Conversione AD e DA

1 - Campionamento e quantizzazione

Generalità

I segnali che nascono dalla maggior parte dei fenomeni fisici sono tipicamente variabili con continuità sia nel tempo che nelle ampiezze. Affinché questi segnali possano essere elaborati dai sistemi digitali risultano necessarie opportune operazioni di conversione.

In Fig.1.1 sono rappresentati i blocchi funzionali che consentono tali trasformazioni: il convertitore analogico-digitale (*Analog to Digital Converter*, *ADC*) e il convertitore digitale-analogico (*Digital to Analog Converter, DAC*).

Fig.1.1 - *Interfacce AD e DA fra sistema analogico e digitale.*

La strumentazione di misura ricorre estensivamente all'utilizzo dei segnali in forma numerica, al fine di conseguire i vantaggi tipici di questo modo di rappresentare l'informazione.

Fra questi ricordiamo una limitata sensibilità dei segnali digitali ai disturbi e alle interferenze, la facilità di trasmissione, la possibilità di programmazione delle apparecchiature e dei compiti di misura, le ampie facoltà di *signal processing*.

Campionamento e quantizzazione

Per passare da un segnale analogico, variabile con continuità nel tempo e nelle ampiezze, alla sua forma digitalizzata si rendono necessarie due operazioni fondamentali: il campionamento e la quantizzazione.

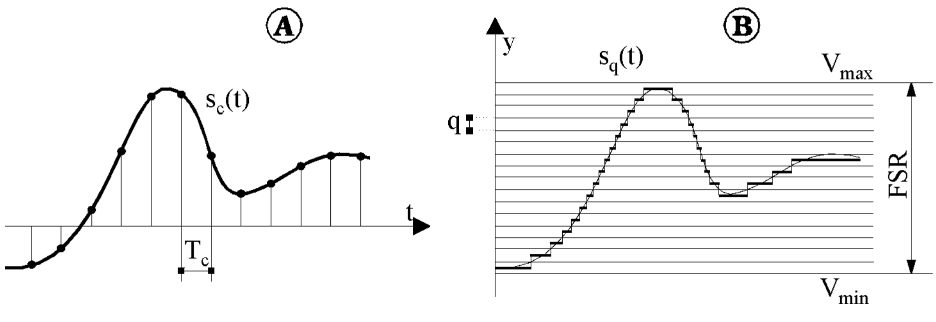

Fig.1.2 - *Campionamento e quantizzazione di un segnale analogico.*

Campionare un segnale $s(t)$ continuo nel tempo significa considerarne i valori solo in corrispondenza a precisi istanti di tempo (iT_c), detti istanti di campionamento.
Si ottiene così la versione campionata $s_c(t)$, rappresentata in Fig.1.2A, dove T_c è l'intervallo di campionamento, mentre $f_c=1/T_c$ è la frequenza di campionamento.
Per quanto riguarda le ampiezze, il segnale analogico può assumere in generale valori compresi fra un valore minimo ed uno massimo (Fig.1.2B). Il campo dei possibili valori entro cui può variare il segnale analogico è detto anche *full-scale range*: $FSR = V_{max} - V_{min}$.
La quantizzazione delle ampiezze è ottenuta suddividendo il campo dei valori possibili, *FSR*, in intervalli elementari, detti intervalli di di quantizzazione, di ampiezza q.
Tutti i valori analogici del segnale che cadono entro uno di questi intervalli di quantizzazione si considerano indistinguibili l'uno dall'altro e ad essi viene attribuito un valore caratteristico dell'intervallo, per esempio il valore centrale.
Per questo motivo l'intervallo di quantizzazione viene anche chiamato intervallo di indifferenza, mentre al valore che lo caratterizza si dà il nome di livello di quantizzazione.
La versione quantizzata del segnale, $s_q(t)$, risulta così costituita solo da valori discreti delle ampiezze.

Nota
Sia il campionamento che la quantizzazione fanno perdere una parte dell'informazione contenuta nel segnale analogico.
1) Con riferimento al tempo, si perde la conoscenza del segnale nell'intervallo temporale compreso fra due successivi istanti di campionamento.
2) Con riferimento alle ampiezze, si perde informazione sui valori del segnale compresi fra due livelli successivi di quantizzazione.

