

(a) Dimostra che $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ è uno spazio di probabilità;

(b) Sia $n \in \mathbb{N}$, per $\omega \in \Omega$ definiamo

$$X_n(\omega) = \omega - \frac{1}{n}.$$

Assumi che X_n sia una variabile aleatoria. Qual è la sua densità? (Suggerimento: Considera la funzione di ripartizione

$$F(t) = \mathbb{P}(X_n \leq t) = \mathbb{P}\left(\left\{\omega - \frac{1}{n} \leq t\right\}\right) = \int_{\{\omega - \frac{1}{n} \leq t\}} \frac{1_{[1, \infty)}(x)}{\omega^2} d\omega = \dots$$

da questa puoi calcolare la densità come...);

(c) Sia $X(\omega) = \omega$ per $\omega \in \Omega$. Dimostra che $X_n \xrightarrow{P} X$ (Suggerimento: Dimostra che $X_n \xrightarrow{q.c.} X$);

(d) Esiste un $p \geq 1$ tale che $X_n \xrightarrow{L^p} X$?

Soluzione (Esercizio 1). Scegliamo $\Omega = \{r_1, \dots, r_r, b_1, \dots, b_b\}^n$.

- (a) Consideriamo R_j , questo evento è identificato con il sottoinsieme $\{(x_1, \dots, x_n) : x_j \in \{r_1, \dots, r_r\}\}$, questo è, per ogni j , ovviamente in corrispondenza biunivoca con $\{(x_1, \dots, x_n) : x_1 \in \{r_1, \dots, r_r\}\}$. Ne segue che $\mathbb{P}(R_j) = \mathbb{P}(R_1)$ e ovviamente si ha che $\mathbb{P}(R_1) = \frac{r}{r+b}$. Quindi

$$\mathbb{P}(R_j) = \frac{r}{r+b} \quad \forall j.$$

- (b) La probabilità di questo evento si può calcolare usando la distribuzione ipergeometrica.

$$\mathbb{P}(R^{(j)}) = \frac{\binom{r}{j} \binom{b}{n-j}}{\binom{b+r}{n}}.$$

- (c) Se alla prima estrazione è uscita una bianca questo implica che alla seconda estrazione abbiamo r palline rosse e $r + (b - 1)$ palline in totale, quindi

$$P(R_2|B_1) = \frac{r}{r+b-1}.$$

- (d) Dalla definizione di probabilità condizionata abbiamo

$$\mathbb{P}(R^{(j)}|R_1) = \frac{\mathbb{P}(R^{(j)} \cap R_1)}{\mathbb{P}(R_1)}.$$

Dobbiamo calcolare $\mathbb{P}(R^{(j)} \cap R_1)$. Osserviamo che

$$\{R^{(j)}\} = \{R^{(j)} \cap R_1\} \cup \{R^{(j)} \cap R_1^c\},$$

dove quest'unione è disgiunta. L'evento $\{R^{(j)} \cap R_1^c\}$ descrive la situazione in cui estraggo j palline rosse in $n - 1$ estrazioni senza reimmissione da un'urna formata da r palline rosse e $(b - 1)$ bianche. Allora

$$\mathbb{P}(R^{(j)} \cap R_1^c) = \frac{\binom{r}{j} \binom{b-1}{n-1-j}}{\binom{b-1+r}{n-1}}.$$

Ne segue

$$\mathbb{P}(R^{(j)} \cap R_1) = \mathbb{P}(R^{(j)}) - \mathbb{P}(R^{(j)} \cap R_1^c) = \frac{\binom{r}{j} \binom{b}{n-j}}{\binom{b+r}{n}} - \frac{\binom{r}{j} \binom{b-1}{n-1-j}}{\binom{b-1+r}{n-1}}.$$

Quindi

$$\mathbb{P}(R^{(j)}|R_1) = \left[\frac{\binom{r}{j} \binom{b}{n-j}}{\binom{b+r}{n}} - \frac{\binom{r}{j} \binom{b-1}{n-1-j}}{\binom{b-1+r}{n-1}} \right] \frac{b+r}{r}.$$

Soluzione (Esercizio 2). Chiamiamo $T_A, T_B,$ e T_C le variabili aleatorie che misurano i tempi di vita di $A, B,$ e $C,$ rispettivamente. Inoltre siano T_1 e T_2 le variabili aleatorie che misurano i tempi di vita di M_1 e $M_2.$

Calcoliamo la legge di T_1 usandone la funzione di ripartizione.

$$1 - F_{T_1}(t) = \mathbb{P}(T_1 > t) = \mathbb{P}(\min(T_A, T_B, T_C) > t) = \mathbb{P}(T_A > t, T_B > t, T_C > t)$$

