = f(c)$ e $(a,c) \in R$.

Quindi R è una relazione di equivalenza.

b) Ricordiamo che $\bigcup_{x \in X} [x] = X$ e $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ se $(x,y) \notin R$.

Allora se X ha n elementi e ogni elemento di X appartiene ad una sola classe di equivalenza, allora n è la somma del numero di elementi in tutte le classi di equivalenza. Siccome tutte le classi hanno lo stesso numero di elementi, diciamo d, allora

$$n = \underbrace{d + d + d + \cdots + d}_{k \text{ volte, dove } k \text{ è il numero di classi di equivalenza.}}$$

Allora $n = kd$. Per fine, si osservi che il

Numero di classi di equivalenza è precisamente il numero di elementi nell'immagine di f.

Infatti $[x] = f^{-1}(f(x))$

↳ immagine inversa.

Allora, il numero di elementi di $Im(f)$ è k e k divide n, come volevamo dimostrare.