La perdita di informazione è tuttavia differente nei due casi.
Infatti si dimostra che, noti i campioni di un segnale, risulta possibile ricostruire in forma esatta il segnale originario purché i campioni siano presi con una frequenza superiore al doppio della massima frequenza contenuta nel segnale (*teorema del campionamento*).
Per contro, con riferimento alle ampiezze, il segnale quantizzato differisce tanto meno dal segnale originario quanto più numerosi sono i livelli di discretizzazione. La differenza fra l'ampiezza del segnale originario e il valore che lo approssima in forma discreta costituisce il *disturbo di quantizzazione.*

Codifica in binario naturale
Per rappresentare i livelli discreti che scaturiscono dalla quantizzazione si impiegano parole di codice ottenute tramite opportuna codifica. L'obbiettivo è quello di stabilire una corrispondenza biunivoca fra i livelli di quantizzazione e le parole di codice.
Il sistema di codifica più frequentemente adottato utilizza simboli binari (0 e 1). Ogni parola di codice è formata in generale con n simboli binari ordinati, cui corrisponde un dato peso:

$$\begin{array}{ll} B_{n\text{-}1}\dots B_i\dots B_1\, B_0 & \textit{simboli binari}: 0,1 \\ 2^{n\text{-}1}\dots 2^i\dots 2^1\, 2^0 & \textit{pesi} \end{array} \qquad (1.1)$$

I simboli binari che costituiscono la parola di codice sono detti bit, contrazione di *binary digit*. Il valore decimale A che corrisponde alla parola di codice formata con i simboli B_i risulta:

$$A = \sum_{i=0}^{n\text{-}1} 2^i B_i \qquad (1.2)$$

Il generico peso 2^i contribuisce alla sommatoria solo se il corrispondente bit B_i è pari a 1.
B_{n-1} = MSB (*Most Significant Bit*) è il bit più significativo, associato al peso maggiore: 2^{n-1}.
B_0 = LSB (*Least Significant Bit*) è il bit meno significativo, associato al peso minore: 2^0.
Disponendo di n bit si possono rappresentare 2^n valori decimali compresi fra 0 e 2^n-1.
Si consideri l'esempio seguente:

Numero di bit:	$n = 3$	Parola di codice: $B_2\ B_1\ B_0$
Livelli possibili:	$L = 2^3 = 8$	Valori decimali codificati: $0 \div 7$

La tabella di corrispondenza biunivoca fra i primi sette numeri decimali e le parole di codice in binario naturale risulta quindi:

0	1	2	3	4	5	6	7
000	001	010	011	100	101	110	111

Il sistema di rappresentazione in binario naturale è strettamente affine al sistema di numerazione decimale.
Infatti in tal caso sono ammessi solo 10 simboli (0÷9) e ciascuna cifra indica quante volte deve essere considerato il peso corrispondente, secondo una regola posizionale.

$$\begin{array}{ll} D_{n-1} \ldots\ldots D_i \ldots\ldots D_1 \ D_0 & \textit{simboli decimali}: 0 \div 9 \\ 10^{n\text{-}1} \ldots\ldots 10^i \ldots\ldots 10^1 \ 10^0 & \textit{pesi} \end{array} \tag{1.3}$$

Risoluzione dei convertitori

La risoluzione di un convertitore è la più piccola variazione, nel valore della grandezza da misurare, che può essere apprezzata, cioè che causa certamente una variazione dell'indicazione in uscita.
Essa si identifica pertanto con la quantità elementare:

$$q = \frac{FSR}{2^n} \tag{1.4}$$

Spesso la risoluzione è data in forma relativa, riferita al *FSR*, come negli esempi seguenti:

Numero di bit	n	8	12	16
Numero di livelli	2^n	256	4 096	65 536
Risoluzione relativa	$1/2^n$	$3{,}9\ 10^{-3}$	$2{,}4\ 10^{-4}$	$1{,}5\ 10^{-5}$

Per i convertitori si definisce la dinamica (*Dinamic Range*) in decibel:

$$DR = 20 \log \frac{FSR}{q} = 20 \log 2^n = 20n \log 2 = 6{,}02n \tag{1.5}$$

La dinamica si ottiene semplicemente moltiplicando il numero di bit per 6,02.
Per esempio, un convertitore a 16 bit ha una dinamica di 96,3 dB.