Dall'indipendenza dei componenti e dalle leggi di $T_A, T_B,$ e T_C otteniamo

$$1 - F_{T_1}(t) = \mathbb{P}(T_A > t)\mathbb{P}(T_B > t)\mathbb{P}(T_C > t) = (e^{-\lambda t})^3 = e^{-3\lambda t},$$

con $\lambda = 0.3.$ Ne deduciamo che $T_1 \sim \text{Esp}(3\lambda).$

Calcoliamo ora la funzione di ripartizione di T_2

$$F_{T_2}(t) = \mathbb{P}(T_2 \leq t) = \mathbb{P}(\max(T_A, T_B, T_C) \leq t) = \mathbb{P}(T_A \leq t)\mathbb{P}(T_B \leq t)\mathbb{P}(T_C \leq t),$$

dove nella seconda uguaglianza abbiamo usato l'indipendenza di $T_A, T_B,$ e $T_C.$ Ricordando la legge di $T_A, T_B,$ e T_C abbiamo

$$F_{T_2}(t) = (1 - e^{-\lambda t})^3.$$

(a) Poiché abbiamo assunto le macchine indipendenti abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_1 > 1, T_2 > 1) &= \mathbb{P}(T_1 > 1)\mathbb{P}(T_2 > 1) \\ &= (1 - F_{T_1}(1))(1 - F_{T_2}(1)) \\ &= e^{-3\lambda} \left(1 - (1 - e^{-\lambda})^3\right) \approx 0.32 \end{aligned}$$

(b) Sappiamo che $(\{T_1 > 1\} \cup \{T_2 > 1\})^c = \{T_1 > 1\}^c \cap \{T_2 > 1\}^c = \{T_1 \leq 1\} \cap \{T_2 \leq 1\}.$ Allora

$$1 - \mathbb{P}(\{T_1 > 1\} \cup \{T_2 > 1\}) = \mathbb{P}((\{T_1 > 1\} \cup \{T_2 > 1\})^c) = \mathbb{P}(T_1 \leq 1)\mathbb{P}(T_2 \leq 1),$$

dove l'ultima uguaglianza segue dall'indipendenza di T_1 e $T_2.$ Quindi

$$\mathbb{P}(\{T_1 > 1\} \cup \{T_2 > 1\}) = 1 - F_{T_1}(1)F_{T_2}(1) = 1 - e^{-3\lambda} (1 - e^{-3\lambda}) \approx 0.92.$$

Soluzione (Esercizio 3). (a) Dobbiamo verificare che $f \geq 0$ quasi ovunque e che $\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = 1.$ La prima è ovvia, la seconda segue da

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \frac{1}{\pi} \int_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} dx dy = \frac{1}{\pi} \pi = 1.$$

(b) Si ha banalmente $\mathbb{E}(XY) = 0,$ infatti

$$\mathbb{E}(XY) = \frac{1}{\pi} \int_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} xy dx dy = 0,$$

per simmetria del dominio d'integrazione.

(c) Per definizione si ha

$$\bar{f}_{X|Y}(x, y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)},$$

per $f_Y(y) \neq 0$, dove f_Y denota la densità di Y . Calcoliamo la densità di Y .

$$f_Y(y) = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\pi} dx = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-y^2}.$$

Allora

$$\bar{f}_{X|Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}} & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Soluzione (Esercizio 4). (a) Denotiamo con X_j , $j = 1, \dots, 100$, le seguenti variabili aleatorie

$$X_j = \begin{cases} 1 & j\text{-esimo lancio esce testa,} \\ 0, & j\text{-esimo lancio esce croce.} \end{cases}$$

Allora $X_j \sim B(1, p)$, dove p è la probabilità di ottenere testa. Dunque $\mathbb{E}(X_j) = p$.

Denotiamo con \bar{X}_n la variabile aleatoria

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j,$$

dalla legge dei grandi numeri sappiamo che

$$\bar{X}_n \xrightarrow{P} p.$$

Allora abbiamo che

$$\frac{1}{100} \sum_{j=1}^{100} X_j \approx p,$$

e quindi ne deduciamo che

$$p \approx 0.82.$$

(b) Supponiamo ora che $p = 0.75$, allora

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\sum_{j=1}^{100} X_j \in [75, 85] \right) &= \mathbb{P} \left(75 \leq \sum_{j=1}^{100} X_j \leq 85 \right) \\ &= \mathbb{P} \left(\sum_{j=1}^{100} X_j \leq 85 \right) - \mathbb{P} \left(\sum_{j=1}^{100} X_j < 75 \right) \\ &= \mathbb{P} \left(\frac{\sum_{j=1}^{100} X_j - 100p}{10\sqrt{p(1-p)}} \leq \frac{85 - 100p}{10\sqrt{p(1-p)}} \right) - \mathbb{P} \left(\frac{\sum_{j=1}^{100} X_j - 100p}{10\sqrt{p(1-p)}} < \frac{75 - 100p}{10\sqrt{p(1-p)}} \right) \\ &\approx \mathbb{P} \left(Z \leq \frac{85 - 100p}{10\sqrt{p(1-p)}} \right) - \mathbb{P} \left(Z < \frac{75 - 100p}{10\sqrt{p(1-p)}} \right) \\ &\approx \mathbb{P}(Z \leq 2.31) - \mathbb{P}(Z < 0) \\ &\approx 0.99 - 0.5 = 0.49, \end{aligned}$$

Dove abbiamo usato il teorema del limite centrale per giustificare la quarta uguaglianza.

