Nome e Cognome .... **Matricola:** | | | | | |

Prova Scritta di Calcolo Scientifico e Metodi Numerici
15 gennaio 2020

Numerare e scrivere il nome in tutti i fogli che si consegnano.
Risultati senza svolgimento non verranno presi in considerazione.

1. Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} \beta x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 + \beta x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_2 + \beta x_3 = 1 \end{cases},$$

dove β è un parametro reale. Stabilire per quali valori del parametro il sistema ammette una sola soluzione e per quali il metodo di Jacobi risulta convergente. Posto $\beta = 3$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss–Seidel, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 0, 1]^T$. Senza fare calcoli e motivando opportunamente la risposta, si dica se nel caso $\beta = -9$ il metodo di Gauss-Seidel converge.

Soluzione. Il sistema ammette una sola soluzione per $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{2, -1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}\}$.
Il metodo di Jacobi converge per $|\beta| > 1 + \sqrt{2}$.
$\mathbf{x}^{(1)} = [\frac{2}{3}, -\frac{8}{9}, \frac{17}{27}]^T$, $\mathbf{x}^{(2)} = [\frac{98}{81}, \frac{-140}{243}, \frac{383}{729}]^T$.
Se $\beta = -9$ il metodo di Gauss-Seidel converge in quanto la matrice dei coefficienti risulta strettamente diagonalmente dominante.

2. Determinare l'intervallo $[k, k+1]$, con k intero, che contiene la radice positiva dell'equazione

$$f(x) = x^2 - \left(\sqrt{3} - \frac{1}{4}\right) x - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0.$$

Calcolare le prime due iterate del metodo di bisezione, a partire dall'intervallo trovato, e le prime due iterate del metodo di Newton, a partire dall'estremo sinistro dell'intervallo determinato. Si calcolino gli errori relativi che si commettono utilizzando il metodo di bisezione e di Newton, rispettivamente.

Soluzione. Le radici sono $-\frac{1}{4}$ e $\sqrt{3} \simeq 1.7321$, quindi l'intervallo che contiene la radice positiva è $[1, 2]$.
$c_3 = \tilde{x} = \frac{13}{8} \simeq 1.6250, x_2 \simeq 1.9964.$
$\mathrm{err}_{\mathrm{bis}} \simeq 0.0618, \mathrm{err}_{\mathrm{Newton}} \simeq 0.1526$

3. Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 10 & 5 \\ -2 & -\frac{23}{6} & -4 & -\frac{25}{6} \\ 2 & 5 & \frac{15}{2} & 9 \\ -2 & -\frac{17}{2} & -8 & -\frac{15}{2} \end{bmatrix}$$

e utilizzarla per risolvere il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $\mathbf{b} = [18, -10, \frac{33}{2}, -18]^T$. Infine, si determini la seconda colonna dell'inversa di A e il suo determinante.

Soluzione. $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 10 & 5 \\ 0 & -7 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$
$\mathbf{x} = [1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}]^T$, $A^{-1}\mathbf{e}_2 = [-1, -\frac{1}{8}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{8}]^T$, $\det(A) = -224$.

4. Si consideri la matrice

$$B = \frac{1}{\alpha}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -1 \\ -1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

dipendente dal paramentro reale $\alpha \neq 0$. Si determinino i valori del parametro α che rendono B ortogonale. Assegnato al parametro uno dei valori trovati, si calcoli l'indice di condizionamento delle due matrici in norma 1, 2 e ∞. Infine, si risolva nel modo più conveniente il sistema lineare $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = [2, 1, 2]^T$.

Soluzione. B risulta ortogonale per $\alpha = \pm 2$.
Assegnato il valore $\alpha = 2$, si ha $\mathbf{x} = B^T\mathbf{b} = [\frac{1}{2} - \sqrt{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2} - \sqrt{2}]^T$.
$k_1(B) = k_\infty(B) = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$, $k_2(B) = 1$.

5. Costruire, utilizzando la rappresentazione di Lagrange, il polinomio che interpola la seguente tabella di dati

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	$-\frac{85}{4}$	$-\frac{15}{8}$	0	$-\frac{5}{8}$	$-\frac{51}{4}$

Calcolare inoltre il valore assunto dal polinomio nel punto di ascissa $x = -3$.

Soluzione. $p_4(x) = -x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x$.
$p_4(-3) = -\frac{777}{8}$.