Velocità di conversione

I convertitori analogico-digitale (*AD*) trasformano una tensione analogica applicata in ingresso in un codice numerico. Durante l'operazione di conversione la tensione analogica in ingresso rimane costante e corrisponde al valore che è stato campionato. I circuiti di campionamento hanno appunto il compito di estrarre il campione dal segnale e mantenerlo costante per il tempo necessario alla conversione (*sample&hold*).
Le operazioni di campionamento e della successiva conversione devono esaurirsi in un tempo

totale minore dell'intervallo di campionamento T_c. In tal modo la sequenza di campioni può essere trasformata in una sequenza di numeri in modo regolare e continuo. La velocità con cui ciò accade è appunto la frequenza di campionamento $f_c = 1/T_c$.
Analogamente i convertitori digitale-analogico (*DA*) trasformano un codice numerico applicato in ingresso in una tensione analogica il cui valore corrisponde al numero espresso dal codice. La tensione viene mantenuta in uscita per un tempo pari al tempo di campionamento T_c e quindi viene aggiornata nel successivo intervallo T_c. Anche in questo caso si produce in uscita una tensione che ha l'andamento di una spezzata e approssima l'andamento desiderato, aggiornandolo con velocità pari a $f_c = 1/T_c$.

2 - Diagrammi ingresso-uscita

Codifica di segnali unipolari
I convertitori *AD* e *DA* vengono di norma caratterizzati, da un punto di vista statico, mediante diagrammi che forniscono la corrispondenza biunivoca fra ingresso e uscita.
Nella Fig.2.1A è riportata la caratteristica di un convertitore analogico-digitale (*ADC*) di tipo unipolare, cioè con i valori analogici tutti dello stesso segno.
Il campo delle tensioni analogiche in ingresso è positivo ($FSR = 0 \div V_{max}$) e tutti i valori compresi nel generico intervallo di ampiezza q vengono codificati con la stessa parola di codice. Questo codice, nel caso esaminato in Fig.2.1A, rappresenta in binario naturale il valore analogico dell'estremo sinistro di tale intervallo.

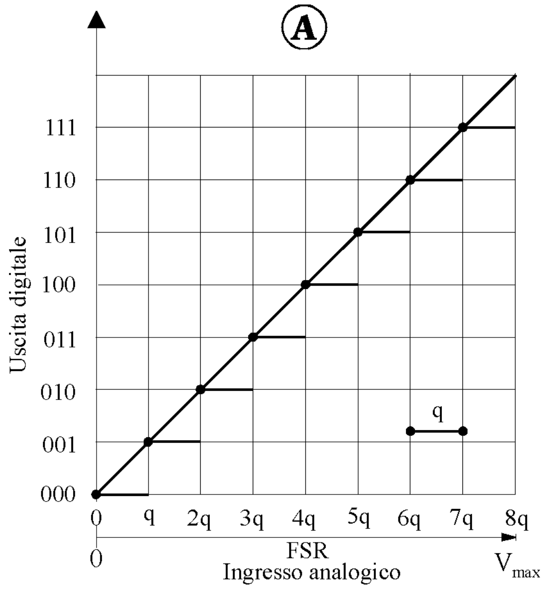

Fig.2.1 - *Diagrammi ingresso-uscita unipolari per un ADC (A) e per un DAC (B).*

Nella Fig.2.1B è invece riportato il diagramma ingresso-uscita di un convertitore digitale-analogico (*DAC*) unipolare. La conversione digitale-analogica consente di ottenere valori di tensione analogici a partire da parole di codice binario.
Normalmente il campo di variazione del segnale analogico in uscita viene stabilito mediante l'impiego di un opportuno generatore di tensione di riferimento V_{ref}, che definisce l'ampiezza del fondoscala: ($FSR = 0 \div V_{ref}$).