Questo risultato si può verificare in R simulando molti gruppi di 100 lanci e verificando quante volte in percentuale accade che il numero di teste sia compreso tra 75 e 85. Per esempio si può usare il codice

```
n=1000000
s=0;
moneta=c(1,0)
for (i in 1:n){
ris=sample(moneta,size=100,replace=TRUE,prob=c(0.75,0.25))
if (sum(ris)<=85 && sum(ris)>=75){
s=s+1;
}
}
p=s/n
```

Soluzione (Esercizio 5). (a) *Dobbiamo dimostrare che \mathbb{P} è una probabilità. Calcoliamo $\mathbb{P}(\Omega)$.*

$$\mathbb{P}(\Omega) = \int_{\Omega} \frac{1_{[1,\infty)}(x)}{x^2} dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{\infty} = 1.$$

La subadditività contabile segue immediatamente dalle proprietà degli integrali.

(b) *Calcoliamo la funzione di ripartizione di X_n . sia $t \geq 1$*

$$\begin{aligned} F(t) &= \mathbb{P}(X_n \leq t) \\ &= \mathbb{P}\left(\left\{\omega - \frac{1}{n} \leq t\right\}\right) \\ &= \int_{\{\omega - \frac{1}{n} \leq t\}} \frac{1_{[1,\infty)}(x)}{\omega^2} d\omega \\ &= \int_1^{t + \frac{1}{n}} \frac{1}{\omega^2} d\omega \\ &= \left[-\frac{1}{\omega} \right]_1^{t + \frac{1}{n}} \\ &= 1 - \frac{1}{t + \frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Per $t < 1$ si ha $F(t) = 0$. Possiamo calcolare la densità come derivata della funzione di ripartizione

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{(t + \frac{1}{n})^2} & t \geq 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(c) Dimostriamo che $X_n \xrightarrow{q.c.} X$. Sia $N = \{\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}$, si ha

$$N = \{\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \omega + \frac{1}{n} = \omega\} = \Omega.$$

Allora $\mathbb{P}(N) = 1$ e quindi $X_n \xrightarrow{q.c.} X$. Di conseguenza $X_n \xrightarrow{P} X$.

(d) Sia $p \geq 1$. Calcoliamo la densità di X partendo dalla funzione di ripartizione. Sia $t \geq 1$

$$\begin{aligned} F_X(t) &= \mathbb{P}(X \leq t) \\ &= \mathbb{P}(\{\omega \leq t\}) \\ &= \int_{\{\omega \leq t\}} \frac{1_{[1, \infty)}(x)}{\omega^2} d\omega \\ &= \int_1^t \frac{1}{\omega^2} d\omega \\ &= \left[-\frac{1}{\omega} \right]_1^t \\ &= 1 - \frac{1}{t}. \end{aligned}$$

Quindi abbiamo che la densità di X è

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^2} & t \geq 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Verifichiamo se X ha momento di ordine p finito.

$$\int_{\Omega} |x|^p f_X(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{|x|^p}{x^2} dx = \int_1^{\infty} x^{p-2} dx,$$

ma $p - 2 \geq -1$ per ogni $p \geq 1$ e quindi

$$\int_{\Omega} |x|^p f_X(x) dx = \infty \quad \text{per ogni } p \geq 1.$$

Di conseguenza $X_n \not\xrightarrow{L^p} X$ per ogni $p \geq 1$.

Tabella 2: Legge, funzione di ripartizione, media, e varianza più importanti distribuzioni.

	Densità	F. di rip.	Media	Varianza
$B(n, p)$	$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$		np	$np(1-p)$
Ipergeometrica	$p_k = \frac{\binom{r}{k} \binom{b}{n-k}}{\binom{b+r}{n}}$		$\frac{nr}{b+r}$	$\frac{nr b(b+r-n)}{(b+r)^2(b+r-1)}$
$P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$		λ	λ
$G(p)$	$p_k = p(1-p)^k$	$1 - (1-p)^{k+1}$	$\frac{1-p}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$Exp(\lambda)$	$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$N(\mu, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$		μ	σ^2
$\Gamma(\alpha, \lambda)$	$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$		$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$