Per entrambi i convertitori, *AD* e *DA*, la caratteristica ideale è una retta che unisce i punti rappresentativi nel diagramma ingresso-uscita.
Per un convertitore *AD* o *DA* con n bit, l'intervallo analogico *FSR* viene suddiviso in 2^n intervalli elementari di quantizzazione con ampiezza costante:

$$q = \frac{FSR}{2^n} \tag{2.1}$$

Negli esempi di Fig.2.1 A e B, dove n = 3 bit, si hanno 8 livelli di quantizzazione.
Per un valore di fondoscala *FSR* = 10 V, l'intervallo di quantizzazione risulta di 1,25 V.
La tensione analogica che corrisponde al codice binario (111) è perciò: 7x1,25 V = 8,75 V.

Il disturbo di quantizzazione

Il disturbo di quantizzazione è una conseguenza insita nella suddivisione di un intervallo continuo (*FSR*) in un numero finito di parti e nella necessità di adottare un set finito di numeri per rappresentarli.
In un ADC l'errore introdotto dalla quantizzazione può essere definito come la differenza fra il valore caratteristico v_i dell'intervallo di quantizzazione (valore misurato) e il valore attuale v della tensione: $e_q = v_i - v$.
Con riferimento alla Fig.2.1A vista in precedenza, si osserva che sono stati codificati i valori analogici in corrispondenza all'estremo sinistro del generico intervallo di quantizzazione.
In tal caso il modulo del disturbo di quantizzazione è contenuto, come rappresentato nella successiva Fig.2.2A, entro il range 0÷ q (o, come spesso si usa dire nella pratica, è inferiore a 1 *LSB*).
In pratica si può ottenere una riduzione degli effetti associati al disturbo di quantizzazione facendo in modo che l'intervallo di indifferenza q risulti centrato rispetto al livello nominale di quantizzazione v_i. Questo caso è riportato nella Fig.2.2B, dove si può notare che il disturbo di quantizzazione risulta contenuto entro una fascia simmetrica ± $q/2$ (± 1/2 *LSB*).

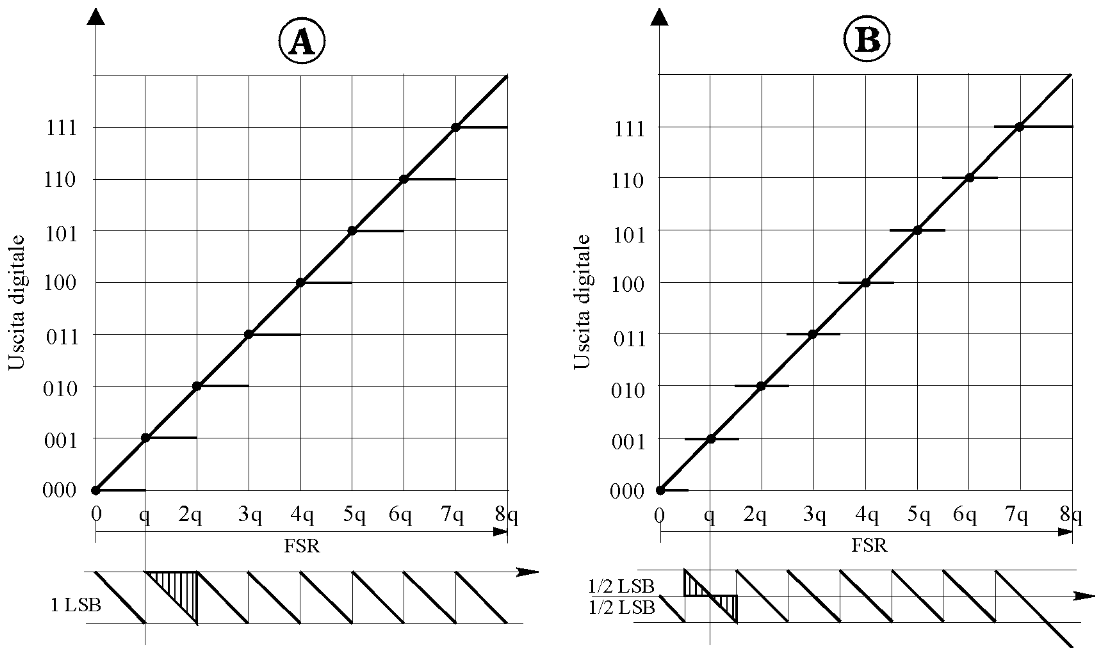

Fig.2.2 - *Diagrammi ingresso-uscita di un ADC unipolare e disturbo di quantizzazione.*

Per rendersi conto dei vantaggi di quest'ultima configurazione, si confrontino il valor medio, il valore massimo e il valore quadratico medio del disturbo di quantizzazione, valutato sulle caratteristiche ingresso-uscita, nei due casi.
Si nota che il valor medio è diverso da zero nel caso esaminato in Fig.2.2A, mentre è nullo per il caso di Fig.2.2B. Quindi, centrare l'intervallo di quantizzazione sul valore nominale comporta l'assenza di componenti costanti e sistematiche per l'errore di quantizzazione.
Il valore massimo nella caratteristica di Fig. 2.2B risulta dimezzato rispetto a quello della caratteristica di Fig.2.2A.
Il valore quadratico medio (o potenza) P_q, la cui radice quadrata costituisce il valore efficace del disturbo di quantizzazione, può essere valutato nel seguente modo:

$$P_q = \frac{1}{q}\int_{x_1}^{x_2} e_q^2 \, de_q \Rightarrow \begin{cases} A) \quad (x_1 \div x_2) = (0 \div q) & \Rightarrow P_q = \frac{1}{3}q^2 \\ B) \quad (x_1 \div x_2) = (-\frac{q}{2} \div \frac{q}{2}) & \Rightarrow P_q = \frac{1}{12}q^2 \end{cases} \tag{2.2}$$

Si vede che la scelta di centrare l'intervallo di indifferenza rispetto al valore di riferimento comporta l'ulteriore vantaggio di diminuire la potenza associata al disturbo di quantizzazione.
Tale scelta risulta pertanto preferibile sotto tutti i punti di vista, e quindi nel seguito ad essa si farà riferimento.
Da un punto di vista probabilistico il disturbo di quantizzazione può essere considerato come una variabile aleatoria continua Δ_q (rumore di quantizzazione) avente distribuzione uniforme nell'intervallo ± q/2 e quindi densità di probabilità definita da:

$$p(\delta_q) = \begin{cases} \frac{1}{q} & per \; -\frac{q}{2} \le \delta_q \le \frac{q}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \tag{2.3}$$

I parametri statistici di questa variabile aleatoria sono il valor medio μ_q, che risulta nullo, e la varianza σ_q^2:

$$\sigma_q^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\delta_q - \mu_q)^2 \cdot p(\delta_q) d\delta_q = \frac{1}{q}\int_{x_1}^{x_2} (\delta_q - \mu_q)^2 \, d\delta_q = \frac{q^2}{12} \tag{2.4}$$

I valori della varianza σ_q^2 e della potenza P_q, esaminata precedentemente, coincidono nel caso particolare in cui si abbia valor medio nullo.
Questa interpretazione in termini di varianza (e quindi di deviazione standard σ_q) è utile, più in generale, quando si vuole determinare la propagazione degli effetti dell'incertezza dovuta alla quantizzazione in un sistema digitale e la sua combinazione con le altre fonti di incertezza, così come richiesto dalla GUM.

Bit effettivi
Combinando le equazioni (2.4) e (2.1) si ottiene:

$$\sigma_q^2 = \frac{1}{12}q^2 = \frac{FSR^2}{12 \cdot 2^{2n}} \tag{2.5}$$

da cui si ricava il numero di bit *n* associato alla varianza σ_q^2.

$$n = \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{FSR^2}{12 \cdot \sigma_q^2}\right) \tag{2.6}$$

Se alla varianza del rumore di quantizzazione σ_q^2 si sostituisce quella del rumore totale del convertitore σ_c^2, che include anche il rumore dei circuiti analogici, si ottiene una quantità che viene definita *numero effettivo di bit* del convertitore, *EB*:

$$EB = \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{FSR^2}{12\cdot\sigma_c^2}\right) = \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{FSR^2}{12\cdot\sigma_q^2}\cdot\frac{\sigma_q^2}{\sigma_c^2}\right) = n - \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{\sigma_c^2}{\sigma_q^2}\right) \qquad (2.7)$$

Pertanto il numero di bit effettivo coincide con quello nominale sol nel caso (teorico) in cui non sia presente altro rumore oltre a quello di quantizzazione, e quindi sia $\sigma_c^2 = \sigma_q^2$.

Codifica di segnali bipolari

Nel caso in cui le tensioni analogiche possano assumere valori sia positivi che negativi si ricorre a convertitori bipolari, di solito simmetrici rispetto allo zero.
Con riferimento alla Fig.2.3A, consideriamo ancora l'esempio di un convertitore *AD* che utilizza tre bit. Al primo livello di quantizzazione, corrispondente al valore analogico -*FSR/*2, si potrebbe assegnare il codice (000); mentre all'ultimo livello, corrispondente al valore analogico +(*FSR/*2-*q*), si potrebbe assegnare il codice (111). Tale procedura, detta *offset binary*, non è tuttavia frequente.
Si preferisce più spesso una codifica diversa, detta *complemento a due*, rappresentata in Fig.2.3B, che prevede di rappresentare i valori positivi ancora in binario naturale.
Per ottenere questo risultato basta porre a zero l'*MSB* per i livelli positivi. Per i livelli negativi, viceversa, si passa a uno l'*MSB*, attribuendo a tale bit il significato di bit di segno. Si confrontino, a tale scopo, le ordinate di Fig.2.3A e Fig.2.3B.

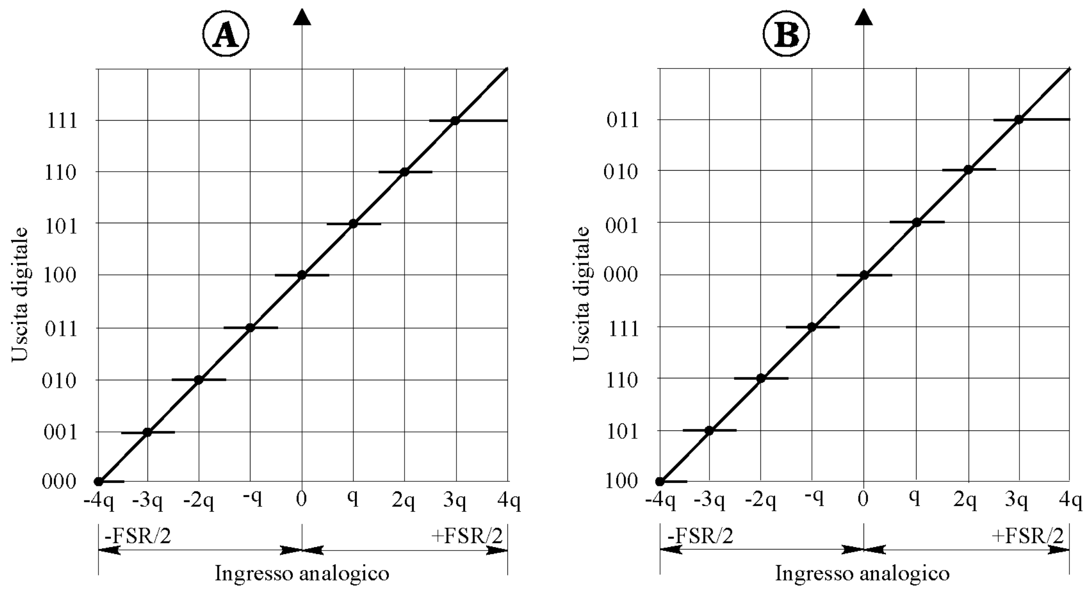

Fig.2.3 - *Convertitore AD bipolare: A) offset binary; B) complemento a 2.*

Nel codice complemento a due, al bit di segno uguale ad uno è associato un peso pari a quello che avrebbe in binario naturale, ma cambiato di segno. A tale valore va sommato algebricamente il valore dei restanti bit della parola di codice, letti in binario naturale.

Esempio: $+3q \Rightarrow 011 \Rightarrow 0x2^2 + 1x2^1 + 1x2^0 = 3$

$-3q \Rightarrow 101 \Rightarrow (-1x2^2) + 0x2^1 + 1x2^0 = -3$